ANTÓNIO GOUVÊA PORTELA
PROFESSOR DO I. S. T.

PROBLEMA DE EXTREMOS

«TÉCNICA»
Revista dos Alunos do I. S. T.
Separata do n.º 333 — Págs. 147 a 157

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
LISBOA
1963

C. D. U. 517.514.2 : 536.7

PROBLEMA DE EXTREMOS

POR ANTÓNIO GOUVÊA PORTELA
PROFESSOR DO I. S. T.

Representação no espaço Ω (x, y)

Porque é fácil de interpretar gràficamente as diversas situações encontradas e descritas nos capítulos anteriores, vamos aqui apresentar um espaço Ω (x, y) que é particularmente adequado á representação gráfica.

a) *Apresentação do espaço Ω*

Seja:

$$1)\quad \begin{cases} |h| = q^x \\ |k| = q^y \end{cases} \qquad \text{sendo} \quad 2)\quad \begin{cases} |h| < |\delta| < q < 1 \\ |k| < |\delta| < q < 1 \end{cases}$$

$$\text{e} \qquad q > 0$$

Então será:

$$3)\quad \begin{cases} \lim\limits_{|h| \to 0} x = +\infty \\ \lim\limits_{|k| \to 0} y = +\infty \end{cases} \qquad \text{e} \qquad 4)\quad \begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \end{cases}$$

e ao ponto P (h = 0, k = 0) corresponderá em Ω o ponto π ($x = +\infty$, $y = +\infty$).

O problema básico consiste em comparar, em valores absolutos, dois termos:

$$|M_{a,b}\, h^a\, k^b| \qquad \text{e} \qquad |M_{i,j}\, h^i\, k^j|$$

tendo as letras a significado anteriormente dado.

Para que

$$5)\quad \begin{cases} |M_{a,b}\, h^a \,.\, k^b| > |M_{i,j} \,.\, h^i \,.\, k^j| \\ \text{e} \quad |h| \ \text{e} \ |k| < |\delta| \\ \text{e} \quad |\delta| \ \text{suficientemente pequeno} \end{cases}$$

Será necessário e suficiente que:

$$6)\quad \Big\{ [a-i]\, x + [b-j]\, y \Big\} \,.\, \operatorname{Ln} q > \operatorname{Ln} \left| \frac{M_{i,j}}{M_{a,b}} \right|$$

$$\text{e} \qquad x, y > A \qquad \text{e} \quad A \ \text{suficientemente grande}$$

Com efeito; a desigualdade 5) pode escrever-se:

$$|h|^{a-i}\, |k|^{b-j} > \left| \frac{M_{ij}}{M_{a,b}} \right| \qquad \text{e} \quad |h|, |k| < \delta$$

mas tendo em vista 1), será:

$$q^{(a-i)\,x + (b-j)\,y} > \left| \frac{M_{ij}}{M_{a,b}} \right| \qquad \text{e} \quad x, y > N >> 0$$

ou finalmente.

$$6)\quad \Big\{ [a-i]\, x + [b-j]\, y \Big\} \,.\, \operatorname{Ln} q > \operatorname{Ln} \left| \frac{M_{ij}}{M_{a,b}} \right|$$

Tendo em vista que: $-\infty > \text{Ln}\, q < 0$ (porque $0 < q < 1$), teremos:

$$6\,a) \quad [a-i]\,x + [b-j]\,y < \text{Ln}\left|\frac{M_{ij}}{M_{a,b}}\right| \times \frac{1}{\text{Ln}\, q}$$

$$< -\text{Ln}\left|\frac{M_{ij}}{M_{a,b}}\right| \times \frac{1}{|\text{Ln}\, q|} = -Q_{ij}$$

Na forma 6 a), Q_{ij} tem o sinal de $\text{Ln}\left|\frac{M_{ij}}{M_{a,b}}\right|$

O domínio da existência de $\pi(x, y)$ será o 1.º quadrante descontando duas margens correspondentes a

$$x = 1 \rightarrow |h| = q$$

$$y = 1 \rightarrow |k| = q$$

os contornos $x = 1$ e $y = 1$ não pertencem ao domínio de $\pi(x, y)$.

Gràficamente, o domínio D de $\pi(x, y)$ está representado na figura 1.

Note-se ainda que $|Q_{ij}| < \infty$

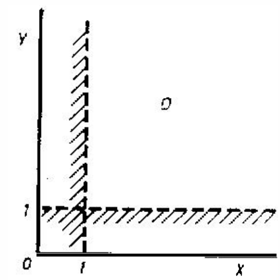


Fig. 1

Estudo da desigualdade $(a-i)\,x + (b-j)\,y < -Q_{ij}$ *(6 a)*

Vamos estudar alguns casos típicos que, em conjunto, cobrem as situações que interessam ao problema de extremos.

1.º Tipo $\begin{cases} a - i = \alpha_i > 0 \\ \beta - j = \beta_j > 0 \end{cases}$ A desigualdade (6 a) toma a forma seguinte:

$$\alpha_i\, x + \beta_j\, y < -Q_{ij} \qquad (7)$$

Na Fig. 1.1 esta representado o Domínio D de existência de $\pi(x, y)$.

É evidente que $\pi(+\infty, +\infty)$ está fora desse domínio pois $|Q_{ij}| < \infty$.

Note-se ainda que se $Q_{ij} < \alpha_j + \beta_j$ o Domínio D não tem existência.

2.º Tipo $\begin{cases} a - i = -\alpha_i < 0 \\ b - j = -\beta_j < 0 \end{cases}$ A desigualdade (6 a) toma a forma: $-\alpha_i\, x - \beta_j\, y < -Q_{ij}$

ou (8) $\alpha_i\, x + \beta_j\, y > Q_{ij}$

Na Fig. 1.2 está representado o domínio de existência de $\pi(x, y)$ e é fácil de ver que contém o ponto $\pi(+\infty, +\infty)$ bem como a sua vizinhança.

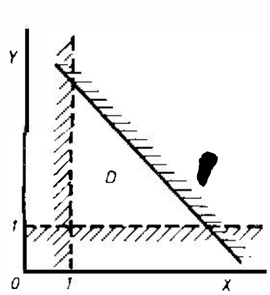


Fig. 1.1

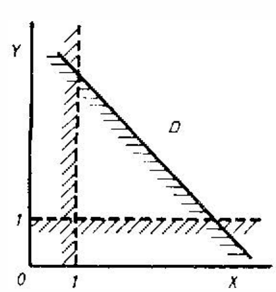


Fig. 1.2

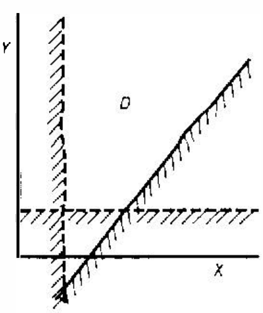


Fig. 1.3

3.º Tipo $\begin{cases} a - i = \alpha_i > 0 \\ b - j = -\beta_j < 0 \end{cases}$ Donde (9) $\alpha_i\, x - \beta_j\, y < -Q_{ij}$

Na Fig. 1.3 está representado o Domínio D de existência de $\pi(x, y)$ que inclui $\pi(+\infty, +\infty)$.

Note-se que $y > \frac{\alpha_i}{\beta_i} . x + \frac{Q_{ij}}{\beta}$.

4.º *Tipo* $\begin{cases} a - i = -\alpha_i < 0 \\ b - j = \beta_j > 0 \end{cases}$ Donde (10) $-\alpha_i x + \beta_j y < -Q_{ij}$

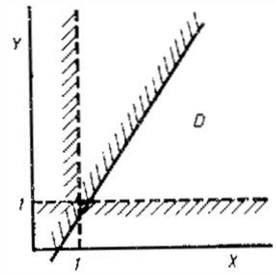


Fig. 1.4

Na Fig. 1.4 está representada a expressão (10) e o domínio D de π (x, y) que inclui π $(+\infty, +\infty)$, finalmente será :

$$y < \frac{\alpha_i}{\beta_j} . x - Q_{ij}$$

5.º *Tipo* $\begin{cases} a - i = 0 \\ b - j = -\beta_j < 0 \end{cases}$ Donde (11) $y > \frac{Q_{ij}}{\beta_j}$

Veja-se Fig. 1.5 ; o domínio D inclui π (∞, ∞) sempre, pois $\left| \frac{Q_{ij}}{\beta_j} \right| < \infty$

6.º *Tipo* $\begin{cases} a - i = 0 \\ b - j = \beta_j > 0 \end{cases}$ Donde (12) $y < -\frac{Q_{ij}}{\beta_j}$

Veja-se Fig. 1.6 ; o domínio D, se existir inclui π (∞, ∞), mas para que exista será necessário que : $-\frac{Q_{ij}}{\beta_j} > 1$.

7.º *Tipo* $\begin{cases} a - i = -\alpha_i < 0 \\ b - j = 0 \end{cases}$ Donde (13) $x > \frac{Q_{ij}}{\alpha_i}$

Veja-se Fig. 1.7, o domínio D existe sempre e contém π (∞, ∞).

8.º *Tipo* $\begin{cases} a - i = \alpha_i > 0 \\ b - j = 0 \end{cases}$ Donde (14) $x < -\frac{Q_{ij}}{\alpha_i}$

Se D existir inclui π (∞, ∞) e para que exista terá de ser : $-\frac{Q_{ij}}{\alpha_i} > 1$, veja-se Fig. 1.8.

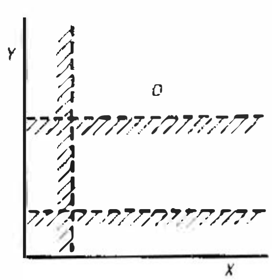


Fig. 1.5

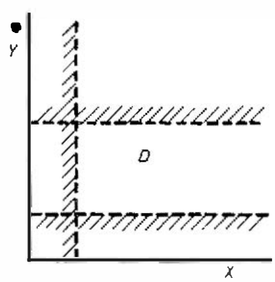


Fig. 1.6

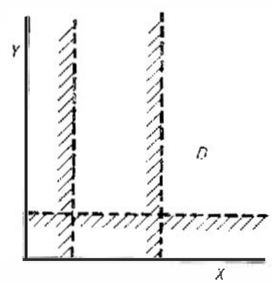


Fig. 1.7

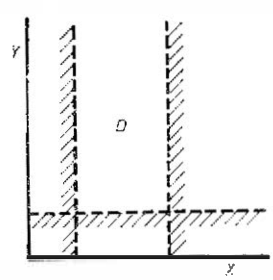


Fig. 1.8

Estudo de sistemas de desigualdades

Procura-se aqui resolver o problema seguinte:

Saber se o valor absoluto de um termo dado $| M_{a,b} h^a k^b |$ é maior que os valores absolutos de vários termos $| M_{ij} h^i k^j |$ simultâneamente e do que a sua soma.

Para o efeito estudaremos vários casos que, em conjunto, resolvem todas as possibilidades.

Caso A — No sistema de desigualdades existe uma do *tipo 1*.
Então para x, y > | A | e | A | suficientemente grande, essa desigualdade não será satisfeita e, portanto, o sistema.
O termo (a, b) não é maior, simultâneamente, que o conjunto dos termos e portanto do que a sua soma.

Caso B — No sistema de desigualdades existem uma ou várias desigualdades do tipo 2.
Então para x, y > | A | e | A | suficientemente grande, as desigualdades do tipo 2 serão sempre satisfeitas quaisquer que sejam os valores de x, y arbitrados (desde que x, y > | A |).
Podem estas desigualdades ser suprimidas do sistema.

Caso C — No sistema de desigualdades existem n com a forma: $\alpha_{ik}\, x - \beta_{jk}\, y < - Q_{ijk}$ sendo $\alpha_{jk} \geq 0$ e $\beta_{jk} \geq 0$ mas não $\alpha_{ik} = \beta_{jk} = 0$, ou seja tipos: 3, 5 e 8.
Existirá sempre um valor | A | suficientemente grande tal que, se x, y > | A | , bastará verificar se a desigualdade para a qual corresponde a maior relação $\dfrac{\alpha_{il}}{\beta_{jl}}$ é satisfeita, e sendo satisfeita, todas as restantes o serão.

Com efeito:

$$\text{Se } \beta_{jk} \neq 0 \quad \text{será} \quad y > \frac{\alpha_{ik}}{\beta_{jk}}\, x + Q_{ijk}$$

$$\text{e } \left(\frac{\alpha_{ik}}{\beta_{jk}} - \frac{\alpha_{il}}{\beta_{jl}} \right) x + (Q_{ijk} - Q_{ijl}) \quad \text{será}$$

negativo se $\dfrac{\alpha_{ik}}{\beta_{jk}} > \dfrac{\alpha_{il}}{\beta_{jl}}$ e x > | A | e A suficientemente grande.

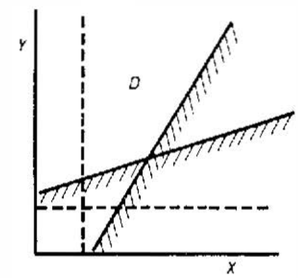


Fig. 2.1

Se $\beta_{jk} = 0$ será $\alpha_i\, x < - Q_{ij}$ e se esta desigualdade for satisfeita $\left(\dfrac{-Q_{ij}}{\alpha_i} > 1 \right)$ então sê-lo-á para qualquer x > | A | o que conclui a demonstração.
O termo (a, b) é então maior do que qualquer dos termos (i j k), no domínio D que contém $\pi\ (+\infty, +\infty)$.

Caso D — No sistema de desigualdades existem n de forma: $-\alpha_{ik}\, x + \beta_{jk}\, y < - Q_{ijk}$ e $\alpha_{ik} > 0$, $\beta_{jk} > 0$ mas não $\alpha_{ik} + \beta_{jk} = 0$.
Tal como em c) se a desigualdade a que corresponde a menor relação $\dfrac{\alpha_{jk}}{\beta_{jk}}$ for satisfeita todas as restantes o serão. Novamente o termo (a, b) será maior que qualquer dos n termos (i, j k), no domínio D que contém $\pi\ (+\infty, +\infty)$.

Caso E — Suponhamos que o sistema está reduzido já a duas desigualdades:

$$\begin{cases} \alpha_i\, x - \beta_j\, y < - Q_{ij} \\ -\alpha_k\, x + \beta_l\, y < - Q_{kl} \end{cases} \qquad \text{(Fig. 2.2)}$$

A primeira representará a desigualdade de maior $\dfrac{\alpha_i}{\beta_j}$ (caso C).

A segunda representará a desigualdade de menor $\dfrac{\alpha_k}{\beta_l}$ (caso D).

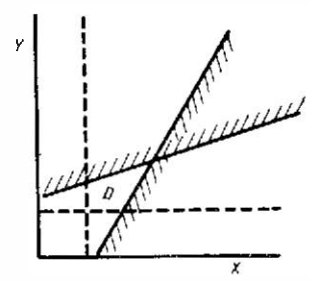


Fig. 2.2

Então, se $\left(\frac{\alpha_i}{\beta_j} > \frac{\alpha_k}{\beta_l}\right)$, para x, y, $> |A|$ e $|A|$ suficientemente grande, as duas desigualdades não serão satisfeitas simultâneamente.
O termo (a, b) não será maior do que todo e qualquer termo (i, j) ou (k, l), simultaneamente.

Caso F — Nas condições de E porém $\left|\frac{\alpha_i}{\beta_j} < \frac{\alpha_k}{\beta_l}\right|$, então para x, y $> |A|$ e $|A|$ suficientemente grande a totalidade das desigualdades serão satisfeitas e o termo (a, b) é maior do que todo e qualquer termo (i, j) ou (k, l) no domínio D que contém $\pi(+\infty, +\infty)$. Veja-se Fig. 2,3.

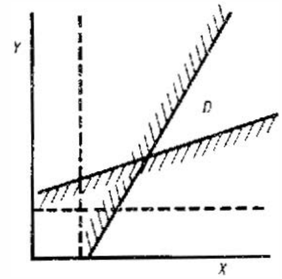


Fig. 2.3

Caso G — Nas condições já referidas em E e F mas $\left|\frac{\alpha_i}{\beta_j} = \frac{\alpha_k}{\beta_l}\right|$.

Seja dado o sistema:

$$\begin{cases} -\alpha_i\, x + \beta_j\, y < -Q_{ij} \\ +\alpha_k\, x - \beta_l\, y < -Q_{kl} \end{cases}$$

Para que o sistema tenha solução será necessário que:

$$\begin{cases} -\dfrac{Q_{ij}}{\beta_j} > \dfrac{Q_{kl}}{\beta_l} & \text{Se } \beta_j\,,\ \beta_l \neq 0 \\[2ex] -\dfrac{Q_{kl}}{\alpha_k} > \dfrac{Q_{ij}}{\alpha_i} & \text{Se } \beta_j = \beta_l = 0 \end{cases}$$

A demonstração é evidente.

Note-se que sendo β_j, β_l, α_k $\alpha_i < \infty$, será ainda: Se $\begin{cases} \beta_j = 0 \\ \beta_j \neq 0 \end{cases}$ será $\begin{cases} \beta_l = 0 \\ \beta_l \neq 0 \end{cases}$

e é idênticamente para α_i e α_k.

Finalmente: Se $\beta_j, \beta_l \neq 0$ será:

$$-\frac{Q_{ij}}{\beta_j} > y - \frac{\alpha_i}{\beta_j}x = y - \frac{\alpha_k}{\beta_l}x > \frac{Q_{kl}}{\beta_l}$$

Se $\beta_j = \beta_l = 0$ será:

$$-\frac{Q_{kl}}{\alpha_k} > x > \frac{Q_{ij}}{\alpha_i}$$

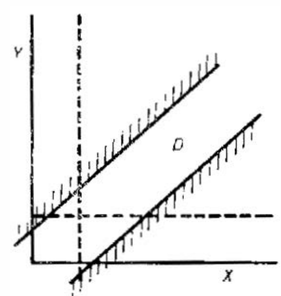


Fig. 2.4

Como Lim $|Q_{ij}| < |\varepsilon_1|$ e Lim $|Q_{kl}| < |\varepsilon_2|$ para $|q| < \varepsilon_3$ veja-se a definiçãode Q_{ij}), para $|\varepsilon_3|$ suficientemente pequeno será:

$$\begin{cases} \beta_j = \beta_l = 0 \\ \quad x \to \infty \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} \beta_j\,,\ \beta_l \neq 0 \\ y = \dfrac{\alpha_i}{\beta_j}x = \dfrac{\alpha_k}{\beta_l}x \end{cases}$$

Caso H — Neste caso estuda-se a situação de vários termos (ip, jp) e de um termo (a, b) ligados entre si por desigualdades do tipo referido no Caso C. Procura-se provar que existe um domínio D onde

$$|M_{a,b}|\ |h|^{a}\ .\ |k|^{b} > \sum_{p}^{n} |M_{ip,\,jp}|\ .\ |h|^{ip}\ .\ |k|^{jp} \qquad p = 1, \dots n$$

Sejam dadas n desigualdades de forma

$$a) \quad \left\{ \alpha_{ip}\, x - \beta_{jp}\, y < - Q_{ijp} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{ip} \geq 0 \\ \beta_{jp} \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{mas não: } \alpha_{ip} = \beta_{jp} = 0$$

Todas satisfazendo às condições indicadas já, ao tratar dos tipos 3, 5 e 8.
E quer provar-se que:

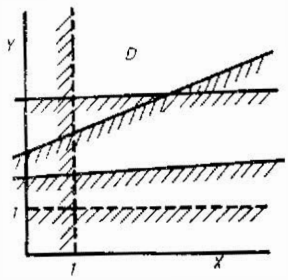


Fig. 2.5

$$\left\{ \begin{array}{l} b) \quad |M_{a,b}| \,.\, |h|^{a} \,.\, |k|^{b} > \sum_{p=1}^{n} |M_{ip,jp}| \,.\, |h|^{ip} \,.\, |k|^{jp} \\ \text{se} \quad c) \quad |M_{a,b}| \,.\, |h|^{a} \,.\, |k|^{b} > |M_{ip,jp}| \,.\, |h|^{ip} \,.\, |k|^{jp} \end{array} \right.$$

para todos os p (1, ... n)

Dividindo b) por $|M_{a,b}| \,.\, |h|^{a} \,.\, |k|^{b} \neq 0$, teremos

$$1 > \sum_{p=1}^{n} \frac{|M_{ip,jp}|}{|M_{a,b}|} \,.\, |h|^{(ip-a)} \,.\, |k|^{(jp-b)}$$

ou ainda fazendo $\left\{ \begin{array}{l} |h| = q^{x} \\ |k| = q^{y} \end{array} \right.$

Será, nas condições já referidas atrás,

$$1 > \sum_{p=1}^{n} \frac{|M_{ip,jp}|}{|M_{a,b}|} \,.\, q^{-x\,(a-ip)\,-\,y\,(b-jp)}$$

$$\text{ou} \quad 1 > \sum_{p=1}^{n} \frac{|M_{ip,jp}|}{|M_{a,p}|} \,.\, q^{-\alpha_{ip}\, x + \beta_{jp}\, y}$$

tendo em atenção a hipótese referida em a) será ainda:

$$1 > \sum_{p=1}^{n} e^{\left(-\alpha_{ip}\, x + \beta_{jp}\, y + \mathrm{Ln} \left| \frac{M_{ijp}}{M_{ab}} \right| \,.\, \frac{1}{\mathrm{Ln}q} \right) \mathrm{Ln}q}$$

$$1 > \sum_{I_{j}=1}^{n} e^{(\alpha_{ip}\, x - \beta_{jp}\, y + Q_{ijp}) \,.\, |\mathrm{Ln}q|}$$

mas de a) será $\alpha_{ip}\, x - \beta_{jp}\, y + Q_{ijp} = - |A_p| < 0$
Donde:

$$1 > \sum_{p=1}^{n} e^{-|A_p| \,.\, |\mathrm{Ln}q|}$$

mas como A_p se pode fazer arbitràriamente grande, a desigualdade c) será sempre satisfeita. Note-se que $|\mathrm{Ln}_q|$ também se pode fazer arbitràriamente grande para $|q| < 1$.
É fácil de ver que se as desigualdades fossem do tipo 4, 6 e 7, a demonstração seguiria os mesmos passos e atingir-se-ia o mesmo resultado.

Caso I — Interessa aqui averiguar qual o valor da soma S na hipótese de se verificar o caso C, sendo S dado pela expressão:

$$\left\{ \begin{array}{l} S = |M_{a,b}\, h^{a} \,.\, k^{b}| - \{ |M_{i1,j1}\, h^{i1}\, k^{j1}| + |M_{i2,j2}\, h^{i2}\, k^{j2}| \} \\ \text{e desejando-se que} \rightarrow S \geq 0. \end{array} \right.$$

S pode ainda escrever-se:

$$S = |M_{a,b}\, h^a\, k^b| \left\{ 1 - \left[\frac{|M_{i1,j1} \cdot h^{i} \cdot k^{j1}|}{|M_{a,b}\, h^a\, k^b|} + \frac{|M_{i2,j2}\, h^{i2}\, k^{j2}|}{|M_{a,b}\, h^a\, k^b|} \right] \right\}$$

o parêntese pode representar-se no espaço Ω (x y) sob a seguinte forma:

$$1 - e^{-(-\alpha_{i1} x + \beta_{j1} y) \operatorname{Ln} q + \operatorname{Ln} \frac{|M_{i1,j1}|}{M_{a,b}}} -$$

$$- e^{-(\alpha_{i2} x - \beta_{j2} y) \operatorname{Ln} q + \operatorname{Ln} \frac{|M_{i2,j2}|}{|M_{a,b}|}}$$

ou

$$1 - e^{-(\alpha_{i1} x + \beta_{j1}) \operatorname{Ln} q} \times \left| \frac{M_{i1j1}}{M_{ab}} \right| -$$

$$- e^{-(\alpha_{i2} x - \beta_{j2} y) \operatorname{Ln} q} \cdot \left| \frac{M_{i2j2}}{M_{ab}} \right|$$

$$\text{Seja:} \quad \left\{ \begin{array}{l} -(\alpha_{i2} x - \beta_{i2} y) \operatorname{Ln} q = \beta_{j2} \left(y - \dfrac{\alpha_{i2}}{\beta_{j2}} \right) \operatorname{Ln} q \\ \qquad\qquad = \beta_{j2} \times z \\ \text{e} \\ -(\alpha_{i1} x + \beta_{j1} y) \operatorname{Ln} q = -\beta_{i1} \times z \end{array} \right.$$

Teremos:

$$1 - \underbrace{\left\{ e^{-\beta_{j2} z} \cdot \left| \frac{M_{ij1}}{M_{ab}} \right| + e^{+\beta_{j2} z} \cdot \left| \frac{M_{ij2}}{M_{ab}} \right| \right\}}_{\uparrow F}$$

o mínimo do parêntese F será, (se $\beta_{i2} > 0$).

$$-\beta_{j1} \left| \frac{M_{ii}}{M_{ab}} \right| \cdot e^{-\beta_{j1} z} + \beta_{j2}\, e^{+\beta_{j2} z} \left| \frac{M_{ij2}}{M_{ab}}\, x \right| = 0$$

ou

$$\frac{\beta_{i1} \left| \dfrac{M_{ij1}}{M_{ab}} \right|}{\beta_{j2} \left| \dfrac{M_{ij2}}{M_{ab}} \right|} = e^{(\beta_{j2} + \beta_{j1}) z}$$

ou

$$z_m = \frac{\operatorname{Ln} \left(\dfrac{\beta_{j1} \left| \dfrac{M_{ij1}}{M_{ab}} \right|}{\beta_{j2} \left| \dfrac{M_{ij2}}{M_{ab}} \right|} \right)}{\beta_{j2} + \beta_{j1}}$$

Derivando uma segunda vez. Vem

$$\underset{>0}{+\beta_{j1}^2} \underset{>0}{\left| \frac{1}{a} \right|} \underset{>0}{e^{-\beta_{j1} z}} + \underset{>0}{\beta_{j2}^2} \underset{>0}{\left| \frac{1}{a} \right|} \underset{>0}{e^{+\beta_{j2} z}}$$

Portanto terá um mínimo o parêntese F para $z = z_m$

Como se deseja que $S > 0$, mas F é mínimo para $z = z_m$, terá de ser $F \leq 1$. Mas já vimos em G que para $|q|$ suficientemente pequeno será $\alpha_{i1} x - \beta_{j2} y = \alpha_{i2} x - \beta_{j2} = 0$ ou $\beta_{j2} + z = 0$ donde finalmente $z = 0$ porque β_{j2}.

Como $\beta_{j1} + \beta_{j2} > 0$ porque $\beta_{j1} \geq 0$ e $\beta_{j2} > 0$, será:

$$d) \qquad \frac{\beta_{j1}}{\beta_{j1}} \cdot \left| \frac{\frac{M_{ij1}}{M_{ab}}}{\frac{M_{ij2}}{M_{ab}}} \right| = 1 \qquad (\text{porque } z = 0)$$

Esta será pois a condição para que $z = 0$ e daí que $S = 0$. Se $|q|$ for suficientemente pequeno e $x, y > |A|$ e $|A|$ suficientemente grande.

Se tal condição $d)$ se verificar é porque o termo (A, b) pode igualar a soma dos outros dois.

A demonstração foi feita para $B_{j1} > 0$, é fácil de demonstrar para $\beta_{j1} > 0$.

Se $\beta_{j1} = \beta_{j2} = 0$ bastará fazer:

$$\begin{cases} -(\alpha_{i2} - \beta_{j2} y) \operatorname{Ln} q = \alpha_{i2} \cdot z & (\alpha_{i2} > 0) \\ -(-\alpha_{i1} + \beta_{j1} y) \operatorname{Ln} q = -\alpha_{i1} z & \end{cases}$$

e daí

$$z_m = - \frac{\operatorname{Ln} \left(\frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{i2}} \right) \cdot \left| \frac{\frac{M_{ij1}}{M_{ab}}}{\frac{M_{ij2}}{M_{ab}}} \right|}{\alpha_{i2} + \alpha_{i2}}$$

e a condição $d)$ escreve-se:

$$\frac{\alpha_{i2}}{\alpha_{i2}} \cdot \left| \frac{\frac{M_{ij1}}{M_{ab}}}{\frac{M_{ij2}}{M_{ab}}} \right| = 1$$

Note-se que é sempre possível normalizar o sistema dando-lhe a forma

$$\begin{cases} -\alpha_i x + B_j y \leq -Q_{ij} \\ +\alpha_i x - B_j y \leq -Q_{kl} \end{cases}$$

e então será:

$$\left| \frac{M_{ij1}}{M_{ij2}} \right| = 1$$

Esta expressão é extremamente simples.

Note-se ainda que substituindo em F se obtém:

$$e^{-0} \left| \frac{M_{ij1}}{M_{ab}} \right| + e^{+0} \left| \frac{M_{ij2}}{M_{ab}} \right| = 1 \quad \text{para } z = 0$$

e se desejarmos que $s = 0$, será:

$$|M_{ij1}| + |M_{ij2}| = |M_{ab}|$$

Assim as duas condições a satisfazer serão:

$$\begin{cases} \frac{\beta_{j1}}{\beta_{j2}} \left| \frac{M_{ij1}}{M_{ij2}} \right| = 1 \\ \text{e} \\ |M_{j1}| + |M_{ij2}| = |M_{ab}| \end{cases}$$

Resumo do Método

Tendo em vista o que foi anteriormente demonstrado, pode propor-se o método seguinte que tem a vantagem de ser gráfico:

1) Se existir uma desigualdade do tipo 1, o termo $|(a, b)|$ não é maior do que a soma dos restantes termos $|(i, j)|$ (veja-se caso A) porque não é maior, pelo menos, que um deles.
2) Todas as desigualdades do tipo 2, podem ser retiradas do sistema de desigualdades, porque para $|A|$ suficientemente grande são todas satisfeitas para x e y quaisquer. (Veja-se caso B).
3) Todas as desigualdades dos tipos 3, 5 e 8, podem ser substituídas pela desigualdade a que corresponder o *maior* coeficiente angular (para $|A|$ suficientemente grande). (Veja-se caso C) Note-se desde já que, se se verificar a situação indicada mais adiante, em 7, há que regressar à alínea 3) como se mostrará oportunamente.
4) Todas as desigualdades dos tipos 4, 6 e 7, podem ser substituídas pela desigualdade de menor coeficiente angular (para $|A|$ suficientemente grande). (Veja-se caso D) e com a mesma (ressalva) já referida em 3).
5) Se confrontadas as duas desigualdades apuradas em 3) e 4) se encontrar uma situação E então $|(a, b)|$ *não* é maior simultâneamente que o conjunto dos termos $|(i\,j)|$ e portanto que a sua soma (para $|A|$ suficientemente grande).
6) Se confrontadas as duas desigualdades apuradas em 3) e 4) se encontrar uma situação F, então $|(a, b)|$ é maior que qualquer termo $|(i, j)|$ em confronto e ainda que a sua soma (Veja-se também caso H), para $|A|$ suficientemente grande.
7) Se confrontadas as duas desigualdades apuradas em 3) e 4) se apurar uma situação G, então há que proceder como se indica em I.

Então dois casos se podem dar:

ou se verifica que z_m *é nulo* e então, para $|A|$ suficientemente grande, a soma $|(a, b)| - |(i\,j)| - |(k, l)| < \delta$ e δ é suficientemente pequeno.
Nesta hipótese os três termos podem ser retirados do confronto.

ou z_m *não é nulo* e então o termo $|(a, b)|$ não domina a soma dos termos $|(i, j)| + |(k, l)|$ em conjunto e o domínio D não contém $\pi\,(+\infty, +\infty)$.

Nota final:

O estudo deste método (gráfico), para ser perfeitamente entendido, terá de ser confrontado com o método inicialmente exposto.

Designaremos este método por «método gráfico» porque se ajusta fàcilmente à representação gráfica, conforme se mostra adiante numa aplicação aos dois exemplos já apresentados no final do método anterior.

Aplicação

Para o efeito, vamos recorrer ao exemplo já dado anteriormente, isto é, averiguar se as funções seguintes têm um extremo no ponto (0,0)

$$f\,(x_1\ y) = x^2 - 2\,x\,y^2 + y^4 - 2\,y^5$$
$$\varphi\,(x_2\ r) = x^2 - 2\,x\,y^2 + y^4 + y^6$$

Desenvolvendo em série de Taylor teremos:

$$f\,(h, k) - f\,(0, 0) = \Delta\, f_{00} + \frac{1}{2\,!}\,\Delta^2 f_{00} + \frac{1}{3\,!}\,\Delta^3 f_{00} + -$$

ou seja:

$$f\ (h\ k) - f\ (0,0) = 1\ .\ h^2 - 2\ .\ h^1\ k^2 + 1\ .\ k^4 - 2\ \ k^5$$

e $$f\ (h\ k) - \varphi\ (0,0) = 1\ .\ h^2 - 2\ \ h^1\ k^2 + 1\ \ k^4 + 1\ .\ k^6$$

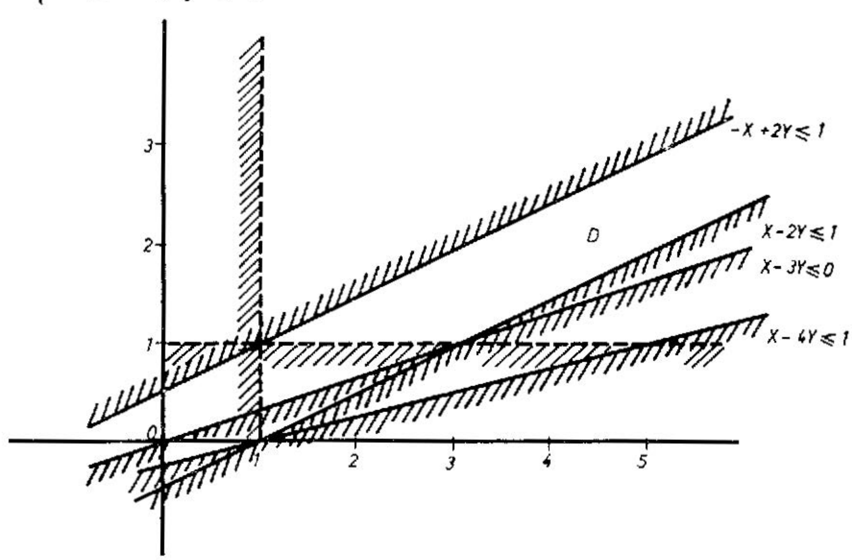
Para a função f e φ pode formar-se o seguinte quadro:

		$\frac{M_{i,j}}{M_{a,b}}$	$Ln_2 \frac{M_{i,j}}{M_{a,b}}$	$Ln_2\ q$ e $q = x$	$Ln_2 \frac{M_{ij}}{M_{ab}} \cdot \frac{1}{Ln_2\ q}$	$a - i$	$b - j$
f	$h^2\ k^0$	$\frac{1}{2}$	-1	-1	1	-1	2
	$h^0\ k^4$	$\frac{1}{2}$	-1	-1	1	1	-2
	$h^0\ s^5$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1	-3
φ	$h^2\ k^0$	$\frac{1}{2}$	-1	-1	1	-1	2
	$h^0\ k^4$	$\frac{1}{2}$	-1	-1	1	1	-2
	$h^0\ k^6$	$\frac{1}{2}$	-1	-1	1	1	-2

Donde resultam as desigualdades seguintes:

$$f \rightarrow \begin{cases} x - 2\ y \leqslant 1 \\ -x + 2\ y \leqslant 1 \\ x - 3\ y \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\varphi \rightarrow \begin{cases} x - 2\ y \leqslant 1 \\ -x + 2\ y \leqslant 1 \\ x - 4\ y \leqslant 1 \end{cases}$$



Note-se que as coordenadas x, y agora empregadas pertence ao espaço $\Omega(x, y)$.
É fácil de representar estas desigualdades no espaço $\Omega(x, y)$.

Verifica-se que tanto para φ como para f se encontra o caso descrito em G. $\left(\frac{Q_{ij}}{\beta_i} > \frac{Q_{ke}}{\beta_e}\right)$

Com efeito: $\left(\frac{1}{2} > -\frac{1}{2}\right)$.

Então, calculemos z_m como se aconselha em I

$$z_m = \frac{Ln\left(\frac{\beta_i}{\beta_e} \cdot \frac{M_{ij}}{M_{ab}} \Big/ \frac{M_{ke}}{M_{ab}}\right)}{\beta_i + \beta_e} = \frac{Ln\left(\frac{2}{2} \cdot \frac{-1}{-1}\right)}{2 + 2} = 0$$

Portanto para $x, y > |A|$ e $|A|$ suficientemente grande será $| |(a, b)| - |(i, j)| - |(k, e)| | < \delta$ Por mais pequeno que seja δ.

Donde as séries $\left(f(h, k) - f(0, 0)\right)$ e $\left(\varphi(h, k) - \varphi(0, 0)\right)$ terão um sinal que dependerá do sinal de $-2k^3$ e $1.k^6$ respectivamente, se $x, y > |A|$ e $|A|$ suficientemente grande, ou seja $|h|$, $|k| < \delta$ e δ suficientemente pequeno.

Então como $-2k^3$ (para $k > 0$) é negativo e $1.k^6 > 0$ qualquer que seja o sinal de h, k e ainda por $k > 0$ não torna o termo $h^1 k^2$ positivo, então pode concluir-se que a função f não tem um mínimo em $(0, 0)$ e a função φ tem um mínimo em (00).

Advertência

Aproveita-se a oportunidade para chamar a atenção para os termos de expoente ímpar que se comportam como termos pares.

O termo $-2h^1 k^2$ só é negativo se $h > 0$ (k pode ser $+$ ou $-$).

O termo $-2h^0 k^3$ só é negativo se $k > 0$ (h pode ser $+$ ou $-$).

Portanto pode simultâneamente impor-se $h > 0$ e $k > 0$.

Contudo o termo $+|a| h^1 k^6$ que também é ímpar, quando se impõe $h > 0$, como convém para tornar o termo $-2h^1 k^2$ negativo, isso implica tornar o termo $|a| h^1 k^6$ *positivo* e inversamente

Isto é, há termos ímpares que são sempre positivos quando o termo ímpar em estudo é negativo.

Termos desta natureza comportam-se em relação ao referido termo ímpar (no exemplo $-2h^1 k^2$) como positivo para o efeito da comparação.

Este ponto não foi referido expressamente ao tratarmos os Teoremas II, III, IV e X, deduzidos anteriormente.

Na continuação deste artigo, será apresentada uma generalização a um espaço de n dimensões.

RESUMO

Neste artigo apresenta-se um método gráfico para tratar problemas de extremos.

SUMMARY

In this article is presentad a graphical method to treat the problem of extremes.