ANTÓNIO GOUVÊA PORTELA
ENGENHEIRO MECÂNICO

Sistemas Elásticos de *n* Graus de Liberdade

«TÉCNICA»
Revista dos Alunos do I. S. T.
Separata do n.º 296 — Págs. 73 a 82

INSTITUTO SUPERIOR TECNICO
LISBOA
1959

C. D. U. 539.3:518.5

Sistemas Elásticos de *n* Graus de Liberdade

PELO ENG.º MECÂNICO (I. S. T.) ANTÓNIO GOUVÊA PORTELA
Prof. do I. S. T.

Introdução

A resolução de sistemas elásticos e viscosos sujeitas a forças exteriores e deslocamentos impostos foi problema que sempre mereceu a maior atenção por parte dos engenheiros.

A dificuldade residia sobretudo no elevado número de operações numéricas necessário à sua resolução o que tornava impraticável o método exacto a partir da ordem 6.

Desenvolveu-se, por isso, toda uma série de métodos aproximados que envolviam sempre simplificações quer do modelo físico quer das operações numéricas a realizar.

Entretanto, dá-se o advento dos calculadores electrónicos e é mister repensar o problema à luz destes novos meios de cálculo.

É nessa intenção que se apresenta uma aplicação do cálculo matricial à resolução do problema onde se cuidou especialmente das forças de atrito viscoso, que são, em geral, sacrificadas nos modelos físicos aproximados pelas dificuldades de cálculo numérico inerentes.

Nesta aplicação admitem-se não só força de atrito em relação ao referencial mas também o atrito dentro do próprio sistema.

Sob o ponto de vista formal considera-se a posição do sistema definida por um tensor de 1.ª ordem x num espaço a n dimensões e estabelece-se por meio duma matriz rectangular a ligação de x no espaço ε_n com as forças aplicadas e deslocamentos impostos descritos num espaço ε'_{n+m}.

Tanto o espaço ε_n como ε_{n+m} são afins (não métricos).

A) Equações diferenciais definidoras do movimento

A 1) Preposição do Problema

Seja dado um sistema S caracterizado por n parâmetros x^i.

A este sistema S aplicam-se n forças sendo $-f_i$ (1) a força segundo x^i, também a este sistema se ligam m deslocamentos y^e que estão correlacionados elástica e viscosamente aos parâmetros x^i.

O Modelo físico admite a hipótese que entre o espaço $(-f_i, y^e)$ de $n+m$ dimensões e o espaço x^i de n dimensões existe uma relação matricial da forma seguinte:

$$\begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & -f_1 & -f_2 & \cdots & -f_n & y^1 & y^2 & \cdots & y^m \\
\hline
x_1 & \alpha^{11} & \alpha^{12} & & \alpha^{1n} & \beta^1_1 & \beta^1_2 & & \beta^1_m \\
x_2 & \alpha^{21} & \alpha^{22} & & \alpha^{2n} & \beta^2_1 & \beta^2_2 & & \beta^2_m \\
\vdots & & \boxed{\underset{n,\,m}{M\alpha}} & & & & \boxed{\underset{n.\,m}{M\beta}} & & \\
x_n & \alpha^{n1} & \alpha^{n2} & & \alpha^{nn} & \beta^n_1 & \beta^n_2 & & \beta^n_m
\end{array} = \underset{n,\,(n+m)}{M}$$

Admite-se ainda que todos os α^{ik} e β^i_e são constantes para um dado modelo.

A matriz $\underset{n,\,(n+m)}{M}$ será, em geral, rectangular.

Designaremos por *coeficientes de influência* aos α^{ik} e β^i_e

(1) O sinal (—) é arbitrário e tem apenas por objectivo dar à formula final um aspecto que a torna semelhante às fórmulas similares encontradas na literatura para sistemas mais simples.

As unidades de medida são diferentes contudo :

$$\alpha^{ik} = \frac{x^i}{-f_k} = \frac{cm}{d_{yn}} \text{ ou } \frac{0^\circ \text{ (ângulo)}}{d_{yn} \times cm} \quad \text{por exemplo}$$

$$\beta^i_e = \frac{y^e}{x^i} = \frac{cm}{cm} \text{ ou } \frac{cm}{0^\circ \text{ (ângulo)}} \quad \text{por exemplo}$$

Partindo a matriz $\underset{n, (n+m)}{M}$ em duas $\underset{n, n}{M_\alpha}$ e $\underset{n, m}{M_\beta}$

Poderá expressar-se a relação entre (f e y) e x da seguinte forma evidente :

$$\underset{n, 1}{[x^i]} = \underset{n, n}{M_\alpha} \, . \, \underset{n, 1}{[-f_k]} + \underset{n, m}{M_\beta} \, . \, \underset{m, 1}{[y^e]}$$

ou na Simbologia de Bodewig :

$$x = - M_\alpha \, . \, f + M_\beta \, . \, y \tag{1}$$

Dum modo geral M_α admite o seu inverso M_α^{-1} e a expressão anterior (1) poderá escrever-se ainda

$$M_\alpha^{-1} \quad x = M_\alpha^{-1} \, . \, M_\alpha \, . \, (-f) + M_\alpha^{-1} \, . \, M_\beta \, . \, y$$

$$M_\alpha^{-1} \, . \, x = -f + M_\alpha^{-1} \, . \, M_\beta \, . \, y \tag{2}$$

A expressão (2) constitui uma aplicação do «método dos coeficientes de influência» mas descrita em simbologia matricial.

A 2) Avaliação das forças $-f$:

Convirá agora estudar a natureza das forças $(-f_i)$.

A força $-f_i$ vai resultar da soma de *forças de inércia* $({}_mf_i)$ forças de *atrito viscoso* $(R_{ik}$ e $r_{ie})$, de *forças aplicadas exteriores* ao sistema $({}_ef_i)$ e de *deslocamentos* (y_e).

a) *Forças de inércia*

Para estas forças admite-se a relação formal seguinte :

$${}_mf_i = m_{ii} \; D^2 \; x_i \qquad\qquad \text{sendo} \quad D^2 = \frac{d^2}{dt^2}$$

Sendo m_{ii} um coeficiente com a natureza de uma massa se x^i for uma distância ou de um momento de inércia se x^i for um ângulo.

A matriz M conforme indicado abaixo

$$\begin{array}{c} \\ {}_mf_1 \\ {}_mf_2 \\ \vdots \\ {}_mf_n \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x^1 & x^2 & \cdots\cdots & x^n \end{array} \\ \left| \begin{array}{cccc} m_{11} & 0 & & 0 \\ 0 & m_{22} & & 0 \\ & & & \\ 0 & & & m_{nn} \end{array} \right| \end{array} = \underset{(n, n)}{M}$$

permitirá escrever:

$$[\,{}_m f_i\,] = M \,.\, D^2\,[\,x_i\,]$$

$$\text{ou} \quad \boxed{{}_m f = M \,.\, D^2\, x} \qquad (3)$$

b) *Forças do tipo R_{ik}*

Consideremos a matriz de Base R_0 com a seguinte forma

$$\begin{array}{c|cccc|}
 & x^1 & x^2 & \dots\dots & x^n \\
\hline
x^1 & R_{11} & R_{12} & & R_{1n} \\
x^2 & R_{21} & R_{22} & & R_{2n} \\
\vdots & & & & \\
x^n & R_{n1} & R_{n2} & & R_{nn}
\end{array} = R_0$$

Segnificando R_{ik} a constante de atrito que liga a força de atrito realizada em x^i em consequência do movimento relativo de x^k.

Admitiremos, no modelo físico em estudo, que se verifica a relação seguinte:

$${}_R f_i = \sum_k R_{ik}\, D\,(x^i - x^k) = (\sum_k R_{ik}) \times D\, x^i - \sum_k R_{ik}\, D\, x^k$$

Se designarmos por:

$$R_a = \left|\begin{array}{ccc}
\sum_k R_{1n} & 0 & 0 \\
0 & \sum_k R_{2k} & 0 \\
0 & & \sum_k R_{nk}
\end{array}\right|$$

será em simbologia matricial:

$$[\,{}_R f_i\,] = R_a\, D\,[\,x^i\,] - R_0\, D\,[\,x^i\,]$$

Designando por $R = R_a - R_0$ com a forma:

$$\text{Bodewig} \left|\begin{array}{ccc}
\left(\sum_k R_{1k}\right) - R_{11} & -R_{12} & -R_{1n} \\
-R_{21} & \left(\sum_k R_{2k}\right) - R_{22} & -R_{2n} \\
-R_{n1} & -R_{n2} & \sum_k R_{nk} - R_{nn}
\end{array}\right| = R = R_a - R_0$$

Será:

$$[\,{}_R f_i\,] = R\, D\,[\,x^i\,]$$

e, em símbolos de Bodewig,

$$\boxed{{}_R f = R \,.\, D \,.\, x} \qquad (4)$$

b_2) *Forças do tipo r_{ie}*

Consideremos de novo uma matriz r_0 de Base com a forma seguinte:

$$\begin{array}{c|cccc|}
 & y^1 & y^2 & \cdots\cdots & y^m \\
x_1 & r_{11} & r_{12} & & r_{1m} \\
x_2 & r_{21} & r_{22} & & r_{2m} \\
\vdots & & & & \\
x_n & r_{n1} & r_{n2} & & r_{nm}
\end{array} = r_0$$

Dum modo semelhante significará r_{ie} a constante de atrito que liga a força de atrito realizada em x^i em consequência do movimento relativo de y^e.

Admitimos que no modelo físico se verifica a relação:

$${}_r f_i = \sum_e r_{ie}\, D\,(x^i - y^e) = \left(\sum_e r_{ie}\right) D\, x^i - \sum_e r_{ie}\, D\, y^e$$

A matriz rectangular $\underset{n,\,(n+m)}{r}$ permitirá uma descrição completa das forças ${}_r f$.

$$\begin{array}{c|cccc|ccc|}
 & x^1 & x^2 & \cdots\cdots & x^n & y^1 & \cdots\cdots & y^m \\
x^1 & \sum_e r_{1e} & 0 & & 0 & -r_{1e} & & -r_{1m} \\
x^2 & 0 & \sum_e r_{2e} & & 0 & -r_{2e} & & -r_{2m} \\
\vdots & & \boxed{\underset{(n,n)}{r_a}} & & & & \boxed{\underset{(n,m)}{r_b} = -r_0} & \\
x^n & 0 & & & \sum_e r_{ne} & -r_{n1} & & -r_{nm}
\end{array} = r$$

Donde $r = r_a + r_b$ e ainda:

$$\boxed{{}_r f = r_a \,.\, Dx + r_b \,.\, Dy = r_a \,.\, Dx - r_0 \,.\, Dy} \tag{5}$$

Resumindo, as forças de atrito viscoso são:

$${}_R f + {}_r f = R\, D_x + r_a D_x - r_0 D y$$

$$\boxed{{}_R f + {}_r f = (R + r_a)\, D\, x - r_0 D y} \tag{6}$$

3 — *Forças aplicadas exteriores* $- {}_e f_i$

o conjunto destas forças constituirá um vector da forma

$$^{(1)}\ \boxed{[-{}_e f_i] = -{}_e f} \tag{7}$$

(1) O sinal (—) não tem qualquer significado e destina-se a dar ao formulário um aspecto geral que coincida com o formulário simplificado referido na literatura.

A 3) **Equações do movimento:**

Expressão geral que define o estado de movimento do sistema.
A expressão (2) diz-nos que:

$$M_\alpha^{-1} \cdot x = -f + M_\alpha^{-1} \cdot M_\beta \cdot y$$

mas

$$f = {}_m f + {}_R f + {}_r f - {}_e f$$

mas atendendo a 3, 4, 5 e 6 . será.

$$f = M \cdot D^2 x + (R + r_a)\, D\, x - r_a\, Dy - {}_e f \tag{8}$$

Substituindo (8) vemos, depois arrumados os termos, por outra ordem:

$$M \cdot D^2 x + (R + r_a)\, D x + M_\alpha^{-1}\, x = M_\alpha^{-1}\, M_\beta \cdot y + r_a Dy + {}_e f \tag{9}$$

Esta expressão em linguagem matricial é formalmente muito semelhante à empregada para resolver o problema equivalente para 1 grau de liberdade.

$$m\, D^2 x + R\, D x + K x = K y + R\, D y + {}_e f$$

O confronto faz-se para mostrar o desenvolvido *conteúdo* da simbologia matricial.
Descrita a equação dinâmica do sistema S terá interesse em resolver dois problemas fundamentais.

— Calcular as frequências próprias do sistema.
— Calcular um integral particular para um dado sistema de forças aplicadas.

B) Frequências Próprias do Sistema

Na determinação das frequências proprias do sistema há que impor a condição que o sistema está livre e então será:

$${}_e f = 0 \qquad y = 0$$

Donde se conclui que

$$Dy = 0$$

A equação (9) reduz-se a:

$$M\, D^2 x + (R + r_a)\, D x + M_\alpha^{-1}\, x = 0 \tag{10}$$

O Método a empregar seguirá a via clássica.
Façamos

$$x^i = a_i\, e^{pt}$$

Sendo: $p = c + d\,j$ a frequência complexa a determinar, a_i uma constante paramétrica.
Será então

$$Dx_i = p \cdot e^{pt} \cdot a_i$$

$$D^2 x_i = p^2\, e^{pt} \cdot a_i$$

Substituindo em (10) e recordando que e^{pt} e p são escalares
Teremos

$$e^{pt} \left\{ p^2\, M\, [a_i] + p\, (R + r_a)\, [a_i] + M_\alpha^{-1} \right\} = 0$$

e como este sistema terá de ser satisfeito qualquer que seja t, será:

$$\{ p^2 M + p (R + r_a) + M_x^{-1} \} . [a_i] = 0$$

ou finalmente

$$p^2 M + p (R + r_a) + M_x^{-1} = 0 \tag{11}$$

A anulação da equação matricial (10) fornecerá uma equação em p de ordem $2 \times n$ cujos $2n$ e raízes (reais ou imaginarias) permitem interpretar o problema.

Assim:

B_1) Se $p_k = a_k \pm b_k j$ sendo a_k e b_k *reais*

Significará que haverá um *frequência própria* b_k, amortecida se a_k for *negativo* (como sucede com o atrito viscoso) ou ressonante se a_k for *positivo* (como sucede se alguns dos R ou r não for um atrito viscoso).

B_2) Se $p_k = a_k \pm b_k$ sendo a_k e b_k *reais*

Significa que o sistema não *vibra* para esse valor de p, e terá um movimento *divergente* ou *convergente* conforme p_k for positivo ou negativo. Se R e r resultarem de atrito viscoso será $a_k + b_k \leqslant 0$.

B_3) Se $p_k = a_k$ sendo a_k real a raiz é múltipla (sem vibração).

B_4) Se $p_k = (a_k \pm b_k i)^p$ a raiz é múltipla e complexa p vezes, etc., etc.

C) Integral particular para o sistema sujeito a forças aplicadas e deslocamentos forçados

O problema terá tantas soluções quantos os esquemas de forças aplicadas e ou deslocamentos forçados.

Porém, sendo aditivos os efeitos resultantes dessa aplicação de forças ou deslocamentos e sendo ainda possível o desenvolvimento em série de Fourier de uma função periódica, bastará estudar os movimentos do sistema pela aplicação simultânea de um sistema de forças ${}_ef_i$ e de deslocamento y_e que gozem da propriedade de serem harmónicas e da mesma frequência.

Seja então

$${}_ef_i = g_i\, e^{st} \qquad \text{sendo: } g_i \text{ a amplitude de } {}_ef_i$$

$$y^e = h_e\, e^{st} \qquad h_e \text{ a » de } y^e$$

Será ainda $\quad D y^e = s \,.\, h_e \,.\, e^{st} \qquad s$ imaginário

O integral particular será de forma:

$$x^i = a_i\, e^{st} \qquad \text{Desde} \qquad D x^i = s \,.\, e^{st} \,.\, a_i$$

$$D^2 x^i = s^2 \,.\, e^{st} \,.\, a_i$$

Substituindo, ${}_ef_i$, y^e, $D y^e$, x^i, $D x^i$, $D^2 x^i$ na equação geral do movimento (9). Teremos:

$$e^{St} \left\{ (s^2 . M + s \,.\, (R + r_a) + M_x^{-1}) \times [a_i] \right\} = \left\{ (M_x^{-1} . M_B . + r_0 \,.\, s) \,.\, [h_e] + [g_i] \right\} e^{st}$$

e como esta expressão terá de ser válida qualquer que seja t, será:

$$[a_i] = \left\{ s^2 M + s \,(R + r_a + M_x^{-1} \right\}^{-1} \cdot \left\{ (M_x^{-1} M_B + r_0 S)\, [h_e] + [g_i] \right\}$$

e o movimento será dado por $[x^i] = \underset{\text{escalar}}{\underset{\sim}{e^{st}}} \,.\, [a^i]$. (1)

(1) O movimento será dado pela componente real de x^i.

Como as matrizes M, R, r_a r_0, M_x^{-1}, são calculáveis a partir das características do sistema e s, $[h_e]$ e $[g_i]$ são dados pelas características das forças aplicadas e deslocamentos forçados, é possível calcular $[a_j]$ e dai $[x^i]$.

D) **Resumo das Operações de Cálculo numérico:**

O método envolve o conhecimento de um certo número de dados a respeito do sistema . e eles são . 5 matrizes:

1) *Dados do sistema*

1.3) A Matriz $M_{\alpha \; n,n} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x^1 & \cdots\cdots & x^n \end{array} \\ \left| \begin{array}{ccc} \alpha_{11} & & \alpha_{1n} \\ & & \\ \alpha_{n1} & & \alpha_{n,n} \end{array} \right| \end{array} \begin{array}{c} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{array}$

1.2) A Matriz $M_{\beta \; n,m} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y^1 & \cdots\cdots & y^n \end{array} \\ \left| \begin{array}{ccc} \beta_1^1 & & \beta_m^1 \\ & & \\ \beta_1^n & & \beta_m^n \end{array} \right| \end{array} \begin{array}{c} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{array}$

1.3) A Matriz $R_{0 \; n,n} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x^1 & \cdots\cdots & x^n \end{array} \\ \left| \begin{array}{ccc} R_{11} & & R_{1n} \\ & & \\ R_{n1} & & R_{nn} \end{array} \right| \end{array} \begin{array}{c} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{array}$

1.4) A Matriz $r_{0 \; n,m} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y^1 & \cdots\cdots & y^m \end{array} \\ \left| \begin{array}{ccc} r_{11} & & r_{1m} \\ & & \\ r_{n1} & & r_{n,m} \end{array} \right| \end{array} \begin{array}{c} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{array}$

1.5) A Matriz $M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x^1 & \cdots\cdots & x^n \end{array} \\ \left| \begin{array}{ccc} m_{11} & & 0 \\ & & \\ 0 & & m_{nn} \end{array} \right| \end{array} \begin{array}{c} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{array}$

2) A partir destes dados é necessário proceder a um certo número de operações, essencialmente 4 operações a saber.

2.1) Inverter a matriz M_χ para obter a matriz M_χ^{-1}

2.2) Obter n somatórios de forma geral $\sum_k R_{ik}$, para formar a matriz R_a.

$$R_a = \begin{array}{c|cc|c} & x^1 \; \cdots\cdots & x^n & \\ & \sum_k R_{ik} & 0 & x^1 \\ & & & \vdots \\ & 0 & \sum_k R_{nk} & x^n \end{array}$$

2.3) Obter n somatórios de forma geral $\sum_e r_{ie}$, para formar a matriz r_a

$$r_a = \begin{array}{c|cc|c} & x^1 \; \cdots\cdots & x^n & \\ & \sum_e r_{ie} & 0 & x^1 \\ & & & \vdots \\ & 0 & \sum_e r_{ne} & x^n \end{array}$$

2.3) Somar as matrizes R_o, R_a e r_a para obter

$$R + r_a = R_a - R_o + r_a$$

Nestas condições é possível escrever a expressão referida em 9)

$$M\ D^2 x + (R + r_a)\ D x + M_\alpha^{-1}\ x = M_\chi^{-1}\ M_B\ y + D\ y + {}_e f$$

3) Para resolver o problema referido em B), isto é, determinar as frequências próprias do sistema é necessário ainda proceder às seguintes operações:

3.1) Multiplicar a matriz M pelo escaler p^2.

Como p é um número complexo da forma $a + bj$ tudo se passa como se tratasse de dois produtos um $(a^2 - b^2)$ e outro $2ab$.

3.2) Multiplicar a matriz $(R + r_a)$ pelo escaler p igualmente haverá que efectuar o dobro das operações por p ser complexo.

3,3) Resolver o determinante Δ formado a partir da equação:

$$\Delta = p^2 M + p\ (R + r_a) + M_\chi^{-1} = 0$$

Este determinante é de ordem n mas em virtude dos elementos serem complexos haverá que proceder ao dobro das operações numéricas.

Com efeito $\Delta = \Delta_a + \Delta_b\, i$ e será necessário que simultâneamente seja $\begin{cases} \Delta_a = 0 \\ \Delta_b = 0 \end{cases}$

3,4) Finalmente haverá que procurar as raízes das equações de ordem $2 \times n$ e discutir os resultados.

4) Para resolver o problema referido em B, tendo já sido efectuadas as operações 2, isto é, procurar o integral particular para um dado sistema de forças e deslocamentos será necessário:

4,1) Repetir as operações 3,1 e 3,2, porém neste caso haverá metade das operações numéricas a realizar porque s é um imaginário puro.

4,2) Inverter a matriz $(s^2 M + s (R + r_a) + M_\chi^{-1})$ esta matriz tem a ordem n.

4,3) Multiplicar $M_\chi^{-1} \times M_\beta$.

4,4) Multiplicar r_0, Matriz (n, m) pela escalar s.

4,5) Somar $(M_\chi^{-1} . M_\beta + s . r_0)$.

4,6) Multiplicar $(M_\chi^{-1} . M_\beta + s\, r_0) \times [h_e]$.

4,7) Somar $(M_\chi^{-1} . M_\beta + s\, r_0) . [h_e] + [g_i]$.

4,8) Multiplicar a matriz obtida em 4,7) que aliás é um vector, pela matriz $(s^2 M + s (R + R_a) + M_\chi^{-1})^{-1}$ para obter o vector $[a^i]$.

4,9) Multiplicar o vector $[a_i]$ pelo escalar e^s para obter o vector $[x^i]$.

* * *

Em resumo da alínea D) pode dizer-se que o número de operações numéricas a realizar, se n e m forem elevados, é tal que só por intermédio de calculadores electrónicos será possível abordar ùtilmente o problema.

Mas, hoje, estando esses meios mecânicos de cálculo ao alcance de quase todos os países já se não justificam os métodos aproximados usados até aqui.

E) Energia do movimento

Tem interesse, por último, calcular a energia posta em jogo no movimento e correlacionar com o trabalho das forças exteriores.

A linguagem matricial é particularmente cómoda.

A expressão (9) pode escrever-se

$$M D^2 x + M_\chi^{-1} x = -(R + r_a) Dx + M_\chi^{-1} M_\beta y + r_0 Dy + ef$$

Internando todos os termos por D_x poderá escrever-se

$$M D^2 x . Dx + M_\chi^{-1} x . Dx = \left(-(R + r_a) Dx + M_\chi^{-1} M_\beta y + r_0 Dy + ef\right)$$

Integrando a expressão acima em ordem ao tempo e recordando que:

$$M, M_\chi^{-1}, R_a + r_a \qquad \text{são constantes}$$

$$D^2 x . D x = \sum_{i=1}^{n} D^2 x^i + D x^i \qquad \text{é um escalar}$$

$$x . D x = \sum_{i=1}^{n} x^i . D x^i \qquad \text{é igualmente um escalar}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} D^2 x . D x\, dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t_1} D^2 x^i . D x^i dt = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \left\{ (D x^i)^2 \right\}_{t_0}^{t_1}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} x . D x\, dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t_1} x_i . D x^i dt = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \left\{ (x^i)^2 \right\}_{t_0}^{t_1}$$

Finalmente que todas as parcelas do parêntise do 2.º membro têm a natureza de uma força, e o seu produto por Dx, significa uma potência e o respectivo integral no tempo um *trabalho.*

Teremos

$$\underbrace{\frac{1}{2} M \cdot \sum_{i=1}^{n} \left((Dx^i)^2\right)_{to}^{t1}}_{\text{Energia cinética do sistema}} + \underbrace{\frac{1}{2} M_\alpha^{-1} \sum_{i=1}^{n} \left((x^i)^2\right)_{to}^{t1}}_{\text{Energia de posição}} =$$

$$= \underbrace{\int_{to}^{t1} \left\{ (R + r_a) \cdot (D x)^2 + r_o D y \right\} \cdot D_x \cdot dt}_{\text{Trabalho de atrito externo e interno}} + \underbrace{\int_{to}^{t1} \left(M_\alpha^{-1} M_\beta \, y + {}_e f \right) D_x \cdot dt}_{\text{Trabalho das forças externas e deslocamentos externos elásticos}}$$

Terminada a exposição do método, em artigos seguintes serão apresentados alguns problemas resolvidos por meio do formulário atrás deduzido.