

2º CONGRESSO NACIONAL
DE
MECÂNICA TEÓRICA E APLICADA

Certas classes de proximidades de aplicação
à mecânica.

AUTOR: A.G. PORTELA

Prof. Cat. IST

LISBOA, Julho de 1978

I - INTRODUÇÃO da CLASSE $\mathcal{B}$ de PROXIMIDADES

I-1 Um Sistema de Proximidades $\mathcal{B}$ é essencialmente uma correspondência (que também se simboliza por $\mathcal{B}$) entre dois conjuntos, eventualmente estruturados algébrica e topologicamente.

A classe de uma proximidade é caracterizada pela natureza do conjunto de partida, o de chegada e o tipo da correspondência $\mathcal{B}$.

I-2 A classe $\mathcal{B}$ de proximidades tem as seguintes características:

a) Conjunto de Partida: $G = \mathcal{X}^2$

$$\text{onde } \mathcal{X} = \bigtimes_{i \in H} X_i$$

X_i - Reais onde foram definidas distâncias (ou semi-distâncias) eventualmente distintas entre si.

H - um sub-conjunto dos Naturais.

$\mathcal{X}$: neste conjunto não foi imposta qualquer distância (métrica compatível com as distâncias impostas aos X_i).

A estruturação topológica de $\mathcal{X}$ será feita justamente pelo sistema de proximidades a definir.

b) Conjunto de chegada $\mathcal{I}$

$\mathcal{I}$ é o conjunto das aplicações (funcionais) de $\mathcal{U}$ em $\mathcal{N}$

$$\mathcal{I} = \mathcal{N}^{\mathcal{U}}$$

onde: $\mathcal{U}$ (conjunto referencial) é a recta real.

$\mathcal{N}$ Reticulado de Zadech ($[0,1]$, Ψ , $\uparrow$).

representando Ψ e $\uparrow$, respectivamente: "max" e "min".

Correspondência $\mathcal{B}$

c) A correspondência $\overset{\mathcal{B}}{\vee}$ é, na classe $\mathcal{B}$, do tipo aplicação (funcional)

$$\mathcal{B} : \mathcal{X}^2 \rightarrow \mathcal{I}$$

Nota 1 : $\Gamma_A \in \mathcal{I}$ é, na teoria dos Sub-conjuntos vagos, o caracterizante de um sub-conjunto vago $A \subseteq \mathcal{U}$.

Nota 2 : Para maior informação sobre Proximidades e conjuntos vagos, vejam-se referências (1) e (2).

II - Apresentação de certas sub-classes de $\mathcal{B}$ que gozam de propriedades que lhes conferem aplicações interessantes.

II 1 - Apresentação da Sub-classe $\mathcal{B}_1$

As condições impostas a $\mathcal{B}_1$ são:

1.1) $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$; é uma sub-classe de $\mathcal{B}$.

1.2) Se $\mathcal{X}_\alpha \equiv \mathcal{X}_\beta$ então $\Gamma(\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_\beta) \equiv 0$

$$\forall (\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_\beta) \in \mathcal{X}^2$$

e

$$\Gamma \in \mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}$$

Simbolizando $\Gamma(\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_\beta) \equiv \Gamma_{\alpha\beta}(u) \equiv \mathcal{Z}_{\alpha\beta}(u)$

a preposição poderá formalizar-se como segue:

$$\left[(\mathcal{X}_\alpha \equiv \mathcal{X}_\beta) \right] \Rightarrow \left[\mathcal{Z}_{\alpha\beta}(u) = 0 = \Gamma_{\alpha\beta}(u) \right]$$

$$\forall (\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_\beta) \in \mathcal{X}^2 \text{ e } \forall u \in \mathcal{U}$$

onde

$$\Gamma_{\alpha\beta} \in \mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}$$

1.3) Continuidade

a) Introdução de $\delta_{\alpha\beta}$:

$\mathcal{X}_\alpha$ simboliza uma H-multiplicidade da forma seguinte:

$$\mathcal{X}_\alpha \equiv ({}_1x_\alpha, {}_2x_\alpha, \dots, {}_ix_\alpha, \dots)$$

onde: ${}_ix_\alpha \in X_i, \forall i \in H$

e porque em todos os X_i foi imposta uma norma ou semi-norma, tem sentido definir as distâncias:

$${}_id_{\alpha\beta} ({}_ix_\alpha, {}_ix_\beta), \forall i \in H$$

onde ${}_id_{\alpha\beta} \in \text{Real não negativo}$.

Então pode definir-se $\delta_{\alpha\beta}$ como segue:

$$\delta_{\alpha\beta} \equiv \max_{i \in H} [{}_id_{\alpha\beta}]$$

e $\delta_{\alpha\beta}$ será um real não negativo.

b) Diz-se que uma proximidade da classe $\mathcal{B}$ é contínua no seu argumento, $\mathcal{X}^2$, se:

Dado um real $\kappa > 0$, arbitrariamente pequeno, existir um real $h(\kappa) > 0$ tal que:

$\forall (\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_\beta) \in \mathcal{X}^2$, existirem $\mathcal{X}_\sigma \in \mathcal{X}$ satisfazendo
a $\delta_{\beta\sigma} < h(\kappa)$ e $\delta_{\beta\sigma} > 0$ para os quais for:

$$|z_{\alpha\beta}(u) - z_{\alpha\sigma}(u)| < \kappa, \forall u \in U$$

e onde

$$\Gamma_{\alpha\beta} : \Gamma_{\beta\sigma} : \Gamma_{\alpha\sigma} \in \Gamma, \Gamma \subset T$$

Notas: 1 - A continuidade no argumento de $\Gamma_{\alpha\beta}$, não impõe a continuidade da função $z_{\alpha\beta}(u)$, como função de u .

2 - Se $\mathcal{X}_\alpha \equiv \mathcal{X}_\beta$, será $z_{\alpha\beta}(u) = 0$ tendo em atenção 1.2).

Então a expressão: $|z_{\alpha\beta}(u) - z_{\alpha\sigma}(u)| < \kappa$

reduz-se: $|z_{\alpha\sigma}(u)| < \kappa$

3 - Os pares $(\mathfrak{x}_\alpha, \mathfrak{x}_\beta), (\mathfrak{x}_\beta, \mathfrak{x}_\gamma)$ dizem-se emparelhados, veja-se a referência [1].

$$1.4) \quad Z_{\alpha\beta}(u) \equiv 0 \quad \text{para todo o } u < 0.$$

$$\text{Isto é, } \forall_{u \in U} u < 0 \implies Z_{\alpha\beta}(u) = 0$$

$$= \forall (\mathfrak{x}_\alpha, \mathfrak{x}_\beta) \in \mathfrak{X}^2$$

1.5) Unicidade do Supremum

$$\exists u_{\alpha\beta}^* \in U \quad \text{para o qual será } Z_{\alpha\beta}(u_{\alpha\beta}^*) = 1$$

$$\text{para: } \forall (\mathfrak{x}_\alpha, \mathfrak{x}_\beta) \in \mathfrak{X}^2$$

$$= \forall \Gamma_{\alpha\beta} \in \Gamma_1 \subset \Gamma$$

$$\text{e será ainda: } u_{\alpha\beta}^* < \infty$$

Donde resulta que:

$$a) \quad (u \neq u_{\alpha\beta}^*) \iff (Z_{\alpha\beta} < 1)$$

$$b) \quad u_{\alpha\beta}^* \geq 0, \text{ porque segundo 1.4) se } u < 0 \text{ então } Z(u) = 0$$

Se não introduzir confusão pode aligeirar-se a escrita e representar $u_{\alpha\beta}^*$ por u^* .

c) Note-se que se $\mathfrak{x}_\alpha \equiv \mathfrak{x}_\beta$, veja-se 1.2), não tem existência $\Gamma_{\alpha\alpha}$ uma vez que não poderia satisfazer-se a 1.2 e 1.5 simultaneamente.

1.6) Monotonia

$Z_{\alpha\beta}(u)$ é monótono não decrescente com u , no intervalo $[0, u_{\alpha\beta}^*)$,

e é monótono não crescente com u , no intervalo $(u_{\alpha\beta}^*, \infty)$

e para $\forall (\mathfrak{x}_\alpha, \mathfrak{x}_\beta) \in \mathfrak{X}^2$ e $\forall \Gamma_{\alpha\beta} \in \Gamma_1 \subset \Gamma$.

Note-se que o intervalo $[0, u_{\alpha\beta}^*)$ pode ser vazio se $u_{\alpha\beta}^* = 0$.

A sub-classe $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$ satisfaz as condições 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 e 1.6.

Dá-se por concluída a apresentação da classe $\mathcal{B}_1$.

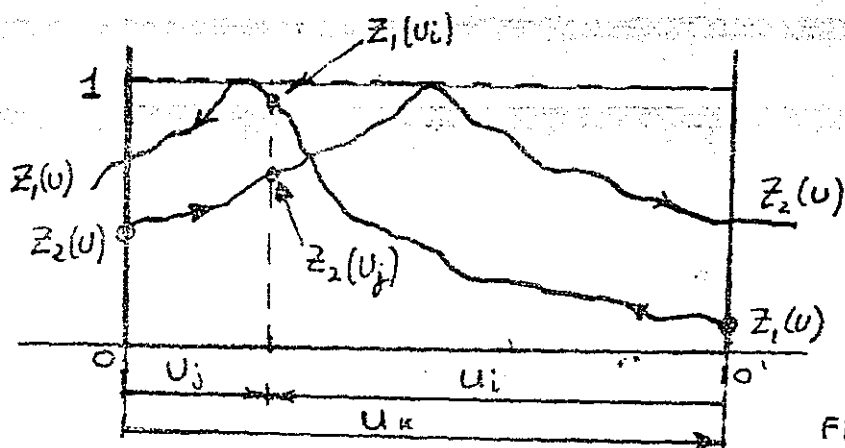
II.2 - Propriedades mais importantes

2.1 - Nota introdutória

Com o fim de aliviar a exposição recordam-se as preposições que se dão por reproduzidas no texto que se segue, evitando relembrá-las ao longo das várias demonstrações a fazer:

- $\Gamma_{\alpha\beta}$ e $\Gamma_{\beta\gamma} \in \Gamma, \subset \Gamma$
- Γ_1 é o subconjunto de Γ , onde a classe B_1 de proximidades toma os seus valores.
- u_κ é dado e procura-se determinar o valor de $Z_{\alpha\beta\gamma}(u_\kappa)$
- $Z_{\alpha\beta\gamma}(u_\kappa) = Z_{\alpha\beta}(u_i) \oplus Z_{\beta\gamma}(u_j)$
- $u_\kappa = u_i + u_j$ e $\begin{cases} u_i \text{ e } u_j > 0 \\ u_i, u_j, u_\kappa \in U \end{cases}$
- (x_α, x_β) e $(x_\beta, x_\gamma) \in \mathbb{R}^2$
- $Z_{\alpha\beta}(u_i) = Z_{\beta\gamma}(u_j) \equiv 0, \forall u_i, u_j < 0$
- $Z_{\alpha\beta}(u_i)$ e $Z_{\beta\gamma}(u_j)$ são não decrescentes respectivamente nos intervalos $[0, u_{\alpha\beta}^*] = [0, u_{\beta\gamma}^*]$
- $Z_{\alpha\beta}(u_i)$ e $Z_{\beta\gamma}(u_j)$ são não crescentes respectivamente nos intervalos $(u_{\alpha\beta}^*, \infty) = (u_{\beta\gamma}^*, \infty)$
- $Z_{\alpha\beta}(u_{\alpha\beta}^*) = 1$ e $Z_{\alpha\beta}(u_i) < 1, \forall u_i \neq u_{\alpha\beta}^*$
- $Z_{\beta\gamma}(u_{\beta\gamma}^*) = 1$ e $Z_{\beta\gamma}(u_j) < 1, \forall u_j \neq u_{\beta\gamma}^*$
- $u_{\alpha\beta}^* = u_{\beta\gamma}^* \in [0, A \ll \infty] \subset \text{Reais}$
- $Z_{\alpha\beta}$ e $Z_{\beta\gamma}$, com funções de μ , podem possuir um número numerável de discontinuidades (isoladas).

2.2) Representação auxiliar



A representação assenta na propriedade de que $\mu_k = \mu_i + \mu_j$. As ordenadas dão os valores de Z_1 e Z_2 para todos os pares (u_i, u_j) que satisfazem a $u_i + u_j = u_k$ e onde u_k é dado.

No exemplo é fácil de ver que para (u_i, u_j) corresponde respectivamente $Z_1(u_i)$ e $Z_2(u_j)$ e que $Z_2(u_j) < Z_1(u_i)$ e que $\min [Z_1(u_i); Z_2(u_j)] = Z_2(u_j)$

Note-se que é indiferente usar a origem 0 para Z_2 e 0' para Z_1 , ou inverter os traçados, trocando as origens.

Esta representação vai ser invocada ao longo da exposição e demonstrações dos capítulos seguintes.

2.3) Propriedades dos cruzamentos de Z_1 com Z_2 e outras de interesse

Estas propriedades serão estudadas examinando três hipóteses que esgotam todas as situações:

- | | |
|------------|---|
| Hipótese A | $u_k < u_{\alpha\beta}^* + u_{\beta\gamma}^*$ |
| Hipótese B | $u_k > u_{\alpha\beta}^* + u_{\beta\gamma}^*$ |
| Hipótese C | $u_k = u_{\alpha\beta}^* + u_{\beta\gamma}^*$ |

Enceta-se a exposição apresentando três Lemas.

Lema 1:

Os ramus z_1 e z_2 cruzam-se num intervalo I e que o ponto (u_i, u_j) pertence, $u_i \neq u_{\alpha\beta}$ e $u_j \neq u_{\beta\alpha}$.

As monotonias de z_1 e z_2 são contrárias num intervalo I .

Em (u_i, u_j) , z_1 ou z_2 ou ambos podem ser descontínuos. Então nesse ponto (u_i, u_j) não existe um max. min. (z_1, z_2)

Demonstração

(z_1 é não decrescente) , por exemplo
(z_2 é não crescente)

Seja u_i^e uma sucessão monótona crescente que tem por limite u_i e onde todos os u_i^e pertencem ao intervalo I .

$u_j^e = u_j - u_i^e$, será uma sucessão monótona decrescente que tem por limite u_j .

u_i^l uma sucessão monótona decrescente que tem por limite u_i e os seus termos pertencem ao intervalo I .

$u_j^l = u_j - u_i^l$, será uma sucessão monótona crescente que tem por limite u_j .

Formem-se os pares:

$$[z_1(u_i^e); z_2(u_j^e)] , \forall e \in \text{Naturais}$$

$$[z_2(u_i^l); z_1(u_j^l)] , \forall l \in \text{Naturais}$$

Para que (u_i, u_j) esteja na região de cruzamento contida no intervalo I , será necessário que:

$$(1) \begin{cases} z_1(u_i^e) \leq z_2(u_j^e) \\ z_1(u_i^l) \geq z_2(u_j^l) \end{cases}$$

$$\text{ou} \begin{cases} z_1(u_i^e) \geq z_2(u_j^e) \\ z_1(u_i^l) \leq z_2(u_j^l) \end{cases} , \forall e, l \in \mathbb{N}$$

uma vez que z_1 e z_2 têm no intervalo I monotonias contrárias.

Examinemos a hipótese (1):

$$\min [z_1(u_i^e); z_2(u_j^e)] = z_1(u_i^e)$$

$$\min [z_1(u_i^L); z_2(u_j^L)] = z_2(u_j^L)$$

$$\text{mas } \begin{aligned} z_1(u_i^e) &\leq z_1(u_i^{e+1}), \quad \forall e \in \mathbb{N} \\ z_2(u_j^L) &\geq z_2(u_j^{L+1}), \quad \forall e \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} \max \left\{ \min [z_1(u_i^e); z_2(u_j^e)] \right\} &= \\ = \max_e \left\{ z_1(u_i^e) \right\} &= \lim_{e \rightarrow \infty} z_1(u_i^e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \left\{ \min [z_1(u_i^L); z_2(u_j^L)] \right\} &= \\ = \max_L \left\{ z_2(u_j^L) \right\} &= z_2(u_j^1) \end{aligned}$$

$$\text{uma vez que } \begin{cases} z_2(u_j^1) \geq z_2(u_j^L) \\ \forall L \in \mathbb{I} \end{cases}$$

Mas:

$$= \max_{e,L} \min \left[[z_1(u_i^e); z_2(u_j^e)]; [z_1(u_i^L); z_2(u_j^L)] \right] =$$

$$= \max \left\{ \max_e \min [z_1(u_i^e); z_2(u_j^e)]; \right.$$

$$\left. \max_L \min [z_1(u_i^L); z_2(u_j^L)] \right\} =$$

$$= \max \left\{ \lim_{e \rightarrow \infty} z_1(u_i^e); z_2(u_j^1) \right\}$$

$$\text{mas } Z_2(u_j^*) \geq \lim_{L \rightarrow \infty} (u_j^L) \geq \lim_{L \rightarrow \infty} u_j^L \geq \lim_{L \rightarrow \infty} Z_1(u_j^L)$$

e daí que

$$\max \left\{ \lim_{L \rightarrow \infty} Z_1(u_j^L); Z_2(u_j^*) \right\} = Z_2(u_j^*)$$

Finalmente, bastará que o intervalo I seja suficiente para que $Z_2(u_j^*) > \lim_{L \rightarrow \infty} (Z_2 u_j^L)$, o que é sempre possível se $\lim_{L \rightarrow \infty} u_j^L \neq 1$ isto é, $u_j^L \neq u_{\beta\gamma}^*$, o que se verifica por hipótese. Portanto, no ponto (u_i, u_j) não se verifica o max.min (Z_1, Z_2) q.e.d..

Mutatis mutandis, repete-se a demonstração para a hipótese (2) e em seguida para o caso de Z_1 ser não crescente e Z_2 ser não decrescente, o que conclui a demonstração.

Lema 2:

Os ramos Z_1 e Z_2 cruzam-se num Intervalo I a que o ponto (u_i, u_j) pertence

$$u_i \neq u_{\alpha\beta}^* \quad \text{e} \quad u_j \neq u_{\beta\gamma}^*$$

As monotonias de Z_1 e Z_2 são semelhantes no Intervalo I (ambos não crescentes, ambos não decrescentes).

Em (u_i, u_j) , Z_1 ou Z_2 ou ambos podem ser descontínuos.

Então, no ponto considerado verifica-se o max.min $(Z_1; Z_2)$

Demonstração:

Usa-se a mesma simbologia empregada no Lema 1.

Admite-se que Z_1 e Z_2 são não decrescentes.

Para que (u_i, u_j) esteja situado na região de cruzamento contida no intervalo I , será necessário que:

$$(1) \text{ e } \begin{cases} z_1(u_i^e) \leq z_2(u_j^e) \\ z_1(u_i^L) \geq z_2(u_j^L) \end{cases}$$

$$\forall l, L \in \mathbb{N}$$

$$(2) \text{ ou } \begin{cases} z_1(u_i^e) \geq z_2(u_j^e) \\ z_1(u_i^L) \leq z_2(u_j^L) \end{cases}$$

Examinando a 1.ª hipótese:

$$\min [z_1(u_i^l); z_2(u_j^e)] = z_1(u_i^e)$$

$$\min [z_1(u_i^L); z_2(u_j^L)] = z_2(u_j^L)$$

$$\text{mas } z_1(u_i^e) \leq z_1(u_i^{e+1}), \quad \forall l \in \mathbb{N}$$

$$z_2(u_j^L) \leq z_2(u_j^{L+1}), \quad \forall L \in \mathbb{N}$$

Então:

$$\max_l \min [z_1(u_i^l); z_2(u_j^L)] =$$

$$\max [z_1(u_i^e)] = \lim_{l \rightarrow \infty} z_1(u_i^e)$$

Identicamente

$$\max_L \min [z_1(u_i^L); z_2(u_j^L)] =$$

$$= \max_L [z_2(u_j^L)] = \lim_{L \rightarrow \infty} z_2(u_j^L)$$

porque são ambas as funções não decrescentes.

Mas, por definição:

$$z_{\alpha\beta\delta}(u_k) = \max_{e,L} \min [z_1(u_i^e); z_2(u_j^e)]$$

$$[z_1(u_i^L); z_2(u_j^L)]$$

$$= \max \left\{ \lim_{e \rightarrow \infty} z_1(u_i^e); \lim_{L \rightarrow \infty} z_2(u_j^L) \right\}$$

Ora, estes limites existem, uma vez que as descontinuidades são isoladas.

q.e.d.

Note-se que os dois limites podem coincidir e se Z_1 e Z_2 forem regulares (sem descontinuidades em (u_i, u_j) e na sua vizinhança) então o cruzamento far-se-á num ponto cujo ordenado é

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} Z_1(u_i^x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} Z_2(u_j^x) = \\ &= Z_1(u_i^x) = Z_2(u_j^x). \end{aligned}$$

Mutatis mutandis se poderia demonstrar no caso (2) e depois repetir os meus passos para o caso de Z_1 e Z_2 serem ambos não crescentes, obtendo-se os mesmos resultados.

Lema 3:

Nas condições referidas no Lema 2 $Z_{\alpha\beta\gamma}(u_k)$ terá monotonia semelhante à monotonia comum de Z_1 e Z_2 .

$$\text{Seja } \underline{u}_k = u_k + \Delta u,$$

o que se deseja provar é:

$$Z_{\alpha\beta\gamma}(\underline{u}_k) \geq Z_{\alpha\beta\gamma}(u) \quad \text{se } \Delta u > 0$$

$$Z_{\alpha\beta\gamma}(\underline{u}_k) \leq Z_{\alpha\beta\gamma}(u) \quad \text{se } \Delta u < 0$$

Admitindo que, em ambos os casos, são mantidas as condições do Lema 2.

1º caso - As duas funções são ambas não decrecentes.

Para $\Delta u > 0$

o novo ponto de cruzamento $(\underline{u}_i, \underline{u}_j)$ com $\underline{u}_k = \underline{u}_i + \underline{u}_j$ estará contido no intervalo

$$u_i \leq \underline{u}_i \leq u_i + \Delta u$$

$$u_j \leq \underline{u}_j \leq u_j + \Delta u$$

onde $\lim_{x \rightarrow \infty} \underline{u}_i^x = \underline{u}_i$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \underline{u}_j^x = \underline{u}_j$$

Ora

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} z_1(u_i^\varepsilon) \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} z_1(u_i^\varepsilon)$$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} z_2(u_j^L) \geq \lim_{L \rightarrow \infty} z_2(u_j^L)$$

uma vez que z_1 e z_2 são não decrescentes.

Donde

$$\begin{aligned} z_{\alpha\beta\gamma}(u_\kappa) &= \max \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} z_1(u_i^\varepsilon); \lim_{L \rightarrow \infty} z_2(u_j^L) \right] \\ &\geq \max \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} z_1(u_i^\varepsilon); \lim_{L \rightarrow \infty} z_2(u_j^L) \right] = \\ &= z_{\alpha\beta\gamma}(u_\kappa) \end{aligned}$$

Para $\Delta u < 0$

O novo ponto de cruzamento (u_i, u_j) estava contido no intervalo

$$u_i + \Delta u \leq \underline{u}_i \leq u_i \quad \text{e} \quad u_j + \Delta u \leq \underline{u}_j \leq u_j$$

e então

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} z_1(u_i^\varepsilon) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} z_1(u_i^\varepsilon)$$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} z_2(u_j^L) \leq \lim_{L \rightarrow \infty} z_2(u_j^L)$$

Donde $z_{\alpha\beta\gamma}(\underline{u}_\kappa) \leq z_{\alpha\beta\gamma}(u_\kappa)$ q.e.d.

2º caso

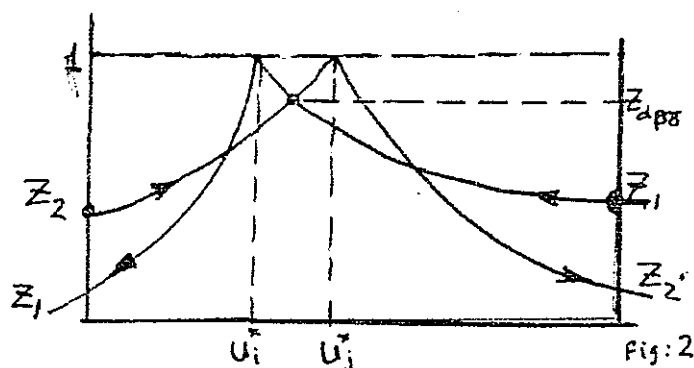
As duas funções são ambas não crescentes.

Demonstra-se como o caso 1.

Hipótese A

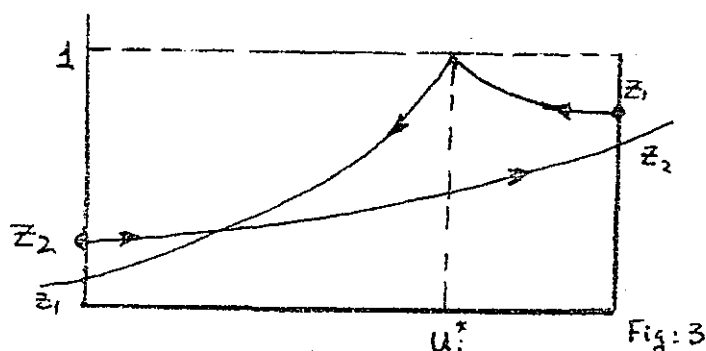
$$u_{\kappa} < u_{\alpha\beta}^* + u_{\beta\gamma}^*$$

Dois casos podem verificar-se:



ou A1) os ramos não decrescentes de z_1 e z_2 cruzam-se;

ou A2) os ramos não decrescentes de z_1 e z_2 não se cruzam.



A1) Então, pelo Lema 2, nesse ponto de cruzamento, verifica-se o max.min

(z_2, z_1) no intervalo $[0, u_{\kappa}]$ e a ordenada de $P = z_{\alpha\beta\gamma}(u_{\kappa})$

Fig: 2

A2) Nesta hipótese, será necessário que $u_{\alpha\beta}^*$ ou $u_{\beta\gamma}^*$ (ou ambos) seja maior que u_{κ} , para que se não verifique o cruzamento dos ramos não decrescentes. Fig: 3

Isto significa que uma das funções z_1 ou z_2 só tem no intervalo

$[0, u_{\kappa}]$ o ramo não decrescente.

Pelo Lema 1 não interessa estudar o cruzamento do ramo não crescente que eventualmente existe de uma das funções com o ramo não decrescente da outra, porque nesse ponto não se verifica max.min (z_1, z_2) .

Então, dois casos se podem dar na hipótese A2 :

ou $z_1(u_i) \geq z_2(u_i)$ (a)

ou $z_1(u_i) \leq z_2(u_i)$ (b)

na região onde as duas funções são ambas não decrescentes,

$$e \max.\min (z_1(u_i); z(u_i)) =$$

$$\text{no caso (a)} \quad \max z_2(u_j) = z_2(u_k)$$

$$(b) \quad \max z_2(u_j) = z_2(u_k)$$

$$\text{Onde } z_{\alpha\beta\gamma}(u_k) = z_2(u_k) \text{ se } z_1(0) > z_2(u_k) \\ = z_1(u_k) \text{ se } z_2(0) > z_1(u_k)$$

Finalmente, note-se que pelo Lema 3 $z_{\alpha\beta\gamma}(u_k)$ é monótono não decrescente com u_k , no caso A.

É fácil de ver que o mesmo se verifica no caso A_2 .

Com efeito:

$$\begin{cases} z_2(u_k + \delta u) \geq z_2(u_k) \\ z_1(u_k + \delta u) \geq z_1(u_k) \end{cases} \text{ para } \delta u > 0$$

$$\text{e } \begin{cases} z_2(u_k - \delta u) \leq z_2(u_k) \\ z_1(u_k - \delta u) \leq z_1(u_k) \end{cases}$$

para $\delta u > 0$

Partindo do princípio que $u_k + \delta u < u_{\alpha\beta}^* + u_{\beta\gamma}^*$

Logo na hipótese $u_k < u_{\alpha\beta}^* + u_{\beta\gamma}^*$, $z_{\alpha\beta\gamma}(u_k)$ é monótono não decrescente com u_k .

Hipótese B: $u_k > u_{\alpha\beta}^* + u_{\beta\gamma}^*$

Nesta hipótese os ramos não decrescentes não se cruzam.

Novamente, dois casos vão ser estudados:

B1) Os ramos não crescentes cruzam-se.

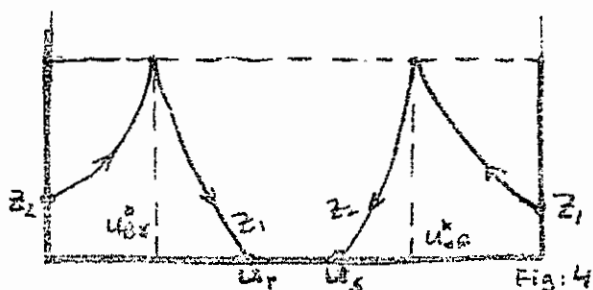
B2) Os ramos não crescentes não se cruzam.

Note-se que na hipótese B: $(u_{\alpha\beta}^*, u_{\beta\delta}^*) < u_\kappa$

B1) Pelo Lema 2 no cruzamento encontrar-se-á o $\max, \min (z_1, z_2)$ e daí a ordenada de $z_{\alpha\beta\delta}(u_\kappa)$ e pelo Lema 3, $z_{\alpha\beta\delta}(u_\kappa)$ será não crescente.

B2) Neste caso existirá no intervalo $[u_{\alpha\beta}^*, u_{\beta\delta}^*]$ um intervalo $[u_n, u_s]$ (que pode reduzir-se a um ponto) onde

$$z_2(u_s) = z_1(u_n) = 0$$



e como ambos os valores são não crescentes, será ainda:

$$z_1(u_i) = 0 \quad \forall u_i > u_n$$

$$z_2(u_j) = 0 \quad \forall u_j > u_s$$

$$e \quad z_{\alpha\beta\delta}(u_\kappa) = \max, \min [z_1(u_i); z_2(u_j)] = 0$$

Quanto à monotonia de $z_{\alpha\beta\delta}(u_\kappa)$ com u_κ , é fácil de ver
ue se $\underline{u}_\kappa > u_\kappa$ $z_{\alpha\beta\delta}(\underline{u}_\kappa) \geq z_{\alpha\beta\delta}(u_\kappa) = 0$

Basta que $\underline{u}_\kappa$ seja suficientemente grande para que os ramos não crescentes z_1 e z_2 se cruzem.

Logo $z_{\alpha\beta\delta}$ é monótono não crescente para $u_\kappa > u_{\alpha\beta}^* + u_{\beta\delta}^*$

Hipótese C $u_\kappa = u_{\alpha\beta\delta}^* = u_{\alpha\beta}^* + u_{\beta\delta}^*$

Porque $z_1(u_{\alpha\beta}^*) = 1$ e $z_2(u_{\beta\delta}^*) = 1$

será $z_{\alpha\beta\delta}(u_{\alpha\beta\delta}^*) = 1$

Como $u_{\alpha\beta}^*$ e $u_{\beta\gamma}^*$ são únicos, também $u_{\alpha\beta\gamma}^*$ será único, e $z_{\alpha\beta\gamma}(u_{\alpha\beta\gamma}^*) = 1$ será supremum em $u_{\alpha\beta\gamma}$.

Nota final

$$z_{\alpha\beta\gamma}(u_k) = 0, \quad \forall u_k < 0$$

uma vez que $z_1(u_i) = z_2(u_j) = 0$

$$\forall u_i < u_j < 0$$

Resumindo o capítulo 23:

→ $z_{\alpha\beta\gamma}(u_k)$ é não decrescente no intervalo $[0, u_{\alpha\beta\gamma}^*]$
é não crescente no intervalo $[u_{\alpha\beta\gamma}^*, \infty]$

$$\rightarrow z_{\alpha\beta\gamma}(u_{\alpha\beta\gamma}^*) = 1 \equiv z_{\alpha\beta\gamma}(u_k) < 1, \quad \forall u_k \neq u_{\alpha\beta\gamma}^* \\ z_{\alpha\beta\gamma}(u_k) = 0, \quad \forall u_k < 0$$

→ Se os ramos ambos não crescentes ou ambos não decrescentes se cruzam, será:

$$z_{\alpha\beta\gamma}(u_k) = \max \left\{ \lim_{i \rightarrow \infty} z_1(u_i^e); \lim_{j \rightarrow \infty} z_2(u_j^e) \right\}$$

→ Se o ponto (u_i, u_j) for regular, então $z_{\alpha\beta\gamma}(u_k) = z_1(u_i) = z_2(u_j)$

→ Se os ramos não decrescentes não se cruzam e $(u_k < u_{\alpha\beta}^* + u_{\beta\gamma}^*)$
então $z_{\alpha\beta\gamma}(u_k) = \begin{cases} z_2(u_k) & \text{se } z_1(0) > z_2(u_k) \\ z_1(u_k) & \text{se } z_2(0) > z_1(u_k) \end{cases}$

→ Se os ramos não crescentes não se cruzam e $(u_k > u_{\alpha\beta}^* + u_{\beta\gamma}^*)$
então $z_{\alpha\beta\gamma}(u_k) = 0$

2.4 - $Z_{\alpha\beta\gamma}(u_k)$ é um caracterizante da classe I_1

A proximidade definida tem por domínio X^3 mas tem por contra-domínio I_1 , isto é, o reticulado é o mesmo e satisfaz às proximidades do tipo B .

Com efeito:

a) Se $x_\alpha \equiv x_\beta \equiv x_\gamma$ então $Z_{\alpha\beta\gamma} = 0$.

b) Se $\Gamma_{\alpha\beta}$ e $\Gamma_{\beta\gamma}$ forem contínuos em relação a (x_α, x_β) e (x_β, x_γ) então $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ será contínuo em relação a $[(x_\alpha, x_\beta); (x_\beta, x_\gamma)]$.

c) $Z_{\alpha\beta\gamma} \equiv 0$, $\forall u < 0$.

d) Conserva $Z_{\alpha\beta\gamma}$ a unicidade do supremum, só $u_{\alpha\beta\gamma}^*$ produz $Z_{\alpha\beta\gamma}(u_{\alpha\beta\gamma}^*) = 1$

e) $Z_{\alpha\beta\gamma}$ é monótono não decrescente no intervalo $(0, u_{\alpha\beta\gamma}^*)$ e monótono não crescente no intervalo $(u_{\alpha\beta\gamma}^*, \infty)$.

Resumindo, $Z_{\alpha\beta\gamma}$ pode tratar-se como a imagem de uma proximidade do tipo B , distinguindo-se a proximidade correspondente apenas em que o seu domínio é X^3 e não X^2 .

Porém, $Z_{\alpha\beta\gamma} \subseteq I_1$ e portanto o contradomínio de $Z_{\alpha\beta\gamma}$ é o mesmo das proximidades do tipo B .

2.5 - Propriedades da composição dos Γ que designaremos de "soma"

a) A "soma" é comutativa.

Com efeito: $\max_{i,j} [Z_{\alpha\beta}(u_i); Z_{\beta\gamma}(u_j)] = \max_{i,j} [Z_{\beta\gamma}(u_j); Z_{\alpha\beta}(u_i)]$

ou seja

$$\Gamma_{\alpha\beta} \oplus \Gamma_{\beta\gamma} = \Gamma_{\beta\gamma} \oplus \Gamma_{\alpha\beta}$$

b) Associatividade da soma

$$(\Gamma_{\alpha\beta} \oplus \Gamma_{\beta\gamma}) \oplus \Gamma_{\gamma\delta} = \Gamma_{\alpha\beta} \oplus (\Gamma_{\beta\gamma} \oplus \Gamma_{\gamma\delta}) \quad (1)$$

Para efectuar esta demonstração vamos introduzir as seguintes convenções simbólicas:

$$\begin{cases} u_k = u_i + u_j \\ u_p = u_j + u_e \end{cases} \quad \begin{cases} u_k + u_e = u_T \\ u_p + u_i = u_T \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 = z_1(u_i) \\ z_2 = z_2(u_j) \\ z_3 = z_3(u_e) \end{cases} \quad \begin{cases} z_{12} = z_{\alpha\beta\gamma}(u_k) \\ z_{23} = z_{\beta\gamma\delta}(u_p) \\ \begin{cases} z_{123} = z_{12} \oplus z_3 \\ z_{231} = z_{23} \oplus z_1 \end{cases} \end{cases}$$

Assim, a proposição a demonstrar (1) pode formular-se da seguinte forma

$$z_{12} \oplus z_3 = z_{123} = z_{231} = z_{23} \oplus z_1$$

Vamos considerar três hipóteses típicas que esgotem as situações possíveis.

$$1) z_{123} = z_3 = z_{12}$$

$$2) z_{123} = z_3 < z_{12}$$

$$3) z_{123} = z_{12} < z_3$$

1) Como $z_{12} = \min(z_1; z_2)$ e $z_1, z_2 \gg z_{12}$

$$z_{123} = \min[z_3; \min(z_1; z_2)] = z_3$$

$$\text{e } z_{231} = \min[z_1; \min(z_2, z_3)] = z_3 \quad \text{q.e.d.}$$

2) Como $z_{12} > z_3$ então z_1 e $z_2 > z_3$

$$e \quad z_{123} = z_3$$

$$z_{123} = [\min(z_1, z_2); z_3] = z_3$$

q. e. d.

3) Como $z_{12} < z_3 \Rightarrow z_1$ ou $z_2 < z_3$

$$e \quad z_{123} = [\min(z_1, z_2); z_3] = \min(z_1, z_2)$$

$$z_{23} = \min(z_2; z_3) = z_2$$

$$e \quad z_{231} = \min(z_2; z_1)$$

q. e. d.

c) A "soma" não possui elemento neutro.

Para que $\Gamma_{\alpha\beta} \oplus \Gamma_{\beta\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta}$ implica que

$$\Gamma_{\beta\gamma} = 1, \quad \forall \mu$$

Ora esse tipo de caracterizantes não pertence a Γ .

d) A "soma" induz em Γ_1 um semigrupo comutativo $(\Gamma_1, \oplus)$

e) Domínios e contradomínios de B_1

$$\text{Dom} = X^2 \leftrightarrow \text{contradomínio} \quad \Gamma_{\alpha\beta} \in \Gamma_1$$

$$" \quad X^3 \leftrightarrow " \quad \Gamma_{\alpha\beta\gamma} \in \Gamma_1$$

$$" \quad X^K \leftrightarrow " \quad \underbrace{\Gamma_{\alpha\beta \dots \gamma}}_K \in \Gamma_1$$

mas $z_{\alpha\beta}(u), z_{\alpha\beta\gamma}(u), \dots, z_{\alpha\beta \dots \gamma}(u)$

são todas funções pertencentes a Γ_1 o qual tem a estrutura de um semigrupo comutativo $(\Gamma_1, \oplus)$

2.5 - Distância associada a uma proximidade da subclasse B_1

Pode impôr-se a $\mathcal{X}$ uma distância, conjugando esta com as proximidades da classe B_1 .

Haverá assim uma classe $B_{1d} \subset B_1$ que satisfaz a condição seguinte:

Os $u_{\alpha\beta}^*$ estão entre si relacionados em termos de satisfazer as regras de uma distância.

Isto é:

$$\text{Se } \Delta(x_\alpha, x_\beta) = u_{\alpha\beta}^* \quad \forall (x_\alpha, x_\beta) \in \mathcal{X}^2$$

então: 1) $u_{\alpha\beta}^* = u_{\beta\alpha}^* \geq 0$ e Reais

$$2) \quad x_\alpha \equiv x_\beta \Rightarrow u_{\alpha\beta}^* = 0$$

$$3) \quad u_{\alpha\beta}^* + u_{\beta\gamma}^* \geq u_{\alpha\gamma}^*$$

Pode, se isso tiver interesse e for possível, impôr-se ainda que:

$$4) \text{ Se } u_{\alpha\beta}^* = 0 \text{ então } x_\alpha \equiv x_\beta$$

Note-se que as condições 1) e 2) são já propriedades da classe. As propriedades novas são 3) e 4) e são elas que conferem à proximidade a qualidade de pertencer à classe.

A distância $\Delta(x_\alpha, x_\beta) = u_{\alpha\beta}^*$ diz-se distância associada da proximidade da classe B_1 .

Regra da "Soma"

Pode impôr-se adicionalmente a seguinte restrição:

$$Z_{\alpha\gamma}(u) - \frac{u_{\alpha\gamma}^*}{u_{\alpha\beta\gamma}^*} \geq Z_{\alpha\beta\gamma}(u)$$

De que resulta:

$$Z_{\alpha\gamma}(u_{\alpha\beta\gamma}^* \cdot \frac{u_{\alpha\gamma}^*}{u_{\alpha\beta\gamma}^*}) \geq Z_{\alpha\beta\gamma}(u_{\alpha\beta\gamma}^*)$$

$$Z_{\alpha\sigma}(u_{\alpha\sigma}^*) \geq Z_{\alpha\beta\sigma}(u_{\alpha\beta\sigma}^*)$$

$$1 \geq 1$$

Assim, a escala das abcissas de $Z_{\alpha\sigma}$ é dilatada de:
 $u_{\alpha\beta\sigma}^*/u_{\alpha\sigma}^*$.

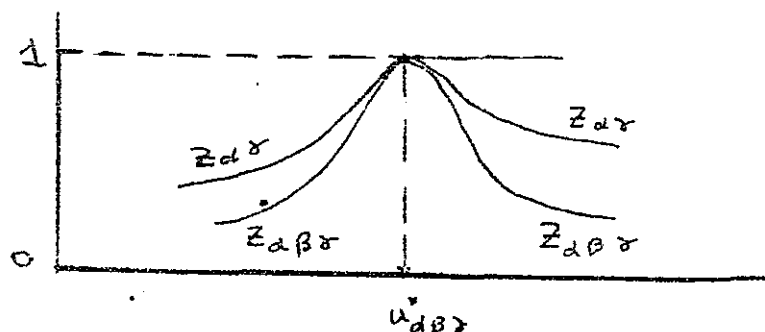


Fig: 5

As proximidades com distâncias associadas e que satisfazem também à regra da "soma" constituem uma sub-classe de B_1 e simbolizam-se por B_{1d} e $B_{1d} \subset B_1$.

Identicamente, $T_{1d} \subset T_1$.

III) Probabilização das proximidades B_1

III-1) Conversão de $Z(u)$ numa densidade de uma medida finita, normada e positiva, onde $Z(u)$ pertence à sub-classe T_1

As condições a satisfazer são:

1.1) Existência, ser finito, positivo, monótono não decrescente com a , o seguinte integral:

$$\mu = \int_{-\infty}^a z_{\alpha\beta}(u) du. \quad \begin{cases} \forall (\mathbb{E}_\alpha, \mathbb{E}_\beta) \in \mathbb{E}^2 \\ \forall a \in (-\infty, +\infty) \end{cases}$$

A existência, a positividade e a monotonia com a é garantida para todas as proximidades pertencentes à classe $\mathbb{T}_1$. A nova exigência é que seja finito o integral.

1.2 - A densidade $\hat{z}_{\alpha\beta}(u)$ é definida da seguinte forma:

$$\hat{z}_{\alpha\beta}(u) = z_{\alpha\beta}(u) \cdot K_{\alpha\beta}$$

de tal modo que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} K_{\alpha\beta} \cdot z_{\alpha\beta}(u) \cdot du &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{z}_{\alpha\beta}(u) du = 1 \end{aligned}$$

para $\forall (\mathbb{E}_\alpha, \mathbb{E}_\beta) \in \mathbb{E}^2$

$\hat{z}_{\alpha\beta}$ é a densidade de probabilidade construída da proximidade entre $\mathbb{E}_\alpha$ e $\mathbb{E}_\beta$ dada por $z_{\alpha\beta}$ pertencente à classe $\mathbb{T}_1$.

$K_{\alpha\beta}$ é o factor de normalização.

A moda de $\hat{z}_{\alpha\beta}(u)$ verifica-se para $u = u_{\alpha\beta}^*$, uma vez que $\hat{z}_{\alpha\beta}(u_{\alpha\beta}^*) = 1$ e $u_{\alpha\beta}^*$ é único e 1 é o supremum do reticulado.

$\hat{z}_{\alpha\beta}(u_{\alpha\beta}^*)$ será o valor máximo de $\hat{z}_{\alpha\beta}(u)$ e esse valor é único.

$\hat{z}_{\alpha\beta}(u)$ têm as mesmas propriedades de monotonia de $z_{\alpha\beta}(u)$, como é fácil de ver.

III-2) Proximidade com densidade de probabilidade associada

Para que uma "proximidade" possua uma densidade de probabilidade é necessário que $\hat{z}(u)$ satisfaça mais à seguinte condição:

A moda da composição de $\hat{z}_{\alpha\beta}(u) \otimes \hat{z}_{\beta\gamma}(u) \equiv \hat{z}_{\alpha\beta\gamma}(u)$ se verifique em $u_{\alpha\beta\gamma}^* = u_{\alpha\beta}^* + u_{\beta\gamma}^*$, isto é, as ordenadas das modas somam-se.

1) A probabilidade $P\{u: u_{\alpha\beta\gamma} < c \mid -\infty < c < +\infty\}$ é dada pela expressão:

$$\int_{-\infty}^c \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{z}_{\alpha\beta}(h-u) \hat{z}_{\beta\gamma}(u) du \right] \cdot dh \quad (1)$$

válida para $\forall (x_{\alpha}, x_{\beta}), (x_{\beta}, x_{\gamma}) \in \mathcal{X}$ com $u_{\alpha(\beta\gamma)} = u_{\alpha\beta} + u_{\beta\gamma}$

A convolução poderá calcular-se se for suscetível de se aplicarem as transformadas integrais (Laplace, Fourier).

Pelo operador:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \mathcal{L} [\hat{z}_{\alpha\beta}] \cdot \mathcal{L} [\hat{z}_{\beta\gamma}] \right\} = \hat{z}_{\alpha\beta\gamma}[u]$$

2) As condições da moda impoem que:

$$\max_h \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{z}_{\alpha\beta}(h-u) \cdot \hat{z}_{\beta\gamma}(u) du$$

se verifique $u_{\alpha\beta\gamma}^* = u_{\alpha\beta}^* + u_{\beta\gamma}^*$

e para tanto será:

a) necessário que:

$$\frac{d}{dh} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{z}_{\alpha\beta}(h-u) \cdot \hat{z}_{\beta\gamma}(u) du = 0$$

ou
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2 \hat{z}(h-u)}{dh^2} \cdot \hat{\delta}_{\alpha\beta}(u) du < 0$$
 em $u_{\alpha\beta}^* = h$

e suficiente que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2 \hat{z}(h-u)}{dh^2} \cdot \hat{\delta}_{\alpha\beta}(u) du < 0 \quad \text{em} \quad u_{\alpha\beta}^* = h$$

Satisfeitas as condições da moda atrás referidas, então diz-se que a proximidade $\hat{z}(u)$ foi probabilizado.

A sub-classe das proximidades $\hat{z}$, com estas propriedades dá-se-lhe o símbolo de $B_{\alpha\beta}$ e a classe de caracterisantes correspondentes simboliza-se por $\Pi_{\alpha\beta}$.

Nota importante 1 :

$$\hat{\delta}_{\alpha\beta}(u) = \hat{z}_{\alpha\beta}(u) \text{ não tem a relação simples de}$$

$$\hat{\delta}_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta} = \hat{z}_{\alpha\beta}$$

Esta propriedade, $\hat{z}_{\alpha\beta} - K_{\alpha\beta} = \hat{\delta}_{\alpha\beta}$ perde-se na operação de composição uma vez que o operador maxmin e a convolução sendo operadores próximos, não são iguais, em geral.

Nota 2

$$\text{Se } \hat{z}_{\alpha\beta}(u_{\alpha\beta}^*) = 1 \text{ e } \hat{z}_{\alpha\beta}(u) = 0$$

$$\forall u \neq u_{\alpha\beta}^*$$

a densidade de probabilidade $\hat{\delta}_{\alpha\beta}(u)$ toma a forma de uma distribuição de Dirack, onde

$$\hat{\delta}_{\alpha\beta}(u) = 0 \text{ se } u \neq u_{\alpha\beta}^*$$

$$\hat{\delta}_{\alpha\beta}(u_{\alpha\beta}^*) = \infty$$

sendo
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\delta}_{\alpha\beta}(u) du = 1, \text{ e } K_{\alpha\beta} \rightarrow \infty$$

IV) A classe das proximidades com distância e probabilidades associadas

Esta classe obtém-se da intersecção de B_d com B_p .

Assim, $B_{dp} = B_d \cap B_p$ e correspondentemente

$$T_{dp} = T_d \cap T_p.$$

O objecto dos capítulos I, II, III, e IV foi apresentar a classe B_{dp} de proximidades.

Referências especializadas do autor:

- 1) Conceito de Proximidade em Mecânica *
- 2) Aplicação de um Sistema de Proximidades a um sistema mecânico articulado *
- 3) Aplicação do conceito de Proximidade à Termodinâmica *
- 4) Proximity **
- 5) Introdução aos Conjuntos Vagos ***

* - 1º Congresso de Mecânica Teórica e Aplicada, 1974

** - 1.º Séminaire International "HBDS", 1979

*** - TÉCNICAS, nº 433 e 438.