

Dez 1979

Ref ①

19. CONGRESSO NACIONAL DE MECANICA TEÓRICA APLICADA

"CONCEITO DE PROXIMIDADE EM MECANICA"

António Gouvêa Portela
PROF. CAT. DO I.S.T.

"CONCEITO DE PROXIMIDADE EM MECANICA"

por

António Gouvêa Portela⁽¹⁾

0 - INTRODUÇÃO

A maioria das Mecanicas tratam sistemas mais susceptíveis de ser modeladas em espaços métricos.

No entanto há situações reais tais como, sistemas com folgas ou histeréticos, em termodinamica irreversível etc, onde o espaço formal de representação não pode ser metrisável ou nele definir-se uma distancia.

Foi esta circunstancia que conduziu à introdução do conceito de Proximidade.

Como se verá no Cap. VI a métrica e pseudo-métrica constituem casos particulares de proximidades.

I) Proximidades

Definição de Proximidade

Sejam dados:

- 1) Um conjunto X e designe-se por $a \in X$ um elemento genérico de X ($a \in X$).

(1) PROF. CAT. DO I.S.T.

Nota: - Esta Comunicação é a introdução teórica às Comunicações do autor sobre Aplicações de um Sistema de Proximidades à Termodinamica Macroscópica e a Sistemas Mecanicos Articulados.

Onde α é um índice que identifica o elemento αx , e α é um elemento dum conjunto de índices θ ; $\text{Card } \theta = \text{Card } \mathcal{K}$.

2) O produto cartesiano de $\mathcal{K}$ por si próprio: $\mathcal{K} \times \mathcal{K} \equiv \mathcal{K}^2$

3) Um conjunto $G \subseteq \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ a que daremos o nome de grafo G um elemento genérico de G será um par ordenado, simbolizado por: $(\alpha x, \beta x)$.

Com $(\alpha x, \beta x) \in G$

Onde: αx será o 1º. elemento do Par

βx " o 2º. elemento do Par

$\alpha \in \theta_1$

$\beta \in \theta_2$ e $\theta_1, \theta_2 \in \theta$

4) Um conjunto $\mathcal{G}$ cujos elementos representaremos por g_s

$(g_s \in \mathcal{G})$. e o índice $s \in \Phi$

Representaremos por π ou φ subconjuntos de $\mathcal{G}$. $\pi \subseteq \mathcal{G}$
 $\varphi \subseteq \mathcal{G}$

A letra φ será empregada apenas nos casos em que $\text{Card } \varphi = 1$

π e φ serão indicados, em geral, para melhor clareza de escrita, por exemplo: $\pi_{\alpha\beta}$ ou $\varphi_{\alpha\beta}$.

5) Finalmente estabeleça-se uma correspondência $\mathcal{R}$ entre os elementos de G e os elementos de $\mathcal{G}$, tal que para todo e qualquer par ordenado $(\alpha x, \beta x) \in G$ se indiquem os elementos $g_s \in \mathcal{G}$ que lhe estão em correspondência.

Designando por $\pi_{\alpha\beta}$ o conjunto de todos os elementos g_s correspondentes ao par $(\alpha x, \beta x)$, poderemos simbolizar essa correspondência da forma seguinte:

$$(\alpha x, \beta x) \xrightarrow{\mathcal{R}} \pi_{\alpha\beta}$$

com $(\alpha x, \beta x) \in G$ e $\pi_{\alpha\beta} \subseteq \mathcal{G}$

Diz-se então que se definiu um sistema de proximidades em $\mathcal{K}$

e ainda:

que β^x tem uma proximidade $\pi_{\alpha\beta}$ em relação a α^x

ou que:

β^x está $\pi_{\alpha\beta}$ -próximo de α^x

Uma forma equivalente de definir a correspondência $\mathcal{R}$, será efectuar uma aplicação de G em $\mathcal{P}(\mathcal{Q})$, onde $\mathcal{P}(\mathcal{Q})$ é um conjunto potente (ou das partes) de $\mathcal{Q}$.

Todas as propriedades do conceito de proximidade assentavam nas propriedades de:

$\mathcal{H}, G, \mathcal{R}, \mathcal{Q}$.

Alguns casos típicos serão estudados nos Capítulos seguintes.

II) Algumas propriedades das proximidades resultantes de G

II₁) Projecções de G

Define-se 1ª. Projecção de G ao conjunto A assim especificado:

$$A \equiv \left\{ \alpha^x : (\alpha^x \in \mathcal{H}) \wedge \left(\begin{array}{l} \alpha^x \text{ é o 1º elemento do par} \\ (\alpha^x, x) \end{array} \right) \wedge ((\alpha^x, x) \in G) \right\}$$

Define-se 2ª. Projecção de G ao conjunto B assim especificado:

$$B \equiv \left\{ \beta^x : (\beta^x \in \mathcal{H}) \wedge \left(\begin{array}{l} \beta^x \text{ é o 2º elemento do par} \\ (x, \beta^x) \end{array} \right) \wedge ((x, \beta^x) \in G) \right\}$$

$A, B, C \subseteq \mathcal{H}$, como é fácil de ver

As seguintes situações típicas serão estudadas:

a) $A \cap B \equiv \emptyset$ (Conjunto vazio)

Então para todo o par $(\alpha^x, \beta^x) \in G$ resultará que

$$(\beta^x, \alpha^x) \notin G.$$

$$b) A \cap B \equiv D \neq \emptyset$$

Neste caso é fácil de ver que:

$$\forall \left[\left(\begin{smallmatrix} x \\ \alpha \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} x \\ \beta \end{smallmatrix} \right) \in G \quad e \quad \beta^x \in D \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\exists \gamma \in \theta_2 \quad \text{seja} \quad \left(\begin{smallmatrix} x \\ \beta \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} x \\ \gamma \end{smallmatrix} \right) \in G \right]$$

Um caso particular será $B \subseteq A$.

c) Tem interesse referir a outras situações:

Diz-se que foi definido um:	
$B \subseteq A \rightarrow$	Sistema de proximidades em A
$\left. \begin{array}{l} B \subseteq A \\ A \equiv X \end{array} \right\} \rightarrow$	Sistema de proximidades em X
$A \equiv B \rightarrow$	Sistema de proximidades sobre A
$A \equiv B \equiv X \rightarrow$	Sistema de proximidades sobre X

II₂) Simetria de G

G diz-se simétrico se: $\forall \left(\begin{smallmatrix} x \\ \alpha \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} x \\ \beta \end{smallmatrix} \right) \in G \Rightarrow \left(\begin{smallmatrix} x \\ \beta \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} x \\ \alpha \end{smallmatrix} \right) \in G$.

Um sistema de proximidades cujo grafo seja simétrico diz-se um Sistema recíproco de proximidades ou G simétricas.
Se G for simétrico será:

1º. Projecção de G $\equiv$ 2º. Projecção de G

ou seja $A \equiv B \equiv D$.

Note-se contudo que a simetria de G não induz que $\pi_{\alpha, \beta} \equiv \pi_{\beta, \alpha}$

Não convém confundir proximidades G simétricas com proximidades simétricas que gozam da propriedade suplementar de ser

$$\pi_{\alpha, \beta} \equiv \pi_{\beta, \alpha}$$

II₃) Reflexividade

G diz-se Reflexivo se, para $\forall a^x \in 1^\circ \text{ Proj. de } G \equiv A$, for $(a^x, a^x) \in G$.

G diz-se totalmente reflexivo se além de Reflexivo se verificar ainda: $2^\circ \text{ Proj. de } G \subseteq 1^\circ \text{ Proj. de } G$

Esta propriedade, reflexividade, tem importancia decisiva numa outra propriedade, a transitividade indirecta, que será estudada no Capítulo II₄.

Proximidades que dispõem de um garfo reflexivo (ou totalmente reflexivo) dizem-se: G -Reflexivas.

Porque, obviamente, $\pi_{aa} \equiv \pi_{a,a}$, não há aqui que distinguir entre G reflexivas e reflexivas e portanto bastará referir a proximidades reflexivas (em vez de G reflexivas).

Finalmente, se G for simétrico e reflexiva as proximidades dizem-se reflexivas G simétricas e se $(\pi_{a,\sigma} \equiv \pi_{\sigma,a}), \forall a, \sigma$ dizem-se reflexivas simétricas

II₄) Transitividade

Transitividade é uma propriedade importante dos grafos G e pode tomar duas formas:

Transitividade directa

Transitividade indirecta

A) Transitividade Directa

A₁) Emparelhamento de arcos

Os arcos $g_{a,b}$ e $g_{b,\sigma}$ com $a \neq b \neq \sigma \neq a$, dizem-se emparelhados porque b^x é simultaneamente 1º. elemento de $g_{b,\sigma}$ e 2º. elemento de $g_{a,b}$.

Se $\alpha \neq \beta \neq \gamma$, mas não necessariamente $\alpha \neq \gamma$, os arcos dizem-se reflexivamente emparelhados; $\nu(\alpha^x \neq \gamma^x)$.

Anotam-se dois arcos emparelhados da forma seguinte: $\overset{\alpha}{\alpha\beta\gamma}$ onde β , índice central, corresponde ao elemento que efectua o emparelhamento.

Para simbolizar que dois arcos emparelhados pertence ao grafo G , escreve-se;

$$\overset{\alpha}{\alpha\beta\gamma} \in G$$

A₂) Arco d-transitivo

Diz-se que o arco $\overset{\alpha}{\alpha\beta\gamma} \in G$ é d-transitivo, se:

$\forall \beta^x \in [1^\circ \text{ Proj. de } G \text{ menos } \alpha^x \text{ e } \gamma^x]$
 $\text{for } \overset{\alpha}{\alpha\beta\gamma} \in G \text{ com } (\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha)$
 Veja-se a Fig: 1, onde o arco $\overset{2}{223}$ é d-transitivo em G

Note-se que $1^\circ \text{ Proj. } G \equiv \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$

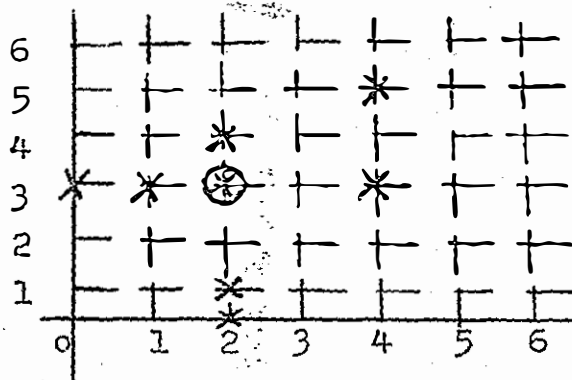


Fig: 1

A₃) α^x é d-transitivo

Diz-se que um elemento $\alpha^x \in 1^\circ \text{ Proj. de } G$ é d-transitivo, se, para $\forall \gamma^x \in [1^\circ \text{ Proj. } G \text{ menos } \alpha^x]$, $\overset{\alpha}{\alpha\beta\gamma}$ d-transitivo com $(\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha)$.

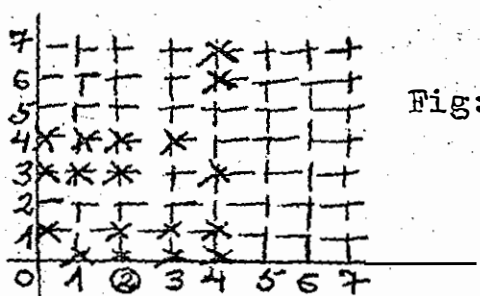


Fig: 2

Na Fig: 2, x é d-transitivo.
 Note-se que a $1^\circ \text{ Proj. } G \equiv \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$

A₄) Par de arcos emparelhados d -transitivo

Diz-se que $\alpha\beta\gamma$ é d -transitivo se $g\alpha\gamma \in G$.

A₅) Grafo G d -transitivo

Diz-se que o Grafo G é d -transitivo se, para $\forall x \in [1 \leq \text{Proj. } G]$ for αx d -transitivo, com $(\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha)$.

6	+	+	+	*
5	+	+	+	*
4*	*	*	*	+
3*	*	*	+	*
2*	*	+	*	*
1*	+	*	*	*
	x	x	x	x
0	1	2	3	4

Fig: 3

Na Fig: 3, o grafo G é d -transitivo

A₆) Conceito de $\mathcal{D}$ -transitividade

Se 1º. Proj. G 2º. Proj. de G então:

$g\alpha\beta$ d -transitivo diz-se $\mathcal{D}$ -transitivo

α^x d -transitivo diz-se $\mathcal{D}$ -transitivo

G d -transitivo diz-se $\mathcal{D}$ -transitivo

A₇) Conceitos de d^x -transitividade e $\mathcal{D}^x$ -transitividade

Estes conceitos são introduzidos levantando a restrição de $\alpha \neq \gamma^x$, na definição de arcos emparelhados.

Algumas situações curiosas se verificam, por exemplo:

Para que $\alpha\beta\alpha$ seja d^x -transitivo é necessário que $g\alpha\alpha \in G$

Um par de arcos emparelhados onde $\alpha^x \gamma^x$ diz-se reflexivamente emparelhado, como já se definiu em A₁.

B) Transitividade Indirecta (Veja-se nota final)

B₁) Um par de arcos emparelhados, $a_{\alpha\beta\gamma} \in G$, diz-se $\dot{\lambda}$ -transitivo, se também pertencer a G o arco $g_{\beta\beta}$, com $(\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha)$

B₂) Um elemento $\beta \in 1^\circ \text{Proj. } G$ diz-se $\dot{\lambda}$ -transitivo

Se:
$$\begin{cases} g_{\beta\beta} \in G \\ \forall \alpha \in 1^\circ \text{Proj. } G \text{ for } g_{\alpha\beta} \in G \\ \exists \gamma \text{ tal que } g_{\beta\gamma} \in G \quad (\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha) \end{cases}$$

B₃) Um arco $g_{\beta\gamma} \in G$ diz-se $\dot{\lambda}$ -transitivo

Se:
$$\begin{cases} g_{\beta\beta} \in G \\ \forall \alpha \in 1^\circ \text{Proj. } G \text{ for } g_{\alpha\beta} \in G \\ (\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha) \end{cases}$$

B₄) Um grafo diz-se $\dot{\lambda}$ -intransitivo se todos os elementos do 1º. Proj. de G forem $\dot{\lambda}$ -transitivos ou, o que é o mesmo, se todos os arcos cujos 1ºs. membros tomam (todos) os valores de 1º. Proj. G , forem $\dot{\lambda}$ -transitivos

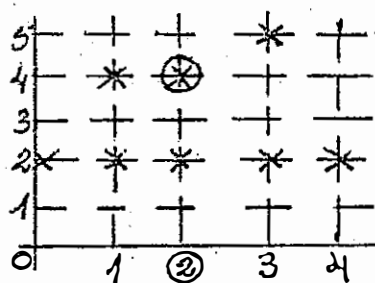


Fig: 4

Na Fig: 4, o arco (2,4) é

$\dot{\lambda}$ -transitivo e o elemento

2 é $\dot{\lambda}$ -transitivo.

Note-se que o arco

introduz a $\dot{\lambda}$ -intransitividade.

Finalmente são $\dot{\lambda}$ -transitivos os seguintes pares de arcos emparelhados:

a_{024} , a_{124} , a_{324} , e a_{424} e $\dot{\lambda}$ -transitivo

(Veja-se nota final)

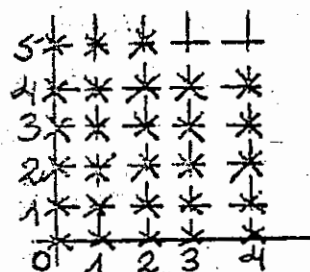


Fig: 5

Na Fig: 5 está representado

um grafo $\dot{\lambda}^*$ -transitivo.

B5) Grafos quase $\dot{i}$ -transitivos

Os grafos nestas condições satisfazem a condição mais fraca de só os arcos emparelhados do Grafo serem $\dot{i}$ -transitivos.

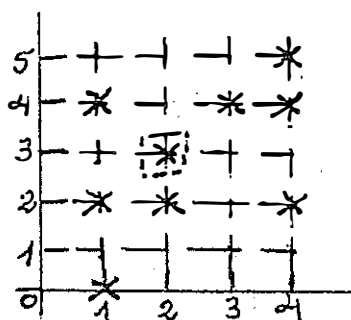


Fig: 6

Os arcos emparelhados na Fig:6 são:

1 2 3	sim	Note-se que 2,3 $\notin$ G inicialmente
1 4 2	sim	
2 3 4	não	
3 4 2	sim	
4 2 3	sim	

Acrescentando ao grafo inicial o ponto (2,3) o grafo torna-se quase $\dot{i}$ -transitivo.

III) Propriedades resultantes de $\mathcal{H}$

Muitos tipos de conjuntos podem ser usados, uma vez que o conceito de proximidade não estabelece qualquer restrição quanto à natureza do conjunto $\mathcal{H}$.

Há várias formas de apreciar $\mathcal{H}$, vamos rapidamente fazer referencia às seguintes:

1) Quanto ao $\text{Card}(\mathcal{H})$

$$\text{Card}(\mathcal{H}) = n \quad n \geq 1 \quad (\text{para que } \mathcal{H} \text{ não seja vazio})$$

$$\text{Card}(\mathcal{H}) = \text{Card}(\text{Interiores})$$

$$\text{Card}(\mathcal{H}) = \text{Card}(\text{Perif.})$$

2) Quanto à estruturação algébrica:

$\mathcal{H}$ não tem qualquer estrutura

$\mathcal{H}$ tem uma estrutura (grupo, grupoide, anel, corpo, módulo, espaço vetorial, rede etc).

3) Quanto a relações impostas a $\mathcal{H}$

Nota final

A definição de arcos reflexivamente emparelhados, levanta a restrição $\alpha\chi = \gamma\chi$ e permite definir a $\dot{i}$ -transitividade, aliás mais corrente que a $\dot{i}$ -transitividade.

$\mathcal{X}$ não tem qualquer relação imposta

$\mathcal{X}$ tem uma relação imposta

(por exemplo, de ordem, ~~pre~~ ordem etc)

4) Quanto à topologia de $\mathcal{X}$

$\mathcal{X}$ não tem qualquer topologia imposta

$\mathcal{X}$ tem uma topologia imposta

5) Quanto aos elementos de $\mathcal{X}$

$\mathcal{X}$ tem elementos holónicos

$\mathcal{X}$ tem elementos não holónicos

As proximidades impostas a $\mathcal{X}$ podem servir para ordenar os elementos a $\mathcal{X}$ e pode esta ordem ser incompatível com as relações de ordem referidas em 3).

Também os sistemas de proximidades podem impor topologias e estruturas algébricas que terão de ser compatibilizadas com as ~~pre~~existentes em $\mathcal{X}$ (Veja-se 2) e 4).

Esta matéria, bem como a composição de Relações, será tratada noutra ocasião em pormenor, e para já só abordaremos alguns temas mais típicos.

III₁) O conjunto $\mathcal{X}$ é ordenado

Vamos estudar o caso particular de $\mathcal{X}$ ser totalmente ordenado pela relação de ordem $\alpha^x < \beta^x$ (ou $\alpha^x \leq \beta^x$)

Dois casos particulares também serão estudados:

$$\forall (\alpha^x, \beta^x) \in G \text{ seja:}$$
$$a) \alpha^x \geq \beta^x \text{ (ou } \alpha^x > \beta^x)$$
$$b) \beta^x \geq \alpha^x \text{ (ou } \beta^x > \alpha^x)$$

Um sistema de proximidades onde G satisfaz à condição a) diz-se um sistema esquerdo de proximidades identicamente, satisfazendo G à condição b) diz-se sistema direito de proximidades.

Note-se que a relação de ordem notada por ($>$) impede que o sistema de proximidades goze da transitividade indirecta.

III₂) Os elementos $\mathcal{K}$ não são holónicos

Sejam dados conjuntos X_φ com $\varphi \in \phi$ e ϕ um conjunto finito ou numerável.

Forme-se o produto cartesiano. $\prod_{\varphi} X_\varphi$
e faça-se $\mathcal{K} \equiv \prod_{\varphi} X_\varphi$

Um elemento genérico de $\mathcal{K}$ será notado da seguinte forma:
 $\alpha x \equiv (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_k)$
e vamos designar por multiplicidade esse elemento genérico.

Sobre $\mathcal{K}$ estabeleça-se um sistema de proximidades, isto é:

$$1) \mathcal{K} \overline{X} \mathcal{K} \equiv \left[\left(\prod_{\varphi} X_\varphi \right) \overline{X} \left(\prod_{\varphi} X_\varphi \right) \right]$$

$$2) G \subseteq \mathcal{K} \overline{X} \mathcal{K}$$

3) Seja dado um conjunto ϕ

4) Define-se uma correspondência $\mathcal{A}$ de G para ϕ

III₃) O conjunto $\mathcal{K}$ foi estruturado por uma operação interna notada por ① que admitimos fechada.

$$\forall \alpha, \beta \quad \alpha^x, \beta^x \in \mathcal{K} \Rightarrow \alpha^x \circ \beta^x = \gamma^x \in \mathcal{K}$$

Suponhamos que $\mathcal{K}$ foi imposto um sistema de proximidades.

Se for conveniente que, sendo $(\alpha^x, \delta^x), (\beta^x, \gamma^x) \in G$,

seja também $\{(\alpha^x \circ \beta^x), (\delta^x \circ \gamma^x)\} \in G$, para compatibilizar a operação interna ① e o sistema de proximidades, obtem-se grafos com formas curiosas como se mostra na Fig: 7.

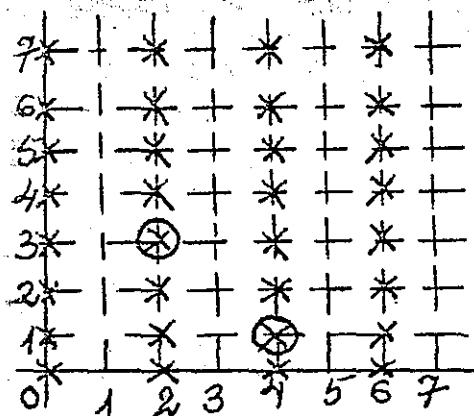


Fig: 7

Seja:

$$\mathcal{K} \equiv \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$\begin{cases} a^x \oplus b^x = \text{mod}(a^x + b^x) \\ (2^x, 3^x) \text{ e } (4^x, 1^x) \in G \end{cases}$$

mas para compatibilizar o

sistema de proximidades e a operação interna impostos, é necessário que o grafo G contenha ainda os seguintes arcos:

$$(6^x, 4^x), (2, 1), (4, 5), (4, 4) \text{ etc, etc.}$$

donde resulta a forma da Fig: 7 para G onde $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \oplus)$ constitui um grupo aditivo e $(0, 2, 4, 6, \oplus)$ um subgrupo aditivo.

Este exemplo, procura apenas mostrar a necessidade de certas compatibilizações para tirar todo o partido da estrutura eventual de $\mathcal{K}$.

III₄) Propriedades Herdadas

Procura-se apenas recordar que as propriedades estruturais e topológicas, tomadas no sentido lato, que forem impostas a $\mathcal{K}$ não são herdadas necessariamente pelo produto cartesiano $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$.

Porém o inverso não é verdadeiro, assim as estruturas impostas por um sistema de proximidades pode estruturar $\mathcal{K}$.

Haveria aqui recordar mais uma vez a necessidade de compatibilizar estruturas.

IV) Propriedades Resultantes de $\mathcal{A}$

Trataremos apenas algumas propriedades mais relevantes, com o objectivo de ilustrar a potencialidade do conceito de proximidade.

IV₁) Funcionalidade de $\mathcal{A}$

a) $\mathcal{A}$ é funcional

Diremos que $\mathcal{A}$ é funcional quando a cada par $(\vec{a}, \vec{b}) \in \mathcal{G}$ corresponder um só elemento $q_{\vec{a}, \vec{b}} \in \mathcal{Q}$

isto é: $\forall_{\vec{a}, \vec{b}} \text{Card}(\pi_{\vec{a}, \vec{b}}) = 1$ com $\begin{cases} \vec{a} \in \theta_1 \\ \vec{b} \in \theta_2 \end{cases}$

Para proximidades com esta propriedade o símbolo $\pi_{\vec{a}, \vec{b}}$ se será substituído por $\phi_{\vec{a}, \vec{b}}$

Diz-se que " $\vec{b}^x$ está $\phi_{\vec{a}, \vec{b}}$ próximo de $\vec{a}^x$ "

b) $\mathcal{A}$ não funcional, mas $\pi_{\vec{a}, \vec{b}}$ é probabilisável

O conjunto $\mathcal{G}$ onde $\mathcal{A}$ tem os seus valores não será, em geral, probabilisável, porém os conjuntos do tipo $\pi_{\vec{a}, \vec{b}} \in \mathcal{G}$ podem ser probabilisados, se a natureza do espaço Físico o consentir.

Seja então dado um qualquer $\pi_{\vec{a}, \vec{b}} \in \mathcal{G}$, defina-se sobre $\pi_{\vec{a}, \vec{b}}$ uma medida normada (Norma = 1), então é possível associar uma distribuição de probabilidades ao conjunto $\pi_{\vec{a}, \vec{b}}$.

Designemos por $\phi_{\vec{a}, \vec{b}}$ a distribuição associada a $\pi_{\vec{a}, \vec{b}}$ e daí ao par $(\vec{a}^x, \vec{b}^x) \in \mathcal{G}$.

Trata-se no fundo da composição de $\mu_{\mathcal{A}} = \phi_{\vec{a}, \vec{b}}$; assim a cada par $(\vec{a}^x, \vec{b}^x) \in \mathcal{G}$ fica associada a distribuição $\phi_{\vec{a}, \vec{b}}$ que se torna um Sistema de proximidades probabilisadas.

O interesse desta solução está no maior conteúdo de informação de $\phi_{\vec{a}, \vec{b}}$ relativamente a $\pi_{\vec{a}, \vec{b}}$ e quando tal for possível (semanticamente possível) $\pi_{\vec{a}, \vec{b}}$ deverá ser probabilisado.

Caberia aqui extrair e deduzir as propriedades que a probabilidade de $\pi_{\vec{a}, \vec{b}}$ contém, limitaremos porém a um simples

exemplo:

$$\pi_{\vec{a}, \vec{b}} \equiv \{q_1, q_2, q_3\} \subset \mathcal{Q}$$

$$\left. \begin{array}{l} 10 = q_1 \rightarrow \mu_1 = 0,1 \\ 5 = q_2 \rightarrow \mu_2 = 0,7 \\ 2 = q_3 \rightarrow \mu_3 = 0,2 \end{array} \right\} (\vec{a}^x, \vec{b}^x)$$

β^x está 5 unidades próximo de α^x com uma probabilidade de 0,7
 10 unidades próximo de α^x com uma probabilidade de 0,1
 2 unidades próximo de α^x com uma probabilidade de 0,2
 Como é fácil de ver esta "informação" é maior do que saber que a proximidade de β^x em relação a α^x é 10 ou 5 ou 2.

c) A não funcional, mas $\pi_{\alpha\beta}$ pode ser considerado um conjunto Vago do referencial.

$\mathcal{G}$ pode ser considerado como um referencial onde se definem conjuntos Vagos (*)

Seja então $\mathcal{G}$ um referencial e $M=[0,1]$ o conjunto de "índice membro". (*) (*)

Um subconjunto vago P será definido no referencial $\mathcal{G}$, fazendo corresponder a cada elemento $\mu \in P$ um elemento $\psi \in M$.

ψ é pois uma função cujo domínio é $\mathcal{G}$ e contradomínio é $M \equiv [0,1]$.

Não cabe aqui desenvolver a teoria dos conjuntos Vagos, bastará chamar a atenção que as operações são distintas das aplicáveis a distribuições (probabilidades) e toda a semelhança se resume a que o contradomínio é, em ambos os casos, o intervalo $[0,1]$.

Um exemplo será dado para ilustrar uma aplicação simples:

Seja $\pi_{\alpha\beta} \equiv \{5, 7, 14\}$ correspondente a (α^x, β^x)

$\pi_{\beta\gamma} \equiv \{3, 2, 0\}$ correspondente a (β^x, γ^x)

Se $\pi_{\alpha\beta}$ e $\pi_{\beta\gamma}$ forem subconjuntos vagos de $\mathcal{G}$, então será,

- (*) Conjunto Vago será a tradução da expressão "Fuzzy Set" dos autores anglo-saxões ou "Soixas - ensembles flous" dos autores francófonos.
- (*) (*) "Índice de membro" corresponde respectivamente aos vocábulos "membreship" e "appartenance".

por exemplo: $\tilde{\pi}_{\alpha\beta} \equiv \sim \{5/0,1, 7/0,4, 14/0,9\}$

$$e \tilde{\pi}_{\beta\gamma} \equiv \sim \{3/1,0, 2/0,43, 14/0\}$$

onde 0,1, 0,4, 0,9 representam os elementos do intervalo

$[0,1]$ correspondentes a 5, 7, 14 de $\tilde{\pi}_{\alpha\beta}$.

e 1,0, 0,43, 0, representam os elementos do intervalo

$[0,1]$ correspondentes a 3, 2, 14, de $\tilde{\pi}_{\beta\gamma}$

Estes conjuntos Vagos podem ser reunidos, interseptados etc.

Por exemplo: $\tilde{\pi}_{\alpha\beta} \cup \tilde{\pi}_{\beta\gamma} \equiv \sim \{5/10, 2/0,43, 7/0,4, 14/0,9\}$

$$e \tilde{\pi}_{\alpha\beta} \cap \tilde{\pi}_{\beta\gamma} \equiv \sim \{5/0,1, 2/0, 7/0, 14/0\}$$

todos os elementos de $\mathcal{Q}$ não referidos admite-se que correspondam a $\frac{\varphi}{\tau} = 0$.

Assim, poderia escrever-se:

$$\tilde{\pi}_{\alpha\beta} \cap \tilde{\pi}_{\beta\gamma} \equiv \sim \{5/0,1\}$$

Os conjuntos Vagos tem uma natural aplicação nos sistemas de proximidades onde tais conjuntos podem ser definidos.

IV₂) Propriedades de $\mathcal{R}$

A relação $\mathcal{R}$ terá, ou poderá ter, todas as propriedades relativas a relações.

Seria fastidioso reproduzir aqui essas propriedades, por isso nos limitaremos a tratar de algumas.

a) Simetria

Diz-se que $\mathcal{R}$ é simétrico se for $\forall \pi \equiv \pi$, o que impõe ser G-simétrico.

Então as proximidades dizem-se simétricas.

b) Simétrico e funcional

então será

$$\forall \frac{\varphi}{\tau} \frac{\varphi}{\tau} \equiv \frac{\varphi}{\tau} \frac{\varphi}{\tau}$$

c) Anti-Simetria

$$\pi_{\alpha\beta} = -\pi_{\beta\alpha} \text{ e } \pi_{\alpha\alpha} = 0$$

d) Simétrico e reflexivo

Então o sistema de proximidades é transitivo indireto.

e) Simétrico reflexivo e funcional

Os sistemas de proximidades serão também transitivos in directas e funcionais.

f) Função (injectiva, subjectiva etc)

Todas estas relações vão dar correspondentes propriedades aos sistemas de proximidades.

Assim por exemplo, se $\mathcal{A}$ for uma função injectiva, terá a propriedade de transitividade directa e indirecta se contradomínio de $\mathcal{A} \equiv X \bar{X} X$

Todas estas propriedades são óbvias e sua demonstração é imediata.

V) Natureza do Conjunto $\mathcal{G}$

Tal como para X podiam ser examinados vários tipos de conjuntos e respectivas estruturas vamos limitarmo-nos ao estudo de alguns casos típicos.

V₁) Define-se em $\mathcal{G}$ uma relação de Ordem

A não existencia de uma relação de ordem em $\mathcal{G}$, só confere aos sistemas de proximidades a faculdade de classificação dos pares $(\alpha^x, \beta^x) \in G$.

Por exemplo:

$$\mathcal{G} \equiv \{a \text{ (perigoso)}, b \text{ (pouco perigo)}, c \text{ (sem perigo)}\}$$

$$(\alpha^x, \beta^x) \in \mathcal{A} \rightarrow \pi_{\alpha\beta} \equiv \{a, b\}$$

o que pode ter a seguinte interpretação semântica
 β^x (é perigosa ou pouco perigosa) próximo de α^x .

$$(\alpha^x, \gamma^x) \xrightarrow{R} \pi_{\alpha\gamma} \equiv \{c\}$$

γ^x (é sem perigo) próximo de α^x

No entanto a imposição de uma relação de ordem, trás nova dimensão ao conceito de proximidade.

Suponhamos que $\mathcal{G}$ é ordenado como o são os números inteiros, por exemplo.

Apreciemos as proximidades tempo, em minutos, que leva a percorrer um certo trajecto que liga dois pontos (elemento) de $\mathcal{X}$.

Assim, $(\alpha^x, \beta^x) \rightarrow \pi_{\alpha\beta} = [4, 6]$

Significa que se alcança β^x a partir de α^x em 4 a 6 minutos.

e se $(\alpha^x, \alpha^x) \rightarrow \pi_{\alpha\beta} = [5, 8]$

Não poderá concluir-se α^x demorará sempre mais tempo a atingir do que β^x partindo, em ambos os casos de α^x .

Uma relação de ordem pode ser de vital importancia no estabelecimento de sistemas de proximidades.

V₂) Em $\mathcal{Q}$ foi definida uma Lei de composição interna (1)

Seja τ o símbolo da Lei de comparação interna definida em $\mathcal{G}$ (τ é fechado).

O sistema de proximidades terá de ser definido em termos de ser compatível com a Lei interna τ .

(1) Lei de composição interna entende-se como uma aplicação de $\mathcal{G}^2$ em $\mathcal{G}$

Por exemplo:

Se $\mathcal{A}$ for uma função simétrica e I -transitiva então:

$$\varphi_{aB} + \varphi_{B\beta} + \varphi_{\beta\gamma} = \varphi_{Ba} + \varphi_{B\beta} + \varphi_{\beta\gamma}$$

Se T tiver a natureza de uma adição, então φ poderá simbolizar-se $\varphi_{a\beta}$

$$\text{é fácil de ver } \varphi_{a\beta} = \varphi_{\beta a}$$

A proximidade definida e a operação interna T estão compatibilizadas.

Exemplos semelhantes poderiam ser oferecidos se $\pi_{a\beta}$ for probabilizado ou constituir um conjunto vago podem igualmente estabelecer leis de composição interna adequadas.

V₃) Em $\mathcal{G}$ foram definidas duas leis de composição interna T_1, T_2

Estas leis de composição interna podem conferir a $\mathcal{G}$ as propriedades de um anel ou Corpo e os mais usuais são o anel do interior e o Corpo dos Reais.

Convém dar um exemplo da utilidade da operação multiplicativa.

Exemplo:

Definição de pares equiproximos.

Seja φ um sistema de proximidades definido sobre $\mathcal{X}$, onde φ é uma função injectiva e $\mathcal{G}$ é reflexivo.

Seja r um real e $\varphi_{a\beta}$ uma proximidade dada.

Procurem-se todos os pares (a, x) tais que $\varphi_{ax} = r \times \varphi_{a\beta}$ o conjunto dos x estão equiproximos de a e todos tem proximidade que é r vezes a proximidade $\varphi(a, \beta)$.

Tem interesse ainda justificar o sentido que pode ser dado a uma proximidade negativa.

Por exemplo, um transporte eléctrico desce uma colina trvando com os motores funcionando como geradores de energia.

Se o sistema de proximidades estiver associado ao consumo ou produção de energia, então será razoável que se associem os números negativos, por exemplo, à produção de energia e os números positivos ao consumo de energia.

Assim

$\varphi_{AB} \leq 0$ se o veículo descer

$\varphi_{BA} \geq 0$ se o veículo subir

V₄) $\mathcal{Q}$ é multidimensional

Se o conceito de proximidade implicar o conhecer de várias grandezas pode fazer-se $\mathcal{Q}$ um espaço multidimensional, por exemplo, um espaço vectorial, se for o caso disso, isto é, se a situação real assim autorizar, uma estrutura.

O espaço complexo, poderá eventualmente ser usado.

Exemplo.

Proximidade de β^x em relação a α^x depende do conhecimento de:

- Tempo que medeia
- Km a percorrer
- Combustível a consumir

Então justifica-se que $\mathcal{Q}$ seja um produto cartesiano de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Mas neste espaço real a natureza física do problema não permite definir qualquer métrica.

Daí que no espaço formal correspondente não se possa definir qualquer métrica.

VI) Distancia

VI₁) Métricas e Pseudo-métricas

Tem interesse mostrar como a partir do conceito de proximidade se pode passar para o de métrica e pseudo-métrica.

Seja dado sobre um conjunto um Sistema de proximidades do tipo função simétrica e reflexiva tomando valores no conjunto dos Reais $+$.

Impondo uma regra triangular definida como segue:

$$\forall_{\alpha, \beta, \gamma} \varphi_{\alpha\beta} + \varphi_{\beta\gamma} \geq \varphi_{\alpha\gamma}$$

Ficou definida uma distancia ou pseudo-métrica.

Se acrescentarmos ainda mais as seguintes duas restrições, ficará definida uma métrica:

$$\begin{cases} \forall_{\alpha, \beta} [\varphi_{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow (\alpha^x = \beta^x)] \\ \forall_{\alpha, \beta} [(\alpha^x = \beta^x) \Rightarrow (\varphi_{\alpha\beta} = 0)] \end{cases}$$

VI₂) Distancia entre conjuntos π de proximidades

Quando a proximidade entre α^x, β^x , genéricos, é dada por um conjunto $\pi_{\alpha\beta}$, pode definir-se distancias entre dois conjuntos $\pi_{\alpha\beta}, \pi_{\gamma\delta}$, o que permite estabelecer uma conexão entre os pares (α^x, β^x) e (γ^x, δ^x) .

Por exemplo, aplique-se uma distancia de Hamming, a $\pi_{\alpha\beta}$,

$\pi_{\gamma\delta} \in \mathcal{Q}$, com $\text{Card } \mathcal{Q}$ finito.

Se $\mu_{\alpha\beta}$ for a função característica de $\pi_{\alpha\beta}$

$\mu_{\gamma\delta}$ " " " " $\pi_{\gamma\delta}$

A distancia de Hamming define-se pela expressão:

$$d(\pi_{\alpha\beta}, \pi_{\gamma\delta}) = \sum_{i=1}^n |\mu_{\alpha\beta} - \mu_{\gamma\delta}|$$

É fácil de aplicar este conceito se $\pi_{\alpha\beta}$ e $\pi_{\gamma\delta}$ forem conjuntos vagos cujas funções características são respectivamente

te $\mu_{\alpha\beta}$ e $\mu_{\gamma\delta}$

A distancia de Hamming será dada por:

$$d_n(\pi_{aB}, \pi_{a\gamma}) = \sum_{i=1}^n |m_{aB}^i - m_{a\gamma}^i|$$

Uma distancia quadrática ou Euclideana será dada por:

$$e_n(\pi_{aB}, \pi_{a\gamma}) = + \sqrt{\sum_{i=1}^n (m_{aB}^i - m_{a\gamma}^i)^2}$$

Uma distancia num referencial não finito (por exemplo $\mathbb{Q}$ real).

Será dada (no caso da distancia de Hamming) por:

$$d(\pi_{aB}, \pi_{a\gamma}) = \int_{-\infty}^{+\infty} |m_{aB} - m_{a\gamma}| dx$$

VI₃) Utilidade do conceito definido

em VI₂).

Fixemos a^z e estudemos as proximidades de B^z e γ^z em relação a a^z e sejam dadas por π_{aB} e $\pi_{a\gamma}$ (conjuntos normais de vagos).

B^z e γ^z serão equi-próximos a a^z se, por exemplo, $d(\pi_{aB}, \pi_{a\gamma}) = 0$

Esta forma de equiproximidade designa-se por d-equiproximidade, se tivéssemos empregado uma distancia euclideana, dir-se-ia e-equipróximos.

É fácil de ver que em geral.

São distâncias e diferentes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{equiproximidade } (\pi_{aB} = \pi_{a\gamma}) \\ d\text{-equiproximidade } d(\pi_{aB}, \pi_{a\gamma}) = 0 \\ e\text{-equiproximidade } e(\pi_{aB}, \pi_{a\gamma}) = 0 \end{array} \right.$$

VII) Proximidades em Multiplicidades

No Capítulo III já foi introduzido a extensão do conceito de

proximidades no caso de $\mathcal{H} \equiv \prod_{\varphi \in \Phi} X_{\varphi}$

Convém agora introduzir mais algumas definições:

VII₁) Conceito de submultiplicidade

Seja dado um elemento genérico a^x

de $\mathcal{H}$: $a^x \equiv (a^{x_1}, a^{x_2}, \dots, a^{x_n}, \dots) \equiv (a^{x_j}) \in \mathcal{H}$
 com $\begin{cases} j \in \Phi. \text{ conjunto completo e estritamente} \\ \text{ordenado, finito ou numerável.} \\ a^{x_j} \in X_j \end{cases}$

Seja $\mathcal{N} \subset \Phi$ (propriamente contido) os elementos de $\mathcal{N}$ man-
 tem a ordem imposta a Φ .

Uma submultiplicidade será um elemento do produto $\prod_{\varphi \in \mathcal{N}} X_{\varphi}$

VII₂) Corte

Seja dado $\mathcal{N} \subset \Phi$ e escolhamos uma certa submultiplicidade
 dada $(a^{a_j}) \in \prod_{j \in \mathcal{N}} X_j$

Isolemos todas as multiplicidades satisfazendo as seguin-
 tes condições: $\begin{cases} (b^{x_k}) \in \prod_{k \in \Phi} X_k \\ k = j \in \mathcal{N} \\ b^{x_k} = a^{a_k} \end{cases}$

Diz-se que o conjunto assim obtido é o Corte em $\prod_{k \in \Phi} X_k$
 por (a^{a_j}) .

O corte será simbolizado por $\mathcal{H}_{\mathcal{N}}$ onde $\mathcal{N}$ representa o subcon-
 junto de Φ escolhido.

A partir de $\mathcal{H}_{\mathcal{N}}$ poderá formar-se o produto cartesiano $\times \prod_{\mathcal{N}} \mathcal{H}_{\mathcal{N}}$

Nota: Se: $\text{Card } \Phi = N$ (finito), existirão
 $\begin{matrix} (N-1) \\ \vdots \\ N-N \end{matrix}$ produtos cartesianos distintos se cada $\mathcal{N} = N-1$
 " " " " se cada $\mathcal{N} = N-K$
 (com $K \leq N$)

e designaremos por $\underset{\mathcal{N}}{G}$ o grafo cortado resultante de G ,
restrito a $\underset{\mathcal{N}}{\mathcal{K}}$.

Pode prosseguir-se e definir, a partir de $\mathcal{A}$, um $\mathcal{A}$ que
constituirá assim um sistema de proximidades cortado por
 $\mathcal{N}$.

VII₃) Projecção

Seja de novo dado uma Submultiplicidade $(a^a_j) \in \prod_{j \in \mathcal{N}} \mathcal{X}_j$ e
 $\mathcal{N} \subset \mathcal{Q}$.

Admitamos que foi definido um sistema de proximidades em
 $\mathcal{K} \equiv \prod_{k \in \mathcal{Q}} \mathcal{X}_k$, sendo G o grafo e $\mathcal{A}$ a correspondencia que to-
ma valores em $\mathcal{Q}$.

Então forme-se a união seguinte:

$$\mathcal{P}_2 \equiv \bigcup_{a, b} \pi_{a, b} \text{ tal que:}$$

$$\begin{cases} a) (a^x, b^x) \in G \\ b) a^x_j = a^a_j \text{ se } j \in \mathcal{N} \\ c) a^x_k, \text{ se } k \notin \mathcal{N}, \text{ tomara todos os valores} \\ \text{compatíveis com a)} \end{cases}$$

A este conjunto $\mathcal{P}_2$ dá-se o nome de proximidade externa pro-
jectada.

Dum modo análogo se pode definir:

$$\mathcal{P}_i \equiv \bigcap_{a, b} \pi_{a, b} \text{ sujeito às mesmas} \\ \text{restrições.}$$

Dá-se o nome de proximidade interna projectada.

VIII) Proximidades entre dois conjuntos

Seja dado um conjunto referencial $\mathcal{K}$ e digamos um Sistema
de Proximidades, isto é, um $G, \mathcal{A}$ e $\mathcal{Q}$.

Sejam $\mathcal{N}$ e $\mathcal{P}$ G $\mathcal{K}$

VIII₁) Defin~~2~~-se Proximidade externa de $\mathcal{P}$ em relação a $\mathcal{N}$ pelo conjunto π_e :

$$\pi_e \equiv \bigcup_{\alpha, \beta} \pi_{\alpha, \beta} \text{ tal que } \begin{cases} \alpha^x, \beta^x \in G \\ \beta^x \in \mathcal{P} \\ \alpha^x \in \mathcal{M} \end{cases}$$

VIII₂) e Proximidade interna de $\mathcal{P}$ em relação a $\mathcal{M}$ pelo conjunto π_i :

$$\pi_i \equiv \bigcap_{\alpha, \beta} \pi_{\alpha, \beta} \text{ nas condições acima citadas.}$$

VIII₃) Defin~~3~~-se $\mathcal{M}$ -proximidades de $\mathcal{P}$ em relação a $\mathcal{N}$, quando $\mathcal{G}$ é um conjunto completo e estritamente ordenado e π funcional; sendo o maior elemento $z \in \pi_e$; ao conjunto $\{z\}$.

VIII₄) e $\mathcal{M}$ -proximidade de $\mathcal{P}$ em relação a $\mathcal{N}$, nas mesmas condições quanto a $\mathcal{G}$ e π funcional, sendo o menor elemento $z \in \pi_e$; ao conjunto $\{z\}$.

VIII₅) No caso particular de $\mathcal{N} \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$

Poderá acontecer que existam pares $(\alpha^x, \beta^x) \in G$ tais que:

$$\alpha^x = \beta^x \\ \text{com } \alpha^x \in \mathcal{N} \text{ e } \beta^x \in \mathcal{P}$$

Então dizem-se que os conjuntos $\mathcal{N}$ e $\mathcal{P}$ se intersectam segundo o sistema de proximidades π ou se π -intersectam.

É óbvio que se os conjuntos se π -intersectam não são disjuntos, mas o inverso pode não ser verdade.

VIII₆) Conjuntos $\mathcal{L}$ -Conicionados

Se, $\mathcal{L} \cap \mathcal{P}, \mathcal{N} \cap \mathcal{L} \neq \emptyset$, podem definir-se Proximidades externas, internas, $\mathcal{M}$ -proximas, $\mathcal{M}$ -proximas, e π -intersecções con

Nota: Se π não for funcional só poderão definir-se as proximidades externas e ou internas.

dicionadas a L , desde que se acrescente mais a seguinte condição.

$$\alpha, \beta \in L$$

VIII₇) Se $\forall \alpha, \beta \pi_{\alpha\beta}$ for probabilisado é possível, se a distribuição tiver 1º. momento, definir $\bar{\pi}_{\alpha\beta}$ valor central de $\pi_{\alpha\beta}$. e definir, seguindo o método indicado em VIII 3 e 4, M -proximidades e m -proximidades, usando os $\bar{\pi}_{\alpha\beta}$ em vez dos elementos de $\pi_{\alpha\beta}$.

VIII₈) Se todos os $\pi_{\alpha\beta}$ forem Conjuntos - Vagos é possível usar as respectivas funções características $M_{\alpha\beta}$ para definir M -proximidades e m -proximidades.

VIII₉) Conjuntos Condicionados a uma Classe de Conjuntos $\{L^i\}$ onde $\forall (L^i \cap L^j, L^i \cap L^k) \neq \emptyset$
Então a cada membro de L^i da classe $\{L^i\}$ corresponderá uma restrição do sistema de proximidades.
Tem particular interesse o caso onde cada membro L^i corresponde um só elemento de $\mathcal{G}$.
(Veja-se exemplos b e c) do Capítulo IX₆)).

1º. Aplicação

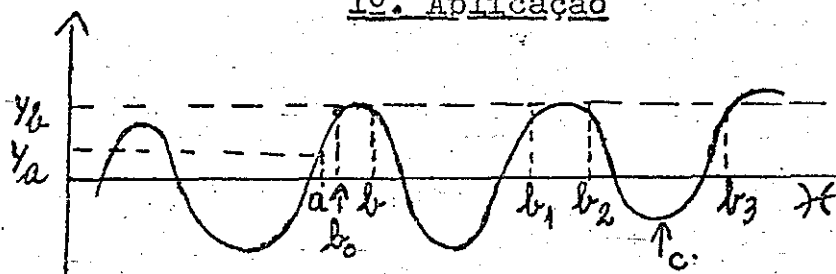


Fig: 8

Seja dado um sistema de proximidades definida da seguinte forma:

$$\pi_{ab} = \delta(y_a - y_b)$$

distancia usual entre as ordenadas definidas na curva c por a e $b \in \mathcal{X}$.

O Conjunto $(b_0, b, b_1, b_2, b_3 \dots)$

é equipróximo do elemento a ou do conjunto $\{a\}$

20. Aplicação

Proximidades entre dois conjuntos

$A, B \subset \mathbb{R}, \text{ com } A \cap B = \emptyset$

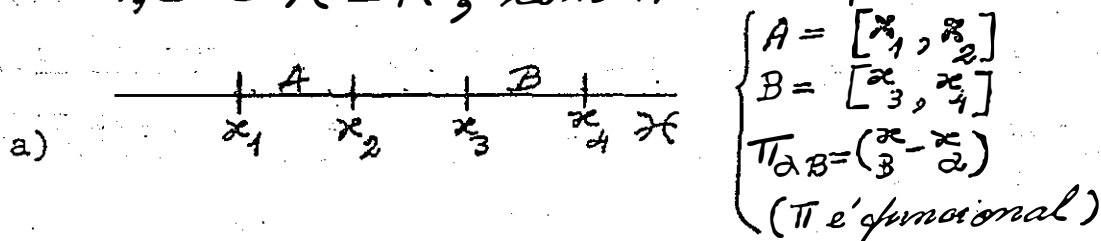


Fig: 9

Proximidade externa de B em relação a A

$$\begin{aligned} \pi &\equiv \bigcup_{a \in B} \pi_{aB} \quad \text{com} \quad \begin{cases} (a^x, B^x) \in G \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ a^x \in A \\ B^x \in B \end{cases} \\ &\equiv \{x_i : x_i \in [x_3 - x_2, (x_4 - x_1)]\} \end{aligned}$$

Proximidade interna respectiva:

$$\pi_i \equiv \bigcap_{a \in B} \pi_{aB} \equiv \bigcap_{a \in B} ((x_3 - x_2), \dots, (x_4 - x_1)) \equiv \emptyset$$

b) o mesmo problema mas com o seguinte sistema de proximidades

$$\pi_{aB} = [a^x, B^x]$$

(π não é funcional)

intervalo
fechado cujos
extremos são
 a^x e B^x .

Então teremos:

$$\pi \equiv \bigcup_{a \in B} \pi_{aB} \equiv \bigcup_{a \in B} [a^x, B^x] \equiv [x_1, x_4]$$

$$\pi_i \equiv \bigcap_{a \in B} \pi_{aB} \equiv \bigcap_{a \in B} [a^x, B^x] \equiv [x_2, x_3] \neq \emptyset$$

c) No caso a) teremos facilmente que:

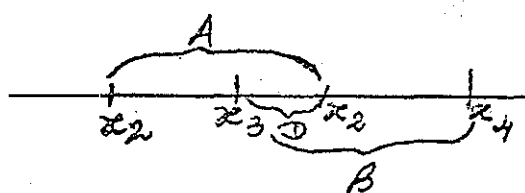
$$M\text{-proximidade } (x_4 - x_1) = x_5$$

$$m\text{-proximidade } (x_3 - x_2) = x_5$$

d) No caso b) teremos que, π não sendo funcional, não se podem determinar M e m -proximidades.

IX₄) Proximidades entre dois conjuntos

a) $A, B \subset X \equiv R$, com $A \cap B \equiv D \neq \emptyset$



$$A = [x_1, x_2]$$

$$B = [x_3, x_4]$$

$$\pi_{AB} = (x_3 - x_2)$$

$$\pi_L \equiv \left\{ x_i : x_i \in [x_3 - x_2, x_4 - x_1] \right\}$$

$$\pi \equiv \emptyset$$

Fig: 10

As M -proximidades e m -proximidades são dadas pelas mesmas fórmulas e m -próximo é negativo.

b) Se o sistema de proximidades for definido por:

$$\pi_{AB} = \begin{cases} [x_1, x_2] & \text{se } x_3 \geq x_2 \\ [x_3, x_4] & \text{se } x_3 \leq x_2 \end{cases}$$

Teremos:

$$\pi_L \equiv \mathcal{P}[x_1, x_4] \cup \mathcal{P}[x_3, -x_2]$$

$$\pi_i \equiv \emptyset$$

M -proximidade $[x_1, x_4]$
 m -proximidade $[\emptyset]$

IX₅) Proximidades Condicionadas

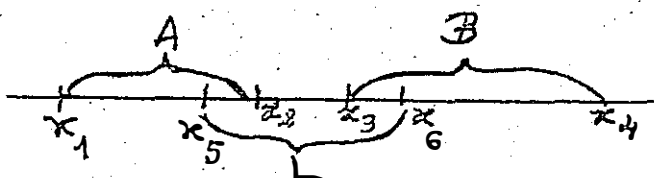


Fig: 11

Verifica-se a condição exigida de $L \cap A$ e $L \cap B$ não serem vazios
então, por exemplo: *para* $\pi_{A,B} = \left\{ \begin{matrix} x \\ B - a \end{matrix} \right\}$
 $\pi_e = \left\{ x_i : x_i \in [(x_5 - x_5), (x_4 - x_3)] \right\}$

IX₆) Proximidades em Multiplicidades

a) Seja $X = R^2$ e A e B

duas formas simplesmente
conectadas e disjuntivas

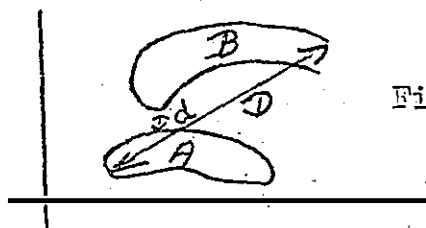


Fig: 12

Vamos admitir que se de-
finiu uma distancia eucli-
deana

sobre X

Então teremos:

$$\pi_e = [d, D]$$

$$\pi_e \equiv \phi$$

$$M - \text{proximidade} \equiv D$$

$$m - \text{ " } \equiv d.$$

b) Seja $X \equiv R^2$

e deseja-se determinar
proximidade de B em
relação a A condiciona-
do a L .

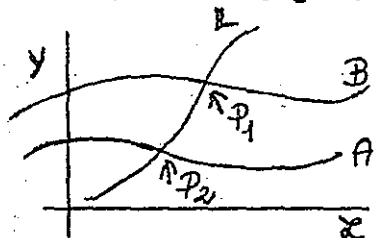


Fig: 13

A, B e L são curvas re-
gulares e $L \cap A \equiv \{P_1\}$ e $L \cap B \equiv \{P_2\}$
não são vazios. Com P_1 e $P_2 \in X$

Neste caso sóna par $(P_1, P_2) \in X$

$$\pi_L(A, B) = \mathcal{L}(P_1, P_2)$$

No caso particular de $\mathcal{L}$ ser uma função então $\pi_L(A, B)$ reus-
-se a um elemento $q_{AB} \in \mathcal{Q}$.

Seja dado uma classe $\{L_i\}$ de conjuntos L_i do tipo de L
que interceptam A e B em pontos distintos de membro para
membro e ao mesmo tempo recobrem , sem vazios, uma dada
Região $R \subset X$

Então a cada L_i corresponderá um certo $q_{AB} \in \mathcal{Q}$.

Vamos $\frac{1}{2}$, com um exemplo, mostrar como se pode então definir uma proximidade entre A e B .

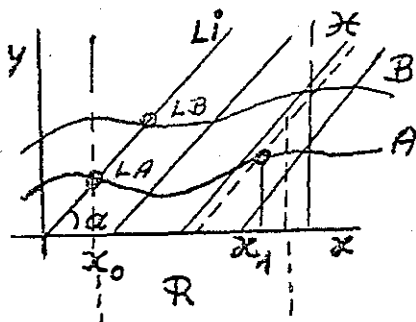


Fig:14

Sejam dadas A e B e $\mathcal{X}$ curvas bem comportadas.

$$L_i \Leftrightarrow y = a x_i + b$$

Definidas na região R

Seja $q_{AB} = e(L_i^B, L_i^A)$,

distancia euclidiana dos

pontos de intersecção de L_i com A e B .

Então define-se distancia entre A e B condicionada à Família $\{L_i\}$ pela forma

$$g = \int_{\mu[x_0, x_1]} e(L_i^A, L_i^B) d\mu$$

onde μ é uma medida definida em $\mathcal{X}$

$$\text{e se } d\mu = \dot{\mu}(x) dx$$

$$\text{Será ainda } \int_{x_0}^{x_1} e(L_i^A, L_i^B) \dot{\mu}(x) dx$$

que é uma expressão usualmente empregada para apreciar a ^{distancia} V de duas curvas.

É mais frequente fazer $L_i \Leftrightarrow x = x_i$

X) Comentário Final

Nesta Comunicação procurou-se sobretudo mostrar as potencialidades do Conceito de proximidade e a sua enorme adaptabilidade a modelar inúmeras situações reais.

Reservam-se para Comunicações especializadas as aplicações à termodinamica, a sistemas mecanicos articulados, etc.

Convirá portanto, ao efectuar a leitura dessas outras comunicações recorrer à introdução teórica feita nesta Comunicação.

O autor agradece reconhecidamente ao Prof. Dr. Campos Ferreira pelos preciosos comentários e críticas feitas ao trabalho; contudo todos os erros e imperfeições nele contido cabem à exclusiva responsabilidade do autor.

