1º. CONGRESSO NACIONAL DE MECANICA TEÓRICA APLICADA

"APLICAÇÃO DE UM SISTEMA DE PROXIMIDADES A UM SISTEMA MECANICO ARTICULADO"

António Gouvêa Portela
PROF. CAT. DO I.S.T.

"SISTEMAS ARTICULADOS COM FOLGA"

por

António Gouvêa Portela (1)

0 - INTRODUÇÃO

Para estabelecer ao longo da exposição um paralelo fácil com uma situação real e embora o formalismo seja apresentado com bastante generalidade, a situação física poderá figurar-se como um Sistema Articulado com m articulações (*nós*) as quais estão ligadas por barras mas havendo <u>folgas</u> nessas articulações.

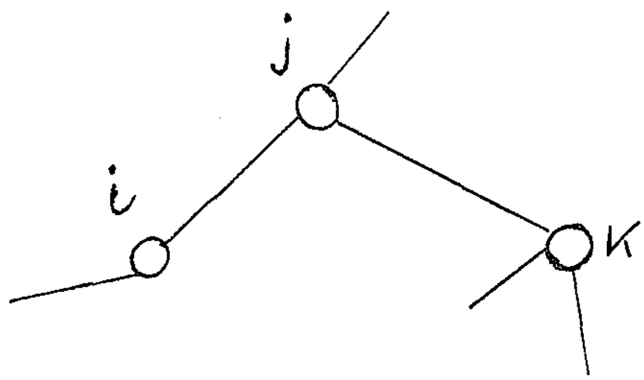

Fig: 1

Não é possível definir uma distancia entre (j,K), por exemplo, porque a ligação (barra) tem folgas e daí não ser funcional a correspondencia entre $(j\,K)$ e os reais (que é a primeira condição a satisfazer para definir uma distância).

Contudo verificam-se as condições para impor um <u>sistema de proximidades</u>.

---

(1) PROF. CAT. DO I.S.T.

I - Sistema de Proximidades imposto a um Sistema articulado com folgas.

1.1) Seja dado um conjunto $\mathcal{H}$ de m-multiplicidades.

(No caso da Fig: 1: trata-se de uma 2-multiplicidades).
Os elementos de $\mathcal{H}$ são, $(a, b, --i, j, K, ---p)$.

1.2) Forme-se o produto cartesiano $\mathcal{H}$ por $\mathcal{H}$ e defina-se nele um subconjunto $G \in \mathcal{H}^2$.

(No caso da Fig: 1: os elementos de G são as barras que ligam as articulações, $(a, b, --i, j, K, ---p)$.

1.3) Faça-se uma aplicação de G em $\mathcal{P}(\mathcal{R})$ simétrica e reflexiva, onde $\mathcal{P}(\mathcal{R})$ é o conjunto das partes dos Reais $\mathcal{R}$, e com as seguintes propriedades: $\forall i,j \begin{cases} \pi_{ij} \equiv d_{ij}[1-\varepsilon_{ij}, 1+\varepsilon_{ij}] & i \neq j \\ \pi_{ii} \equiv d_{ii}[0] & 0 - \text{Zero} \end{cases}$

onde: $d_{ij} \in \text{Real}^+$
$\varepsilon_{ij} \in \text{Real}^+$ e $\varepsilon_{ij} \in [0, 1[$

(No caso da Fig: 1, d_{ij} é a distancia usual dos olhais da barra que liga i com j e ε_{ij} é metade da folga conjunta dos dois olhais da referida barra).

ε_{ij} será, em geral muito pequeno em relação a d_{ij}.

Constituem dados do problema os valores d_{ij} e ε_{ij} do grafo G.

Fazendo

$$\begin{cases} d_{ij}(1-\varepsilon_{ij}) = l_{ij} \\ d_{ij}(1+\varepsilon_{ij}) = L_{ij} \end{cases} \text{com } L_{ij} \geq l_{ij}$$

Será, finalmente:

$$\pi_{ij} \equiv [l_{ij}, L_{ij}]$$

Aplicação a um exemplo muito Simples

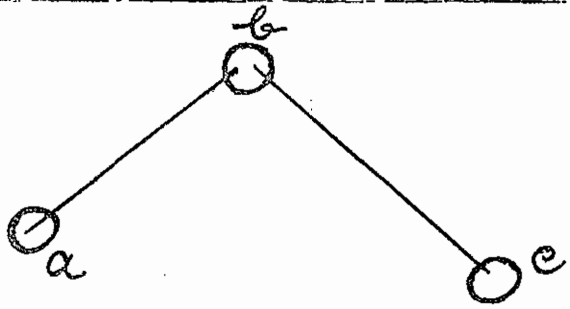

Fig: 2

$$\mathcal{H} = \{a, b, c\}$$

$G \in \mathcal{H}^2$ possui o elemento:

$$G \equiv \{(a,a)(a,b)(b,b)(b,c)(c,c)\} \quad (b,a),\ (c,b)$$

é simétrico e reflexivo.

$$G \in \mathcal{H}^2$$

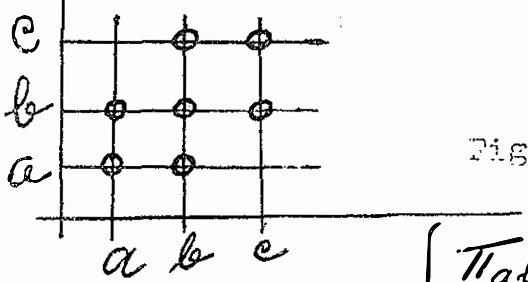

Fig: 3

Finalmente:

$$\Pi_{aa} \equiv \cancel{\ } \equiv \Pi_{bb} \equiv \Pi_{cc} = [0]$$

$$\begin{cases} \Pi_{ab} = \Pi_{ba} = [l_{ab}, L_{ab}] \\ \Pi_{bc} = \Pi_{cb} = [l_{bc}, L_{bc}] \end{cases} \quad \begin{cases} L \geq l \\ L \geq l \end{cases}$$

As coordenadas dos Pontos a, b, c num R^2 onde se situam estes três pontos são:

$$\begin{array}{lll} a - & x_a & y_a \\ b - & x_b & y_b \\ c - & x_c & y_c \end{array}$$

O Sistema de proximidades descrito acima estabelece o seguinte sistema de restrições:

$$(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 \geq l_{ab}^2$$
$$(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 \leq L_{ab}^2$$
$$(x_b - x_c)^2 + (y_b - y_c)^2 \geq l_{bc}^2$$
$$(x_b - x_c)^2 + (y_b - y_c)^2 \leq L_{bc}^2$$

ou

$$\begin{cases} x_a^2 + x_b^2 - 2x_a x_b + y_a^2 + y_b^2 - 2y_a y_b - Z_{ab} = l_{ab}^2 \\ x_a^2 + x_b^2 - 2x_a x_b + y_a^2 + y_b^2 - 2y_a y_b + z_{ab} = L_{ab}^2 \\ x_b^2 + x_c^2 - 2x_b x_c + y_b^2 + y_c^2 - 2y_b y_c - Z_{bc} = l_{bc}^2 \\ x_b^2 + x_c^2 - 2x_b x_c + y_b^2 + y_c^2 - 2y_b y_c + z_{bc} = L_{bc}^2 \end{cases}$$

Com Z_{ab}, z_{ab}, Z_{bc} e $z_{bc} \geq 0$

É sempre possível, sem perda de generalidade, escolher um referencial tal que:

$$x_a, x_b, x_c, y_a, y_b, \text{ e } y_c \geq 0$$

O Problema reduz-se a um, de Programação não linear, se for possível oferecer uma funcional $\varphi(x_a, x_b, x_c, y_a, y_b, y_c, Z_{ab}, z_{ab}, Z_{bc}, z_{bc})$ a extremar, por exemplo uma funcional de dinamica como a acção, uma função de Lyapunov, etc.

Se não for possível ou fácil definir φ então o problema consistirá, por exemplo, em verificar se x_a x_b x_c, y_a, y_b, y_c escolhidos ou dados satisfazem o sistema de equações para Z_{ab}, z_{ab}, Z_{bc} e $z_{bc} \geq 0$.

Um Subproblema consistirá em estudar as coordenadas de b sendo conhecidas as coordenadas de a e c.

Teremos então:

$$\begin{cases} x_b^2 - \underline{2x_a}\, x_b + y_b^2 - 2\underline{y_a}\, y_b = l_{ab}^2 + Z_{ab} - \underline{x_a^2} - y_a^2 = f_{ab} + Z_{ab} \\ x_b^2 - \underline{2x_a}\, x_b + y_b^2 - 2\underline{y_a}\, y_b = L_{ab}^2 - z_{ab} - \underline{x_a^2} - y_a^2 = F_{ab} - z_{ab} \\ x_b^2 - 2\underline{x_c}\, x_b + y_b^2 - \underline{2y_c}\, y_b = l_{bc}^2 + Z_{bc} - \underline{x_c^2} - \underline{y_c^2} = f_{bc} + Z_{bc} \\ x_b^2 - 2\underline{x_c}\, x_b + y_b^2 - \underline{2y_c}\, y_b = L_{bc}^2 - z_{bc} - \underline{x_c^2} - y_c^2 = F_{bc} - z_{bc} \end{cases}$$

O Sublinhado nas variáveis significa que estas foram feitas constantes.

Trata-se dum sistema de 4 equações a 6 incógnitas

$$(x_b, y_b, Z_{ab}, z_{ab}, Z_{bc}, z_{bc})$$

Das duas primeiras tira-se que:

$$f_{ab} + Z_{ab} = F_{ab} - z_{ab} \text{ ou } Z_{ab} = (F_{ab} - f_{ab}) - z_{ab}$$

e das duas segunda tira-se:

$$Z_{bc} = (F_{ab} - f_{ab}) - z_{bc}$$

Donde:

$$x_b^2 - 2\underline{x_a}\, x_b + y_b^2 - 2\underline{y_a}\, y_b = F_{ab} - z_{ab}$$
$$x_b^2 - 2\underline{x_c}\, x_b - y_b^2 - 2\underline{y_c}\, y_b = F_{bc} - z_{bc}$$

Sistema de 2 equações a 4 incógnitas, que define a região do plano onde b poderá estar situado.