ANTÓNIO GOUVÊA PORTELA
PROFESSOR DO I. S. T.

PROBLEMA DE EXTREMOS

«TÉCNICA»
Revista dos Alunos do I. S. T.
Separata do n.º 335 — Págs. 307 a 320

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
LISBOA
1964

C. D. U. 517.514.2 : 536.7

PROBLEMA DE EXTREMOS

POR ANTÓNIO GOUVÊA PORTELA
PROFESSOR DO I. S. T.

Generalização ao espaço R_n

0) O objectivo deste capítulo consiste em generalizar os tratamentos formais referidos anteriormente a um espaço de n dimensões e ainda sugerir uma solução mecanográfica.

O problema central reside no tratamento dos termos negativos de expoentes pares ou termos dispondo de alguns expoentes ímpares e que podem ser tornados negativos e determinar se esses termos podem ou não, em determinadas condições, ser maiores do que os restantes termos positivos pares ou termos de expoente ímpar que são positivos quando o termo ímpar é negativo.

Resolvido este problema central para cada um dos termos negativos de expoente par ou termos de expoente ímpar que podem ser tornados negativos, verificado que tal situação não ocorre então poderá afirmar-se que, no ponto considerado, a função tem um extremo (mínimo).

O mesmo procedimento poderá empregar-se quando o extremo é um máximo, mas então deverá testar-se a negatividade da série.

O método envolve tomar-se as derivadas até uma certa ordem; em física, interessa, quanto muito, estudar a série até à 6.ª ordem, pois não tem sentido físico, em geral, um extremo que se decide para além da 6.ª ordem.

Formalmente o método é válido para qualquer ordem.

1) *Problema central*

Sendo dados: um termo $M_0 \rightarrow M_0\, h_1^{a_{01}} \ldots h_n^{a_{0n}}$

e

m termos $M_i \rightarrow M_i\, h_1^{a_{i1}} \ldots h_n^{a_{in}}$

Determinar quais as condições em que:

$$\left| M_0\, h_1^{a_{01}} \ldots h_n^{a_{0n}} \right| > \sum_{i=1}^{m} \left| M_i\, h_1^{a_{i1}} \ldots h_n^{a_{in}} \right| \tag{1}$$

sabendo que:

2)
- M_0 e M_i são números finitos.
- a_{0j} e a_{ij} são números inteiros finitos e positivos.
- $i = (1, 2 \ldots m)$
- $j = (1, 2 \ldots n)$

3) $|h_j| < |\delta|$ e $|\delta|$ se pode fazer tão pequeno quanto se desejar.

Para encontrar as condições acima referidas, proceder-se-á à resolução de dois problemas.

1.1) Estabelecer as condições necessárias e suficientes para que se verifique simultâneamente as m seguintes desigualdades:

4) $\left| M_0\, h_1^{a_{01}} \ldots h_n^{a_{0n}} \right| > \left| M_i\, h_1^{a_{i1}} \ldots h_n^{a_{in}} \right|$

e ainda 2) e 3).

1.2) Provado que os sistemas 2), 3) e 4) são satisfeitos, propor em que condições a desigualdade (1) também é satisfeita.

2) *Teorema I – A*

Para que o sistema de m inequações seguintes seja satisfeito, quando $|h_j| < |\delta|$ e $|\delta|$ suficientemente pequeno,

$$|M_0 \, h_1^{a_{01}} \ldots\ldots h_n^{a_{0n}}| > |M_i \, h_1^{a_{i1}} \ldots\ldots h_n^{a_{in}}| \qquad (5)$$

Será necessário e suficiente que:

$$[\alpha_{ij}] \,.\, [x_j] < [A_i] \qquad (6)$$

para $x_j > |N|$ e $|N|$ suficientemente grande.

Sendo:

$$(7) \begin{cases} \alpha_{ij} = (a_{0j} - a_{ij}) \quad \text{donde} \quad (\alpha_{ij} \text{ ser um número inteiro}) \\ |h_j| = |q|^{x_j} \\ 0 \leqslant |h_j| < |q| < 1 \quad \text{donde} \quad x_j > 1 \\ A_i = \operatorname{Ln} \left|\dfrac{M_i}{M_0}\right| . (\operatorname{Ln}|q|)^{-1} \\ \text{e ainda } 2) \text{ e } 3) \end{cases}$$

* * *

Com efeito:

Substituindo em 5) $|h_j|$ por $|q|^{x_j}$ teremos:

$$\begin{cases} |M_0| \,.\, |q|^{\sum_j a_{0j} x_j} > |M_i| \,.\, |q|^{\sum_j a_{ij} x_j} \qquad i = 1 \ldots\ldots m \\ \text{e} \quad x_j > |N| \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \sum_j (a_{0j} - a_{ij}) \, x_j < \operatorname{Ln} \left|\dfrac{M_i}{M_0}\right| . (\operatorname{Ln}|q|)^{-1} \qquad i = 1 \ldots . m \\ \text{e} \quad x_j > |N| \end{cases}$$

Note-se que $|q| < 1$ donde $\operatorname{Ln}|q| < 0$

ou substituindo por α_{ij} e A_i, teremos finalmente

$$\begin{cases} \sum_j \alpha_{ij} \, x_j < A_i \\ \text{e} \\ x_j > |N| \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \underset{(m,n)}{[\alpha_{ij}]} \; \underset{(n,1)}{[x_j]} < \underset{(m,1)}{[A_i]} \\ \text{e} \\ x_j > |N| \end{cases} \qquad (8)$$

3) *Discussão de desigualdade* $\begin{cases} [\alpha_{ij}] \,.\, [k_j] < [A_i] \,. \\ x_j < |N| \end{cases}$

Para o efeito, examinemos todos os menore $[\beta_{k,l}]$ da matriz rectangular $[\alpha_{ij}]$, onde k representa p linhas e l p colunas $\left(\text{com } p < \begin{Bmatrix} m \\ n \end{Bmatrix}\right)$ extraídas da matriz $[\alpha_{ij}]$.

Vamos designar por $[\beta_{k.l}]$ qualquer dos $\binom{j}{p}$ menores distintos que podem ser formados conservando p linhas bem determinadas e combinando as j colunas p a p.

Vamos admitir que (9) det $[\beta_{k.l}] = 0$ para todos os $\binom{j}{p}$ menores distintos formados.

Então, é porque existe uma ou mais linhas que são combinações lineares das restantes.

Mas se det $[\beta_{k\,l}] = 0$ para as p linhas consideradas, então existe um vecto $[\gamma_k]$ tal que:

$$[\gamma_k]\ [\alpha_{k,j}] = [0] \qquad \text{para as p linha referidas.} \tag{10}$$

Sendo γ_k números finitos.

Vamos impor ainda que $\gamma_k \neq 0 \quad k = 1 \ldots . p$, isto é, só existe uma combinação linear.

No casa de existir mais do que uma combinação linear, tratar-se-á separadamente cada combinação.

Seja q uma qualquer das linhas que entra na combinação linear; então:

$$-\left[\frac{\gamma_k}{\gamma_q}\right] \cdot [\alpha_{k,j}] = [\underset{q}{\alpha}_{,j}] \qquad \text{para} \quad k \neq p \tag{11}$$

e designando por $[\underset{q}{\alpha}_{,j}]$ o vector dos coeficientes da de inequação q ou seja da linha q da matriz $[\alpha_{ij}]$.

Mas, dum modo geral, $[\alpha_{k,j}] \cdot [x_j] < [A_k]$ e portanto também o será para as $(p-1)$ linhas que resultam das p inequações em estudo, suprimindo a linha q.

Donde

$$\underset{(1,p-1)}{\left[\frac{\gamma_k}{\gamma_q}\right]} \cdot \underset{(p-1,n)}{[\alpha_{k,j}]} \cdot \underset{(n,1)}{[x_j]} \ \text{e} \ \overset{<}{\underset{>}{\text{ou}}} \ \underset{(1,p-1)}{\left[\frac{\gamma_k}{\gamma_q}\right]} \cdot \underset{(p-1,1)}{[A_k]} \qquad \text{e} \quad k \neq q \tag{12}$$

Quanto ao símbolo da desigualdade as seguintes hipóteses podem ser consideradas:

a) $\dfrac{\gamma_k}{\gamma_q} > 0$ para todos os $(p-1)$ γ_k.

Então a desigualdade (12) toma a forma:

$$\left[\frac{\gamma_k}{\gamma_q}\right] \cdot [\alpha_{k,j}] \cdot [x_j] < \left[\frac{\gamma_k}{\gamma_q}\right] [A_k] \qquad \text{e} \quad k \neq q \tag{13}$$

mas, por outro lado, será, para a inequação q:

$$[\underset{q}{\alpha_j}] \cdot [x_j] < A_q \tag{14}$$

e conjugando (13), (14) e (11) obteremos:

$$A_q > [\underset{q}{\alpha_j}] \cdot [x_j] > -\left[\frac{\gamma_k}{\gamma_q}\right] \cdot [A_k] \qquad k \neq q \tag{15}$$

ora a desigualdade (15) é verdadeira para qualquer q, e portanto para todas as inequações que fazem parte das p inequações onde se reconheceu existir $\binom{j}{p}$ menores $[\beta_{k,l}]$ cujos determinantes são nulos.

Como A_q e $\left[\frac{\gamma_k}{\gamma_q}\right] \cdot [A_k]$ são constituídos por elementos finitos e fazendo $x^j = \gamma_j \cdot x_0$

onde $\left\{\begin{array}{l} x_0, x_j > 0 \\ \text{e} \\ \gamma_j << \infty \end{array}\right.$ e x_0 se pode fazer tão grande quanto se desejar, poderá (15) escrever-se

$$\frac{A_q}{x_0} > [\underset{q}{\alpha_j}] \cdot [\gamma_j] > -\left[\frac{\gamma_k}{\gamma_q}\right] \cdot [A_k] \cdot \frac{1}{x_0} \tag{16}$$

e para $x_0 > |N|$ e N suficientemente grande será

$$\left|\frac{Aq}{x_0}\right|, \quad \left| -\left[\frac{\gamma_k}{\gamma_q}\right] \cdot [A_k] \right| < |\delta| \qquad \text{e } |\delta|$$

tão pequeno quanto se desejar.

Donde resulta que $|[\underset{q}{\alpha}\, j] \cdot [x_j]| < \delta$ (17)

que define um hiperplano que designaremos de *hiperplano de degenerescência* cuja expressão formal é

$$[\underset{q}{\alpha}\, j] \cdot [x_j] = 0 \tag{18}$$

haverá tantos hiperplanos quantas inequações interventoras na degenerescência ou seja p.

A expressão (17) mostra que o módulo de $[\underset{q}{\alpha}\, j] \cdot [\gamma_j]$ está limitado por $|\delta|$ o qual pode ser tão pequeno quanto se desejar; bastava para tanto escolher $|N|$ suficientemente grande.

Da expressão (15) pode ainda concluir-se que

$$0 < -[\underset{q}{\alpha}\, j] \cdot [x_j] + A_q < \left[\frac{\gamma_k}{\gamma_q}\right] \cdot \left[A_q\right] + A_q \tag{15 a}$$

b) $\dfrac{\gamma_k}{\gamma_q} < 0$ para todos os $(p-1)$ γ_k. e para um certo γ_q.

Então a desigualdade (12) toma a forma

$$\left[\frac{\gamma_k}{\gamma_q}\right] \cdot [\alpha_{kj}] \cdot [x_j] > \left[\frac{\gamma_k}{\gamma_q}\right] \cdot [A_q] \tag{19}$$

e é fàcilmente deduzível que:

$$\left\{\begin{array}{r} A_q > \left[\underset{q}{\alpha_j}\right] \cdot [x_j] \\ -\left[\dfrac{\gamma_k}{\gamma_q}\right] \cdot [A_k] > \left[\underset{q}{\alpha_j}\right] \cdot [x_j] \end{array}\right. \tag{20}$$

Neste caso $[\underset{q}{\alpha_j}]$ não está limitado em *módulo* mas apenas em ordem. Com efeito, a 2.ª inequação do sistema (20) veio, quanto muito, reduzir o espaço de existência de $[\underset{q}{\alpha_j}] \cdot [x_j]$.

Note-se que esta conclusão é verdadeira apenas para a inequação q; para as restantes veja-se a hipótese c) tratada a seguir.

c) $\dfrac{\gamma_k}{\gamma_q} \lessgtr 0$ conforme o valor de k e q escolhidos.

Vamos designar por $\dfrac{\gamma_{k'}}{\gamma_q}$ e $\dfrac{\gamma_{k''}}{\gamma_q}$, respectivamente as fracções que são > 0 ou < 0.

Assim $\frac{\gamma_{k'}}{x_q} > 0$ donde $\left[\frac{\gamma_{k'}}{\gamma_q}\right][\alpha_{k'j}][x_j] < \left[\frac{\gamma_{k'}}{\gamma_q}\right][A_{k'}]$

e $\frac{\gamma_{k''}}{\gamma_q} < 0$ donde $\left[\frac{\gamma_{k''}}{q}\right] . [\alpha_{k''j}] . [x_j] > \left[\frac{\gamma_{k''}}{\gamma_q}\right] . [A_{k''}]$

e $\frac{\gamma_q}{\gamma_q} = 1 > 0$ donde $[\underset{q}{\alpha_j}][x_j] < A_q$

Nesta hipótese haverá desigualdades num sentido e outras noutro, mas em conjunto o sistema não impõe condições da forma $|[\alpha_j][x_j]| < |\delta|$ a nenhuma das linhas (inequações) do sistema.

Teorema II A

Se (21) $\left| M_0 h_1^{a_{01}} \dots h_n^{a_{0n}} \right| > \left| M_i h_1^{a_{i1}} \dots h_n^{a_{in}} \right|$ $i = 1, \dots, m$,

então (22) $\left| M_0 h_1^{a_{01}} \dots h_n^{a_{0n}} \right| > \left| \sum_{i=1}^{m} M_i h_1^{a_{i1}} \dots h_n^{a_{in}} \right|$

excepto se na matriz $[a_{ij} - a_{0j}] = [\alpha_{ij}]$ existirem algumas linhas para as quais se verifique a igualdade $[\gamma_k] . [a_{ij} - a_{0j}] = [0]$ e os γ_k todos do mesmo sinal, porque então a desigualdade (21) pode não ser suficiente para permitir concluir (22).

As letras indiciadas têm o mesmo sentido e significado já definido no Teorema I A.

Com efeito :

A desigualdade (21) pode escrever-se

$$(23) \qquad 1 > |q|^{-[\underset{i}{\alpha_j}] . [x_j] + A_i}$$

Ora já vimos que $\begin{cases} [\underset{i}{\alpha_j}] . [x_j] < A_i & i = 1, \dots m \\ x_j > |N| \text{ e } |N| \text{ suficientemente grande} \end{cases}$

ou seja $-[\underset{i}{\alpha_j}] . [x_j] + A_i > 0$

Em geral, $-[\alpha_j] . [x_j] + A_i$ não é limitado superiormente e poderá fazer-se :

$$(24) \qquad -[\alpha_j] . [x_j] + A_i = |P_i| > 0$$

$$\text{e} \quad (25) \qquad |P_i| = \text{Ln}\, \rho_i . (\text{Ln}\, |q|)^{-1} \quad \text{e} \quad \rho_i < 1$$

e substituindo em (23) teremos :

$$1 > |q|^{\text{Ln}\, \rho_i (\text{Ln}\, |q|)^{-1}}$$

note-se que :

$$\begin{cases} \text{Ln}\, \rho_i < 0 \\ \text{Ln}\, |q| < 0 \end{cases}$$

Somando as m desigualdades (23) obteremos :

$$m > \sum_{i=1}^{m} |q|^{-[\underset{i}{\alpha_j}] . [x_j] + A_i}$$

$$\text{ou } (26) \quad 1 > \sum_{i=1}^{m} |q|^{\text{Ln}\, \rho_i (\text{Ln}\, |q|)^{-1}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \rho_i$$

Se impusermos $\rho_i < 1$ será $\sum_{i=1} \rho_i < m$ onde $1 > \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{m} \rho_i$

Ora a desigualdade (22) pode tomar a forma :

$$1 > \sum_{i=1}^{m} | q |^{-[\alpha_j] \cdot [x_j] + A_i} \tag{27}$$

e esta desigualdade é sempre satisfeita se $\rho_i < 1$ q. e. d.

Tratemos agora a *excepção* referida no Teorema II A.

A demonstração foi possível porque admitimos que era, em geral, satisfeita desigualdade (24).

Porém se entre algumas desigualdades do sistema se verificar que : $[\gamma_k] [\alpha_{ji}] = [0]$ e γ_k todos do mesmo sinal, já vimos em (15) e 15 a) que $0 < - [\underset{q}{\alpha_j}] \cdot [x_j] + A_q < \left| \frac{\gamma_k}{\gamma_q} \right| \cdot [A_q] + A_q$ e portanto $- [\underset{q}{\alpha_j}] \cdot [x_j] + A_q$ está limitado superiormente e daí pode a desigualdade (24) não ser satisfeita.

5) *Estado do caso degenerado*

O caso degenerado verifica-se quando entre um certo número de inequações existe para as correspondentes linhas de Matriz $[\alpha_{ij}]$, relações lineares entre os seus elementos.

Sejam as inequações $i = 1, \ldots p$, e $(p < n, m)$ aquela para as quais se verifica

$$[\gamma_k] [\alpha_{k,j}] = [0] \quad \text{e} \quad k = 1, \ldots p$$

e além disso γ_k ou $(\gamma_k \to 0)$ para todos os kk, já vimos em (17) que

$$| [\underset{q}{\alpha_j}] \cdot [x_j] | < | \delta | \tag{17}$$

e por mais pequeno que seja $| \delta |$ haverá sempre um $| N |$ tal que para $x_j > | N |$ a inequação 17) é sempre satisfeita. E tal é verdade para todos os q desde 1 a p.

Também já vimos que a desigualdade (22) aplicada aos p termos se pode escrever: (Veja-se 27)).

$$\text{(28)} \quad 1 > \sum_{k=1}^{p} | q |^{- [\underset{k}{\alpha_j}] [x_i] + A_k}$$

ou

$$1 > \sum_{k=1}^{p} | q |^{- [\underset{k}{\alpha_j}] [k_j]} \cdot \left| \frac{M_k}{M_0} \right|$$

Ora para $x_j > | N |$ e $| N |$ suficientemente grande $| - [\underset{k}{\alpha_j}] \cdot [x_j] | < | \delta |$ e $| \delta |$ tão pequeno quanto se desejar donde

$$\text{(29)} \quad \left| \, | q |^{- [\underset{k}{\alpha_j}] [x_j]} - 1 \, \right| < | \delta_1 |$$

e $| \delta_1 |$ tão pequeno quanto se desejar e finalmente

$$\text{(30)} \quad \left| \sum_{k=1}^{p} | q |^{- [\underset{k}{\alpha_j}] \cdot [x_j]} \left| \frac{M_k}{M_0} \right| - \sum_{k=1}^{p} \frac{M_k}{M_0} \right| < | \delta_2 |$$

e $| \delta_2 |$ tão pequeno quanto se desejar.

O problema fica reduzido a verificar a desigualdade numérica:

$$1 > \sum_{k=1}^{p} \frac{M_k}{M_0} \tag{31}$$

6) Antes de prosseguir, convém demonstrar que $\sum_{k=1}^{p} \frac{M_k}{M_0}$ é o mínimo de função (32)

$$\varphi = \sum_{k=1}^{p} |q|^{-[\alpha_j]_k [x_0] + A_k} \quad \text{quando} \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| -[\alpha_j]_k \cdot [x_j] \right| \to 0 \text{ e ainda } \sum_{k=1}^{p} \alpha_{kj} \left| \frac{M_k}{M_0} \right| = 0 \\ \text{e } x_j \to \infty \end{array} \right.$$

Com efeito,

$$\varphi = \sum_{k=1}^{p} |q|^{-[\alpha_j]_k \cdot [x_j]} \cdot \frac{M_k}{M_0} \tag{33}$$

A condição *necessária* ou de estacionaridade de φ é: $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1, \ldots n$

ou seja

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{p} -\alpha_j \cdot \left| \frac{M_k}{M_0} \right| \cdot |q|^{[\alpha_j]_k \cdot [x_j]} = 0 \tag{34}$$

para $j = 1, \ldots n$

mas já vimos em (29) que para $x_j > |A|$ e $|A|$ suficientemente grande será:

$\left| |q|^{-[\alpha_j]_k \cdot [x_j]} - 1 \right| < |\delta_1|$ e $|\delta_1|$ tão pequeno quanto se desejar e daqui

$$\left| \left| -\sum_{k=1}^{p} \alpha_{j_k} \left| \frac{M_k}{M_0} \right| \cdot |q|^{-[\alpha_j]_k \cdot [x_j]} \right| - \left| -\sum_{k=1}^{p} \alpha_{j_k} \left| \frac{M_k}{M_0} \right| \right| \right| < |\delta_3| \tag{35}$$

e $|\delta_3|$ tão pequeno quanto se desejar

donde

$$\left| -\sum_{k=1}^{p} \alpha_{j_k} \left| \frac{MK}{M_0} \right| \right| < |\delta_4| \tag{36}$$

e $\delta_4|$ tão pequeno quanto se desejar ou no limite $\sum_{k=1}^{p} \alpha_{kj} \left| \frac{M_k}{M_0} \right| = 0$ (37)

que estabelece uma relação a verificar em cada caso.

Falta mostrar que se a condição necessária for verificada, também o será a condição *suficiente* ou de extremo.

Com efeito:

A condição suficiente propõe-se deste modo

$$\Delta^2 \varphi = [d x_j]^t \cdot \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_l \, \partial x_j} \right] \cdot [d x_j] > 0 \tag{38}$$

mas

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_l \, \partial x_j} = \frac{\partial \left(\sum_{k=1}^{p} -\alpha_{j_k} \cdot \left| \frac{M_k}{M_0} \right| \cdot |q|^{-[\alpha_j]_k \cdot [x_j]} \right)}{\partial x_l}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \alpha_{l_k} \cdot \alpha_{j_k} \cdot \left| \frac{M_k}{M_0} \right| \cdot |q|^{-[\alpha_j]_k [x_j]} \tag{39}$$

e novamente será:

$$\left| \left| \sum_{k=1}^{p} \alpha_{l_k} \alpha_{j_k} \left| \frac{M_k}{M_0} \right| \cdot |q|^{-[\alpha_j]_k \cdot [x_j]} \right| - \left| \sum_{k=1}^{p} \alpha_{l_k} \alpha_{j_k} \left| \frac{M_k}{M_k} \right| \right| \right| < |\delta_5| \tag{40}$$

e $|\delta_5|$ pode ser feito tão pequeno quanto se desejar, fazendo $x_j > |N|$ e $|N|$ tão grande quanto o necessário.

mas (41) $$\underset{(n,n)}{\left[\sum_{k=1}^{p} \alpha_{l k} \cdot \alpha_{j k} \cdot \left|\frac{M_k}{M_0}\right|\right]} = \underset{(n,p)}{\left|\alpha_{j k}\right|^t} \cdot \underset{(p,p)}{\left[\left|\frac{M_k}{M_0}\right|\right]} \cdot \underset{(p\,n)}{\left|\alpha_{j k}\right|}$$

Sendo $\left[\left|\frac{M_k}{M_0}\right|\right]$ uma matriz diagonal e tendo em vista (41), (40) e (38) poder-se-á concluir que:

$$\left|[dx_j]^t \cdot \left[\frac{\alpha^2 \varphi}{\partial x_l\, \partial x_j}\right] \cdot [dx_j]\right| - \left|[dx_j]^b\, [\alpha_{j k}]^t \cdot \left[\left|\frac{M_k}{M_0}\right|\right] \cdot [\alpha_{j k}] \cdot [dx_j]\right| < |\delta_6| \qquad (42)$$

e $|\delta_6|$ poderá ser feito tão pequeno quanto se desejar, fazendo $x_j > |N|$ e $|N|$ tão grande quanto o necessário.

Portanto bastará provar que é maior que zero a expressão abaixo, para provar que $\Delta^2 \varphi > 0$ e portanto que se trata de mínimo

$$(43) \qquad [dx_j]^r \cdot [\alpha_{j k}]^t \left[\left|\frac{M_k}{M_0}\right|\right] \cdot [\alpha_{j k}] \cdot [dx_j]$$

designemos por

$$dy_j = [\alpha_{j k}] \cdot [dx_j]$$

então (43) poderá escrever-se:

$$(44) \qquad [dy_j]^t \cdot \left[\left|\frac{M_k}{M_0}\right|\right] \cdot [dy_j]$$

e para provar que (44) é positivo bastará provar que a matriz $\left[\left|\frac{M_k}{M_0}\right|\right]$ é positiva definida.

Ora a matriz referida é *diogonal* e todos os seus elementos são positivos, $\left|\frac{M_k}{M_0}\right| > 0$ q. e. d.

7) Portanto o estudo das p desigualdades nas condições referidas no parágrafo 5 resulta na comparação de $\sum_{k=i}^{k} \frac{M_k}{M_0}$ com a unidade.

45) Se $\sum_{k=1}^{k} \left|\frac{M_k}{M_0}\right| > 1$ o sistema não tem um extremo no ponto em estudo

46) Se $\sum_{k=1}^{k} \left|\frac{M_k}{M_0}\right| < 1$ então o sistema tem um extremo no ponto

47) Se $\sum_{k=1}^{k} \left|\frac{M_k}{M_0}\right| = 1$ então o termo M_0 e os termos M_k $(k = 1, - \ldots p)$ têm uma soma algébrica nula

Neste último caso se a função tiver um extremo este não se reconhece até à ordem em que foi feito o desenvolvimento em série de Taylor da função cujo extremo se deseja apurar.

8) Tem interesse aplicar a formulação deduzida ao caso de $\begin{cases} n = 2 \\ m = 2 \\ p = 2 \end{cases}$

Para que seja possível existir uma degenerescência é necessário que:

$[\gamma_k]\,[\alpha_{k,j}] = [0]$, Veja-se expressão (10) e $\dfrac{\gamma_k}{\gamma_q} > 0$

e como $\begin{cases} [\alpha_{ij}]\,[x_j] < [A_i] & i = 1 \text{ e } 2 \\ x_i > \{N\} \end{cases}$

será $\begin{cases} \dfrac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} = \dfrac{\alpha}{\beta} < 0 \quad \text{e} \quad \dfrac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}} < 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{e} \quad \dfrac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}} = \dfrac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} \\ \dfrac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}} = \dfrac{\alpha}{\beta} < 0 \quad \text{e} \quad \dfrac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} < 0 \end{cases}$

e a desigualdade $[\alpha_{ij}]\,[x_i] < [A_i]$ pode escrever-se sob a forma:

$$\begin{cases} +\alpha x_1 - \beta x_2 < A'_1 \\ -\alpha x_1 - \beta x_2 < A'_2 \end{cases}$$

A condição de suficiência propõe-se (Veja-se 37)

$$\begin{cases} \alpha_{11}\left|\dfrac{M_1}{M_0}\right| + \alpha_{21}\left|\dfrac{M_2}{M_0}\right| = 0 & j = 1 \\ \alpha_{22}\left|\dfrac{M_1}{M_0}\right| + \alpha_{22}\left|\dfrac{M_2}{M_0}\right| = 0 & j = 2 \end{cases}$$

mas $\dfrac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}} = \dfrac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} = g$ e as duas equações degeneram num só $g\left|\dfrac{M_1}{M_0}\right| + \left|\dfrac{M_2}{M_0}\right| = 0$
ou simplificando $g\,|M_1| + M_2 = 0$.

A condição de degenerescência estuda-se da comparação com a unidade de

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{M_k}{M_0}\right| = \left|\frac{M_1}{M_0}\right| + \left|\frac{M_2}{M_0}\right| = \frac{|M_1| + |M_2|}{|M_0|} \gtreqless 1$$

Tanto a expressão $|M_1| + |M_2| \gtreqless |M_0|$ como $g\,|M_1| + |M_2| = 0$ coincidem com as soluções estudadas anteriormente como seria de prever.

9) Vamos proceder à generalização de alguns teoremas e lemas já deduzidos para funções de duas variáveis independentes.

Teorema III–A

Designando por (i) qualquer combinação dos n índices $i_1 \ldots i_n$, pode provar-se que:

$$48)\qquad \left|M_0 \prod_{j=1}^{n} h_j^{a_{0j}}\right| > \sum_{(i)}^{\infty}\left|M_{(i)} \prod_{j=1}^{n} h_j^{a_{(i)j}}\right|$$

Se fôr:

$$\begin{cases} a_{(i)j} \geqq a_{0j} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{(i)j} > \sum\limits_{j=1}^{n} a_{0j} \\ \left.\begin{matrix} a_{(i)j} \\ a_{(o)j} \end{matrix}\right\} \text{inteiros e positivos} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} i_j \geqq 1 \\ |h_j| < |q| < 1 \quad j = 1 \ldots n \\ |h_j| < \delta \text{ e } \delta \text{ tão pequeno quanto se quiser} \end{cases}$$

Demonstração:

A inequação 48) pode escrever-se:

$$49)\quad 1 > \sum_{(i)=(o)}^{\infty} \left| \frac{M_{(i)}}{M_o} \right| \cdot \left(\prod_{j=1}^{n} |h_j|^{a_{(i)j} - a_{oj}} - 1 \right)$$

Com efeito, a circunstância de $\left| \begin{array}{l} a_{(i)j} - a_{oj} \geq 0 \\ \sum_{j=1}^{n} (a_{(i)j} - a_{oj}) > 0 \end{array} \right.$

exclue a combinação $a_{(i)j} = a_{oj}$ porque $\sum_{j=1}^{n} (a_{oj} - a_{oj}) = 0$, o que contraria a segunda desigualdade invocada e o valor deste termo é $\prod_{j=1}^{n} |h_j|^{0} = 1$

Mas seja $Q > \left| \frac{M_{(i)}}{M_o} \right|$ para todo e qualquer combinação (i); Q é finito porque $M_{(i)} \neq \infty$ e $M_o \neq 0$.

Substituindo $\left| \frac{M_{(i)}}{M_o} \right|$ por Q no segundo membro de desigualdade 49), obteremos:

$$\sum_{(i)=(o)}^{\infty} \left| \frac{M_{(i)}}{M_o} \right| \cdot \left(\prod_{j=1}^{n} |h_j|^{a_{(i)j} - a_{oj}} - 1 \right) \leq Q \sum_{(i)=(o)}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{n} |h_j|^{a_{(i)j} - a_{oj}} - 1 \right)$$

mas

$$\sum_{(i)=(o)}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} |h_j|^{a_{(i)j} - a_{oj}} = \prod_{j=1}^{n} \sum_{(i)=(o)}^{\infty} |h_j|^{a_{(i)j} - a_{oj}}$$

e

$$\sum_{(i)=o}^{\infty} |h_j|^{a_{(i)j} - a_{oj}} = \frac{1 - |h_j|^{\infty}}{1 - |h_j|} = \frac{1}{1 - |h_j|} \qquad \text{e} \qquad |h_j| < 1$$

Donde

$$Q \sum_{(i)=(o)}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{n} |h_j|^{a_{(i)j} - a_{oj}} - 1 \right) = Q \left[\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1 - |h_j|} - 1 \right]$$

e para $|h_j| < \delta$ e δ suficientemente pequeno será

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1 - |h_j|} - 1 < |\varepsilon$$

e $|\varepsilon|$ será suficientemente pequeno para que

$$Q \,.\, |\varepsilon| < 1 \qquad \text{q. e. d.}$$

Teorema IV – A

$$(50)\qquad \sum_{k=1}^{n} A_k h_k^{2p} > \sum_{(i)}^{\infty} |M_{(i)}| \prod_{j=1}^{n} \cdot |h_j|^{a_{(i)j}}$$

Se se verificar:

$$(51)\quad \left\{ \begin{array}{l} A_k > 0 \quad \text{para} \quad k = 1, \dots n \\ p \quad \text{inteiro e positivo} \\ \left. \begin{array}{l} a_{(i)j} \geq 0 \\ a_{(i)k} \geq 2p \end{array} \right\} \text{inteiros} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{(i)j} > 2p \\ |h_j| < |\delta| \quad \text{e} \quad |\delta| \text{ tão pequeno quanto se desejar} \end{array} \right.$$

Demonstração :

Do Teorema III A será ;

$$A_k h_k^{2p} > \sum_{(i)}^{\infty} |M_{(i)}| \prod_{j=1}^{n} |h_j|^{a(i)j} \tag{52}$$

se for :

$$\left.\begin{array}{l} a_{(i)j} \geqslant 0 \\ a_{(i)k} \geqslant 2p \\ \sum_{j=1}^{n} a_{(i)j} > 2p \end{array}\right| \quad (53) \qquad e \quad |h_j| < |\delta|$$

Se escrevermos as desigualdades do tipo (52) para $k = 1, 2 \ldots n$ tendo o cuidado de não repetir termos já incluídos nas desigualdades precedentes e somando ordenadamente teremos :

$$\sum_{k=1}^{n} A_k h_k^{2p} > \sum_{(i)}^{\infty} |M_{(i)}| \cdot \prod_{j=1}^{n} |h_j|^{a(i)j}$$

se se verificar (51) q.e.d.

Nota : Daremos a designação de *ordem* de um termo da série ao número inteiro dado pelo somatório seguinte :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{(i)j}$$

Teorema V-A

Seja dada a série $S_T = \sum_{(i)=(o)}^{\infty} M_{(i)} \prod_{j=1}^{n} h_j^{a(i)j}$

$$\text{Se} \quad \sum_{(i)=0}^{2p} M_i \prod_{j=1}^{n} h_j^{a(i)j} > \sum_{k=1}^{n} A_k h_k^{2p} \quad e \quad \left\{\begin{array}{l} A_k > 0 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{(i)j} \leqslant 2p \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} a_{(i)j} \geqslant 0 \\ p > 0 \end{array}\right. \tag{54}$$

então $S_T > 0$ para $|h_j| < |\delta|$ e $|\delta|$ suficientemente pequeno.
($a_{(i)j}$ e p são inteiros).

Demonstração :

A série S_T poderá escrever-se :

$$S_T = \sum_{(i)=0}^{\infty} M_{(i)} \prod_{j=1}^{n} h_j^{a(i)j} = \underbrace{\sum_{(i)=0}^{2p} M_{(i)} \prod_{j=1}^{n} h_j^{a(i)j}}_{e \ \sum_{j=1}^{n} a_{(i)j} \leqslant 2p} + \underbrace{\sum_{(i)}^{\infty} M_{(i)} \prod_{j=1}^{n} h_j^{a(i)}}_{\sum_{j=1}^{n} a_{(i)j} > 2p} \tag{55}$$

Mas do teorema IV-A temos que :

$$\sum_{k=1}^{n} A_k h_k^{2p} > \sum_{(j)}^{\infty} |M_{(i)}| \cdot \prod_{j=1}^{n} |h_j|^{a(i)j} > \sum_{(i)}^{\infty} M_{(j)} \prod_{j=1}^{n} h_j^{a(i)j} \tag{56}$$

se for 51) e como é 56), será :

$$0 < \sum_{(i)=0}^{2p} M_i \prod_{j=1}^{n} h_j^{a(i)j} > \sum_{(i)}^{\infty} M_i \prod_{j=1}^{n} h_j^{a(i)j}$$

e de 55) será finalmente $S_T > 0$.

Nota: Diremos que um extremo se *decide* na ordem $2p$, quando $2p$ for a ordem da série finita e de menor ordem que verifica a desigualdade 54).

Teorema VI – A

A condição necessária, mas não suficiente, para que:

$$\sum_{(i)}^{2p} M_{(i)} \prod_{j=1}^{n} h_j^{(i)j} > \sum_{k=1}^{n} A_k h_k^{2p} \tag{57}$$

para $|h_j| < \delta$ e δ suficientemente pequeno é a seguinte:

$$\text{ou} \begin{cases} a_{(i)k} \text{ mínimo} = 2p \\ \text{e} \\ M_{(i)} > A_k \end{cases} \quad (58) \qquad \text{ou} \begin{cases} a_{(i)k} \text{ mínimo} < 2p \\ \text{e então será:} \\ \begin{cases} a_{(i)k} \text{ mínimo par} \\ M_{(i)} > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (59)$$

sendo $A_k > 0$ e p inteiro positivo.

Demonstração

A desigualdade 57) se for verdadeira sê-lo-á também para $h_j = 0$ e $j \neq k$

Donde $$\sum_{(i)}^{2p} M_{(i)} h_k^{a_{(i)k}} > A_k h_k^{2p} \qquad \text{para } k = 1, \ldots n \tag{60}$$

Mas para satisfazer 60) duas hipóteses se podem verificar:

ou $a_{(i)k}$ *mínimo* $= 2p$

e então $$\sum_{(i)}^{2p} M_{(i)} h_k^{a_{(i)k}} = M_{(i)} \textit{ mínimo} \times h_k^{2p}$$

Donde $M_{(i)}$ mínimo $> A_k > 0$ para satisfazer 60)

ou $a_{(i)k}$ *mínimo* $< 2p$

e então $$\sum_{(i)}^{2p} M_{(i)} h_k^{a_{(i)k}} = M_{(i)\,min.} \cdot h_k^{a_{(i)k\,\text{mínimo}}} \times S$$

onde $$S = 1 + \sum_{(i)} \frac{M_{(i)\,min.}}{M_{(i)}} \cdot h_k^{a_{(i)k} - a_{(i)k\,\text{mínimo}}}$$

e como $a_{(i)k} - a_{(i)k}\,\text{mín} \geqslant 0$

será $\begin{cases} S = 1 + \varepsilon \\ \text{e} \\ |h_k| < |\delta| \end{cases}$ e haverá sempre um $|\delta|$ suficientemente pequeno, tal que $|\varepsilon|$ possa ser mais pequeno do que um número arbitràriamente pequeno dado.

Mas $a_{(i)k}$ mínimo $< 2p$, donde se $M_{(i)\,min} > 0$ e $a_{(i)}$ mínimo par, será satisfeito 60), mas se $M_{(i)\,\text{mínimo}} < 0$ ou $a_{(i)k\,min}$ ímpar então 60) não é satisfeito.

Portanto as condições 58 e 59 são necessárias mas não suficientes. q.e.d.

Teorema VII–A

— Verificado que para todos os $k = 1, \dots n$ são satisfeitas as desigualdades referidas no teorema VII-A até à ordem 2 p.

-- Verificado que para todos os termos de expoente par mas de coeficiente negativo ou para os termos de expoente ímpar (um pelo menos), as desigualdades do Teorema II-A se verificaram no sentido inverso, igualmente até à ordem 2 p.

Então a série S_T é positiva definida.

Demonstração

Do Teorema I–A, temos que:

61) $$| M_r | \prod_{j=1}^{n} | h_j |^{a_{rj}} < \sum_{i=1}^{m} | M_i | \prod_{j=1}^{n} | h_j |^{a_{ij}}$$

$| h_j | < | \delta |$ e $| \delta |$ suficientemente pequeno.

Significando r qualquer dos s termos pares de coeficiente negativo ou ímpares (um expoente ímpar) e significando $i = m$ os termos pares positivos da série até à ordem 2 p que existem na série.

Tendo em vista a demonstração do Teorema II–A, a desigualdade 61) poderá ainda escrever-se:

$$| M_r | \prod_{j=1}^{n} | h_j |^{a_{rj}} < \frac{1}{s} \cdot \sum_{i=1}^{m} | M_i | \prod_{j=1}^{n} | h_j |^{a_{ij}} \quad \text{e} \quad | h_j | < | \delta' | \leqslant | \delta |$$

62) ou $$\sum_{r=1}^{s} | M_r | \prod_{j=1}^{n} | h_j |^{a_{rj}} < \sum_{i=1}^{m} | M_i | \prod_{j=i}^{n} | h_i |^{a_{ij}} \quad \text{e} \quad | h_j | < | \delta, |$$

note-se que $\left\{ \begin{array}{l} | M_i | = M_i > 0 \\ a_{ij} = \text{pares e positivos} \end{array} \right.$ e

Do Teorema VI–A será ainda, por hipótese:

(63) $$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{m} M_i h_k^{a_{ik}} > A_k h_k^{2p} \quad \text{e} \quad A_k > 0 \\ \text{e} \quad | h_k | < \delta'' \end{array} \right.$$

e haverá $k = n$ desigualdades deste tipo.

Donde

(64) $$\sum_{i=1}^{m} M_i \prod_{j=1}^{n} h_j^{a_{ij}} > \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} M_i h_k^{a_{ik}} > \sum_{k=1}^{n} A_k h_k^{2p}$$

$$\text{e} \quad | h_k | < \delta''$$

mas (62) e (64) podem ainda escrever-se:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} M_i \prod_{j=1}^{n} h_j^{a_{ij}} > \sum_{r=1}^{s} | M_r | \prod_{j=1}^{n} | h_j |^{a_{rj}}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} M_i \prod_{j=1}^{n} h_j^{a_{ij}} > \sum_{k=1}^{n} A_k h_k^{2p}$$

Donde

(65) $$\sum_{i=j}^{m} M_i \prod_{j=1}^{n} h_j^{a_{ij}} > \sum_{s \cdot i} M_2 \cdot \prod_{j=1}^{n} | h_j |^{a_{rj}} + \sum_{k=1}^{n} A_k h_k^{2p}$$

mas já vimos que: (Teorema IV A)

(66) $$\sum_{k=k}^{n} A_k h_k^{2p} > \sum_{(i)}^{\infty} | M_{(i)} | \cdot \prod_{j=1}^{n} | h_j |^{a_{(i)j}}$$

Substituindo (66) em 65 obtém-se :

$$\sum_{i=1}^{m} M_i \prod_{j=1}^{n} h_j^{a_{ij}} > \sum_{r=1}^{s} | M_r | \prod_{j=i}^{n} | h_j |^{a_{rj}} + \sum_{(i)}^{\infty} | M_{(i)} | \cdot \prod_{j=1}^{n} | h_j |^{a_{(i)j}}$$

ou retirando os módulos será :

$$S_T = \sum_{i=1}^{m} M_i \prod_{j=1}^{n} h_j^{a_{ij}} + \sum_{r=1}^{s} M_r \prod_{j=1}^{n} h_j^{a_{rj}} + \sum_{(i)}^{\infty} M_{(i)} \prod_{j=1}^{n} h_j^{a_{(i)j}} > 0$$

q.e.d.

Conclusão

É dada uma função φ $(Z_1 \dots Z_n)$ e procura-se saber se tem um extremo no ponto P $(Z_{10}, \dots Z_{n0})$, até à ordem 2 p e admitimos que φ $(Z_1 \dots Z_n)$ é susceptível de desenvolvimento da série de Taylor na região do espaço que contém P no seu interior.

Modo de proceder :

1) Efectua-se esse desenvolvimento até à ordem 2p.
2) Verifica-se a condição necessária referida no teorema VI A para todos $k = 1, \dots n$.
3) Verifica-se as condições do teorema VI A para todos os termos pares negativos ou ímpares existentes na série limitada até à ordem 2p.
4) Então se 1, 2 e 3) forem satisfeitos podemos afirmar que φ tem um extremo em P, definível até à ordem 2p.
5) Se as condições (nomeadamente 2 e 3) não forem satisfeitas poderá tentar-se uma série finita mais extensa de ordem $> 2p$ e repetir a verificação.

Finalmente tem interesse fazer uma referência ao emprego de ordenadores para resolver os sistemas de desigualdades lineares relativos ao teorema VI A.

Com efeito, os métodos mecanográficos são particularmente úteis na resolução destes sistemas de desigualdades.

Note-se que se as funções forem polinomiais, pode tratar-se desde início a série finita cuja ordem é igual ao grau de polinomio.

ALGUMAS REFERÊNCIAS

— The Theorey of functions of a real Variable — Dover - Hobson
— Treatise on Diferencial Equations — Mc. Millan — Forsyth
— The Theory of Matrices — Chelsea — Gantmacher
- Matrix Calculus - Norlh-Holland — Bodewig

RESUMO

Generalização a um espaço de n dimensões dos Teoremas e métodos já apresentados.

RÉSUMÉ

Généralisation a un espace a n dimentions des theorémes e méthodes déjá présentés.

SUMARY

Generalisation to a n dimentional Space of the Theoremes and methods already presented.