

COMPANHIA PORTUGUESA DE INDÚSTRIAS NUCLEARES, S.A.R.L.

NOTA TÉCNICA Nº 8

TRANSFORMAÇÃO DE LAPLACE

I - Equações diferenciais ordinárias

LISBOA
1959

I n t r o d u ç ã o

Quer no plano da Física Teórica, quer no nível das suas aplicações práticas, são numerosos os problemas que implicam a resolução de equações diferenciais ordinárias, de derivadas parciais ou, ainda, de equações de diferenças finitas. Não existe qualquer método absolutamente geral para a resolução destas equações e os métodos clássicos, muitas vezes de difícil utilização, são ainda complicados pela necessidade de se atender constantemente às condições nas fronteiras e de se introduzirem as condições iniciais.

Com base no método simbólico de Oliver Heaviside (1850-1925), criou-se, já no nosso século, um processo simples e elegante de resolução de equações, bem fundamentado do ponto de vista matemático, e que é designado por "Cálculo Operacional" ou método da transformação de Laplace.

O que caracteriza este método, e lhe confere o seu principal interesse, é que as condições iniciais e nos limites (fronteiras) são automaticamente satisfeitas no decorrer da solução.

O conhecimento elementar da transformação de Laplace permite a resolução de muitas equações diferenciais ordinárias de coeficientes constantes; para o caso de algumas equações diferenciais "lineares" das equações de derivadas parciais, equações integrais e equações não lineares, é necessário generalizar para o domínio da variável complexa. Nesta primeira parte, faremos apenas o tratamento elementar.

I

Definição da transformação de Laplace

Dada uma função $f(t)$ definida para valores de $t > 0$, e nula para $t \leq 0$ chama-se transformada de Laplace ou imagem de $f(t)$ à função $\bar{f}(p)$ tal que

$$\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (*) \quad (1)$$

que pode escrever-se abreviadamente

$$\bar{f}(p) = L f(t).$$

A única condição que imporemos, por agora, a p é que o seu campo de variação seja tal que o integral (1) exista (ou seja convergente (**)).

Condições de existência

A transformada de Laplace existe para as funções $f(t)$ que satisfaçam a desigualdade

$$|e^{-pt} f(t)| < K e^{-(p-a)t} \quad (2)$$

em que K é uma constante. Quando $p > a$ e $t \rightarrow \infty$ o 2º membro da desigualdade tenderá para zero.

A condição (2) é, pois, equivalente a estoutra

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt} f(t) = 0 \quad (3)$$

Vamos agora demonstrar alguns teoremas que simplificam o cálculo

(*) No integral (1) p é uma variável real ou complexa. Quando p for um imaginário puro, $\bar{f}(p)$ reduz-se à transformada de Fourier de uma função $f(t)$ constantemente nula para $t \leq 0$. Com efeito, recorde-se que a transformada de Fourier, $F(x)$, de uma função $f(t)$ é definida pelo integral

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{itx} dt$$

(**) Um integral $\int_0^{\infty} f(x) dx$ converge, ou é convergente, quando existe e é finito o $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a f(x) dx$.

das transformadas de Laplace.

I. 1 - Teorema da linearidade: "A transformação de Laplace é uma transformação linear que satisfaz o princípio da sobreposição".

É uma consequência imediata da definição da transformação de Laplace e das propriedades dos integrais.

Com efeito, a transformada da função $K f(t)$, em que K é constante, será

$$L K f(t) = K L f(t) = K \bar{f}(p)$$

e, por conseguinte,

$$L \left[K_1 f_1(t) + K_2 f_2(t) \right] = K_1 \bar{f}_1(p) + K_2 \bar{f}_2(p)$$

I. 2 - Teorema: "Se $\bar{f}(p)$ for a transformada de Laplace da função $f(t)$, $\bar{f}(p-a)$ será a transformada da função $e^{at} f(t)$ ".

É, também, uma consequência imediata da definição.

Com efeito,

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} e^{at} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-a)t} f(t) dt = \bar{f}(p-a),$$

donde se conclui que multiplicando uma função $f(t)$ por e^{at} , a transformada da nova função está "desviada" de a em relação à transformada de $f(t)$. Por isso se designa este teorema por 1º teorema da translação (First Shifting Theorem).

Transformadas de derivadas

I. 3 - Teorema: "Se for $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt} f(t) = 0$, as transformadas de Laplace

de $f(t)$ e da sua primeira derivada satisfazem a equação

$$L f'(t) = p \bar{f}(p) - f(0) "$$

Calculemos o integral

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt$$

Integrando por partes, vem

$$= \left[e^{-pt} f(t) \right]_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = -f(0) + p \bar{f}(p)$$

ou

$$L \left[f'(t) \right] = p \bar{f}(p) - f(0)$$

c.d.d.

Para se calcular a transformada da 2ª derivada, procede-se análogamente

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f''(t) dt = \left[e^{-pt} f'(t) \right]_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt$$

e, portanto, se for $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt} f'(t) = 0$, virá

$$\begin{aligned} L f''(t) &= -f'(0) + p L f'(t) = -f'(0) + p \left[p \bar{f}(p) - f(0) \right] = \\ &= -f'(0) + p^2 \bar{f}(p) - p f(0) \\ &= p^2 \bar{f}(p) - p f(0) - f'(0) \end{aligned}$$

Repetindo n vezes este processo, obteríamos a transformada da derivada de ordem n :

$$L f^{(n)}(t) = p^n \bar{f}(p) - p^{n-1} f(0) \dots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

que é apenas válida se $f(t)$ e todas as suas derivadas até à ordem $n-1$ forem contínuas.

Exercícios

- 1 - "Considere-se a função $f(t) = 1$ para $t > 0$. Determine a sua transformada de Laplace".

$$\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{p}$$

- 2 - "Calcule a transformada de Laplace da função

$$f(t) = A + Bt + Ct^2 \quad "$$

Em virtude do teorema (I,1), virá

$$L f(t) = L (A + Bt + Ct^2) = L(A) + L(Bt) + L(Ct^2)$$

$$L(A) = \int_0^{\infty} e^{-pt} A dt = A \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^{\infty} = \frac{A}{p}$$

$$\begin{aligned} L(Bt) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} Bt dt = B L(t) = B \int_0^{\infty} e^{-pt} t dt = B \left\{ \overbrace{\left[-t \frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^{\infty}}^{=0} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{p} \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \right\} = B \frac{1}{p} \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^{\infty} = B \times \frac{1}{p^2} = \frac{B}{p^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L(Ct^2) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} C t^2 dt = C L(t^2) = C \int_0^{\infty} e^{-pt} t^2 dt = \\
 &= C \left\{ \underbrace{\left[-\frac{1}{p} t^2 e^{-pt} \right]_0^{\infty}}_{=0} + \frac{2}{p} \int_0^{\infty} t e^{-pt} dt \right\} = \\
 &= C \frac{2}{p} L(t) = \frac{2C}{p} \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{2C}{p^3}
 \end{aligned}$$

Será, por conseguinte

$$L(A + Bt + Ct^2) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{2C}{p^3}$$

3 - "Calcular a transformada de Laplace da função

$$f(t) = t^n \quad "$$

$$L(t^n) = \int_0^{\infty} e^{-pt} t^n dt = \underbrace{\left[-\frac{1}{p} e^{-pt} t^n \right]_0^{\infty}}_{=0} + \frac{n}{p} \int_0^{\infty} e^{-pt} t^{n-1} dt = \frac{n}{p} L(t^{n-1})$$

Mas

$$L(t^{n-1}) = \int_0^{\infty} e^{-pt} t^{n-1} dt = \frac{n-1}{p} \int_0^{\infty} e^{-pt} t^{n-2} dt = \frac{n-1}{p} L(t^{n-2})$$

$$L(t^{n-2}) = \int_0^{\infty} e^{-pt} t^{n-2} dt = \frac{n-2}{p} \int_0^{\infty} e^{-pt} t^{n-3} dt = \frac{n-2}{p} L(t^{n-3})$$

$$L(t^2) = \frac{2}{p} L(t) \quad (\text{ver problema anterior})$$

$$L(t) = \frac{1}{p^2}$$

Virá pois

$$L(t^n) = \frac{n}{p} \cdot \frac{n-1}{p} \cdot \frac{n-2}{p} \dots \frac{2}{p} \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

4 - "Determinar a transformada de Laplace da função

$$f(t) = e^{\pm Kt} \quad "$$

$$\begin{aligned}
 L(e^{\pm Kt}) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{\pm Kt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p \mp K)t} dt = \left[-\frac{1}{p \mp K} e^{-(p \mp K)t} \right]_0^{\infty} \\
 &= \frac{1}{p \mp K}
 \end{aligned}$$

5 - Determinar a transformada de Laplace da função

$$f(t) = \text{sen } \omega t \quad "$$

$$\begin{aligned} L(\text{sen } \omega t) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} \text{sen } \omega t \, dt = \left[-\underbrace{\frac{1}{p} e^{-pt} \text{sen } \omega t}_{=0} \right]_0^{\infty} + \\ &+ \frac{\omega}{p} \int_0^{\infty} e^{-pt} \cos \omega t \, dt \\ &= \frac{\omega}{p} \left\{ \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \cos \omega t \right]_0^{\infty} - \frac{\omega}{p} \int_0^{\infty} e^{-pt} \text{sen } \omega t \, dt \right\} \\ &= \frac{\omega}{p} \left[\frac{1}{p} - \frac{\omega}{p} L(\text{sen } \omega t) \right] \\ &= \frac{\omega}{p^2} - \frac{\omega^2}{p^2} L(\text{sen } \omega t) \\ \left(1 + \frac{\omega^2}{p^2} \right) L(\text{sen } \omega t) &= \frac{\omega}{p^2} \end{aligned}$$

$$L(\text{sen } \omega t) = \frac{\frac{\omega}{p^2}}{1 + \frac{\omega^2}{p^2}} = \frac{\frac{\omega}{p^2}}{\frac{p^2 + \omega^2}{p^2}} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

Ou, de outro modo:

$$\text{Como: } e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \text{sen } \omega t$$

$$e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \text{sen } \omega t$$

Subtraindo, vem:

$$e^{i\omega t} - e^{-i\omega t} = 2i \text{sen } \omega t \quad \therefore \text{sen } \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$$

e, portanto:

$$\begin{aligned} L(\text{sen } \omega t) &= L\left(\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}\right) = \frac{1}{2i} \cdot L(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega} \right) = \frac{1}{2i} \frac{p + i\omega - p + i\omega}{p^2 + \omega^2} \\ &= \frac{1}{2i} \frac{2i\omega}{p^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \quad (\text{Ver problema N}^\circ 4) \end{aligned}$$

6 - "Determine a transformada de Laplace da função

$$f(t) = t \operatorname{sen} \omega t \quad "$$

Aplicando o teorema (I.3), teríamos

$$L f''(t) = p^2 \bar{f}(p) - p \times f(0) - f'(0)$$

em que

$$f(t) = t \operatorname{sen} \omega t$$

$$f'(t) = \operatorname{sen} \omega t + \omega t \cos \omega t$$

$$f''(t) = 2 \omega \cos \omega t - \omega^2 t \operatorname{sen} \omega t$$

e, portanto,

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 0$$

Teremos, por conseguinte:

$$2 \omega L(\cos \omega t) - \omega^2 L(t \operatorname{sen} \omega t) = p^2 L(t \operatorname{sen} \omega t)$$

$$2 \omega L(\cos \omega t) = (p^2 + \omega^2) L(t \operatorname{sen} \omega t)$$

Mas

$$L(\cos \omega t) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cos \omega t \, dt = \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \cos \omega t \right]_0^{\infty} -$$

$$- \frac{\omega}{p} \int_0^{\infty} e^{-pt} \operatorname{sen} \omega t \, dt = \frac{1}{p} - \frac{\omega}{p} L(\operatorname{sen} \omega t) =$$

$$= \frac{1}{p} - \frac{\omega}{p} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} = \frac{1}{p} \left(1 - \frac{\omega^2}{p^2 + \omega^2} \right) = \frac{1}{p} \frac{p^2}{p^2 + \omega^2} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

Portanto

$$2 \omega \frac{p}{p^2 + \omega^2} = (p^2 + \omega^2) L(t \operatorname{sen} \omega t)$$

$$\text{Donde: } L(t \operatorname{sen} \omega t) = \frac{2 \omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}$$

7 - "Calcule a transformada da função

$$f(t) = \operatorname{sh} \omega t \quad "$$

Por definição

$$\operatorname{sh} \omega t = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}$$

A transformada será

$$\begin{aligned} L(\operatorname{sh} \omega t) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[e^{-(p-\omega)t} - e^{-(p+\omega)t} \right] \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-(p-\omega)t} \, dt - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-(p+\omega)t} \, dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p-\omega} e^{-(p-\omega)t} \right]_0^\infty - \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{p+\omega} e^{-(p+\omega)t} \right]_0^\infty \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{p-\omega} - \frac{1}{2} \frac{1}{p+\omega} = \frac{1}{2} \frac{p+\omega - p+\omega}{p^2 - \omega^2} = \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}
\end{aligned}$$

8 - "Calcule a transformada da função $f(t) = \operatorname{ch} \omega t$ "

Por definição $\operatorname{ch} \omega t = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}$

A transformada será

$$\begin{aligned}
L(\operatorname{ch} \omega t) &= \int_0^\infty e^{-pt} \operatorname{ch} \omega t \, dt = \int_0^\infty e^{-pt} \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} \, dt = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[e^{-(p-\omega)t} + e^{-(p+\omega)t} \right] \, dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-(p-\omega)t} \, dt + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-(p+\omega)t} \, dt \\
&= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{p-\omega} e^{-(p-\omega)t} \right]_0^\infty + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{p+\omega} e^{-(p+\omega)t} \right]_0^\infty \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{p-\omega} + \frac{1}{2} \frac{1}{p+\omega} = \frac{1}{2} \frac{p+\omega + p-\omega}{p^2 - \omega^2} = \frac{p}{p^2 - \omega^2}
\end{aligned}$$

9 - Determine a transformada da função

$$f(t) = \frac{t^n}{n!}$$

Pelo teorema das transformadas das derivadas é

$$L f^{(n)}(t) = p^n \bar{f}(p) - p^{n-1} f(0) - \dots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \quad (1)$$

mas

$$f(t) = \frac{t^n}{n!} \quad f(0) = 0$$

$$f'(t) = \frac{n}{n!} t^{n-1} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad f'(0) = 0$$

$$f''(t) = \frac{n-1}{(n-1)!} t^{n-2} = \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \quad f''(0) = 0$$

.....

$$f^{(n-2)}(t) = \frac{t^2}{2!}$$

$$f^{(n-2)}(0) = 0$$

$$f^{(n-1)}(t) = \frac{t}{1!} = t$$

$$f^{(n-1)}(0) = 0$$

$$f^{(n)}(t) = 1$$

Portanto, substituindo estes valores em (1), vem

$$L(1) = p^n L\left(\frac{t^n}{n!}\right)$$

e como $L(1) = \frac{1}{p}$, teremos

$$\frac{1}{p} = p^n L\left(\frac{t^n}{n!}\right) \quad \therefore \quad L\left(\frac{t^n}{n!}\right) = \frac{1}{p^{n+1}}$$

10 - "Calcular a transformada de Laplace da função

$$f(t) = \cos^2 \omega t \quad "$$

Como

$$\cos 2\omega t = \cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t = \cos^2 \omega t - 1 + \cos^2 \omega t = 2 \cos^2 \omega t - 1$$

vem

$$\cos^2 \omega t = \frac{1 + \cos 2\omega t}{2}$$

e podemos escrever

$$L(\cos^2 \omega t) = L \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-pt} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-pt} \cos 2\omega t dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{2} L(\cos 2\omega t) = \frac{1}{2p} + \frac{1}{2} \frac{p}{p^2 + 4\omega^2} \quad (\text{ver problema No 6})$$

$$= \frac{p^2 + 4\omega^2 + p^2}{2p(p^2 + 4\omega^2)} = \frac{2p^2 + 4\omega^2}{2p(p^2 + 4\omega^2)} = \frac{p^2 + 2\omega^2}{p(p^2 + 4\omega^2)}$$

II

1.- Transformação de equações diferenciais ordinárias

Dada uma equação diferencial ordinária e substituindo cada um dos seus termos pelas respectivas transformadas de Laplace, obtemos uma equação algébrica, em que a incógnita é a transformada da função que satisfaz à equação diferencial.

Resolvendo a equação algébrica, obteremos a solução da equação diferencial proposta pela transformada inversa.

Seja a equação diferencial

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + K^2 q = F(t) \quad (\text{II.a})$$

Multiplicando por e^{-pt} e integrando entre 0 e ∞ , obtemos uma equação entre as transformadas.

Calculemos estas para cada um dos termos:

$$L\left(\frac{d^2 q}{dt^2}\right) = p^2 \bar{q}(p) - pq(0) - q'(0) \quad (\text{pelo teorema I.3})$$

$$L(K^2 q) = K^2 \bar{q}(p)$$

$$L[F(t)] = \bar{F}(p)$$

Substituindo em (II.a), vem

$$p^2 \bar{q}(p) - pq(0) - q'(0) + K^2 \bar{q}(p) = \bar{F}(p) \quad (\text{II.b})$$

$$(p^2 + K^2) \bar{q}(p) = pq(0) + q'(0) + \bar{F}(p)$$

Resolvendo em ordem a $\bar{q}(p)$, vem

$$\bar{q}(p) = \frac{pq(0) + q'(0)}{p^2 + K^2} + \frac{\bar{F}(p)}{p^2 + K^2} \quad (\text{II.c})$$

(II.c) designa-se por equação subsidiária da equação diferencial dada.

A função $p^2 + K^2$ chama-se função característica.

O primeiro termo do 2º membro da equação (II.c), função das condições iniciais, é a transformada da solução que tende para zero quando $t \rightarrow \infty$ e que por isso se chama a solução transitória; o 2º termo é independente das condições iniciais, não se anula quando $t \rightarrow \infty$ e é a transformada da solução a que chamaremos estacionária ou permanente. A primeira corresponde ao integral geral da equação homogênia (sem 2º

membro e a segunda ao integral particular.

Aquelas designações têm origem nos problemas físicos que se traduzem por equações diferenciais ordinárias, nomeadamente nos circuitos eléctricos a que se aplicam tensões, constantes ou variáveis, conhecidas. De facto, nestes casos, e noutros semelhantes em diversos domínios da Física, o integral geral da equação sem 2º membro traduz o regime transitório do circuito que tende a desvanecer-se rapidamente com o tempo; o integral particular traduz o regime estacionário do circuito que persistirá enquanto se mantiver a tensão aplicada.

Ainda por influência dos problemas físicos, $\bar{q}(p)$ designa-se por transformada de resposta e $\bar{F}(p)$ por transformada guia.

Qualquer que seja a equação diferencial ordinária proposta, a equação subsidiária será da forma

$$\bar{q}(p) = \frac{f_1(p)}{f(p)} + \frac{f_2(p)}{f(p)} \quad (\text{II.5})$$

2. Transformada inversa

Determinada a equação subsidiária, teremos que efectuar, como dissemos, a transformada inversa, que representaremos por

$$\bar{L}^{-1} \bar{q}(p) = q(t)$$

e que nos dará a solução $q(t)$ da equação proposta. Nos casos mais frequentes bastará consultar uma tabela de transformadas de Laplace e aplicar o teorema(I.2).

Outras vezes, será preciso modificar previamente a equação subsidiária de modo a decompô-la em termos que figurem nas tabelas. Isto é possível porque, em geral, a equação subsidiária aparece na forma

$$\bar{q}(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$$

quando a equação dada é uma equação diferencial ordinária de coeficientes constantes.

$A(p)$ e $B(p)$ são polinómios sendo, em geral, o grau do primeiro menor que o do segundo.

Neste caso, decompõe-se $B(p)$ em factores e exprime-se $\bar{q}(p)$ numa soma de fracções parciais cuja transformada inversa poderemos, em regra, realizar facilmente.

NOTAS:

1. Para se realizar praticamente a decomposição de um quociente de polinómios numa soma de fracções parciais, procede-se do seguinte modo:
 - a) Factoriza-se o denominador;
 - b) Iguala-se o quociente a uma soma de fracções cujos denominadores são os factores determinados na alínea anterior e cujos numeradores são constantes $c_1, c_2, \dots$ a determinar;
 - c) Para calcular $c_1, c_2, \dots$, multiplicar-se ambos os membros da igualdade resultante pelo menor múltiplo comum dos denominadores do 2º membro (que é igual ao denominador do 1º membro) e igualam-se os coeficientes dos termos semelhantes (em p) de ambos os membros;
 - d) Resolve-se em ordem a $c_1, c_2, \dots$ o sistema de equações resultante.

Exemplo: Decompor em fracções parciais a função

$$\frac{p-1}{p(p^2-p-6)}$$

Vamos factorizar o denominador

$$p^2 - p - 6 = 0$$

$$p = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \begin{matrix} -2 \\ 3 \end{matrix}$$

Portanto

$$p^2 - p - 6 = (p+2)(p-3)$$

Vem, pois

$$\frac{p-1}{p(p^2-p-6)} = \frac{p-1}{p(p+2)(p-3)} = \frac{c_1}{p} + \frac{c_2}{p+2} + \frac{c_3}{p-3}$$

e, multiplicando ambos os membros por $p(p+2)(p-3)$,

$$p-1 = c_1(p+2)(p-3) + c_2(p-3)p + c_3(p+2)p$$

$$= c_1(p^2-p-6) + c_2p^2 - 3c_2p + c_3p^2 + 2c_3p$$

$$= (c_1+c_2+c_3)p^2 + (2c_3-3c_2-c_1)p - 6c_1$$

Igualando os coeficientes dos termos semelhantes de ambos os membros, teremos

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ 2c_3 - 3c_2 - c_1 = 1 \\ 6c_1 = 1 \end{cases} \quad \therefore c_1 = \frac{1}{6}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{6} + c_2 + c_3 = 0 \\ 2c_3 - 3c_2 - \frac{1}{6} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 6c_2 + 6c_3 = -1 \\ -18c_2 + 12c_3 = 7 \end{cases}$$

$$18c_2 + 18c_3 = -3$$

$$-12c_2 - 12c_3 = +2$$

$$-18c_2 + 12c_3 = 7$$

$$\frac{-18c_2 + 12c_3 = 7}{-30c_3 = 9}$$

$$30c_3 = 4 \quad \therefore c_3 = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$$

$$-30c_2 = 9$$

$$c_2 = -\frac{3}{10}$$

Será, por conseguinte,

$$\frac{p-1}{p(p^2 - p - 6)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{p} - \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{p+2} + \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{p-3}$$

2. Se todas as n raízes de $B(p)$ são diferentes, diremos que $\frac{A(p)}{B(p)}$ tem n polos simples ou de 1ª ordem.

Seria então

$$\bar{q}(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{c_1}{p - r_1} + \frac{c_2}{p - r_2} + \dots + \frac{c_n}{p - r_n} \quad (1)$$

Para se calcular c_K , neste caso, multiplicam-se ambos os membros da equação (1) por $p - r_K$ e toma-se o limite para $p \rightarrow r_K$. Teríamos assim

$$(p - r_K) \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{c_1(p - r_K)}{p - r_1} + \frac{c_2(p - r_K)}{p - r_2} + \dots + c_K + \dots + \frac{c_n(p - r_K)}{p - r_n}$$

e, tomando os limites:

$$\lim_{p \rightarrow r_K} (p - r_K) \frac{A(p)}{B(p)} = c_K \quad (2)$$

Como é evidente, o 1º membro de (2) conduzirá sempre a uma indeterminação que será necessário levantar ou então, o que é mais directo, fazer previamente a simplificação.

No exemplo da nota anterior que só tem polos simples, viria, aplicando a regra de l'Hôpital:

$$c_1 = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p-1}{p(p^2-p-6)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^2-p}{p^3-p^2-6p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{2p-1}{3p^2-2p-6} = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} c_2 &= \lim_{p \rightarrow -2} (p+2) \frac{p-1}{p^3-p^2-6p} = \lim_{p \rightarrow -2} \frac{p^2+p-2}{p^3-p^2-6p} = \\ &= \lim_{p \rightarrow -2} \frac{2p+1}{3p^2-2p-6} = \frac{-4+1}{12+4-6} = -\frac{3}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_3 &= \lim_{p \rightarrow 3} (p-3) \frac{p-1}{p^3-p^2-6p} = \lim_{p \rightarrow 3} \frac{p^2-4p+3}{p^3-p^2-6p} = \\ &= \lim_{p \rightarrow 3} \frac{2p-4}{3p^2-2p-6} = \frac{6-4}{27-6-6} = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

Notemos ainda que, neste caso, como é

$$L^{-1} \frac{1}{p-r_K} = e^{r_K t}$$

$q(t)$, ou seja a transformada inversa de $\bar{q}(p)$, é a soma das transformadas inversas de termos da forma $c_K \cdot \frac{1}{p-r_K}$:

$$\boxed{q(t) = \sum_{K=1}^n \lim_{p \rightarrow r_K} (p-r_K) \bar{q}(p) e^{p t}} \quad (3)$$

3. Se $B(p)$ tiver K raízes iguais a r , diremos que $\bar{q}(p)$ tem um polo de ordem K . A decomposição de $B(p)$ em factores dará

$$B(p) = (p-r_1)^K (p-r_2) \dots$$

$$\bar{q}(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{c_1'}{(p-r_1)^K} + \frac{c_1''}{(p-r_1)^{K-1}} + \dots + \frac{c_1^{(K)}}{p-r_1} + \frac{c_2}{p-r_2} + \frac{c_3}{p-r_3} + \dots$$

Multiplicando ambos os membros por $(p-r_1)^K$, vem:

$$(1) (p-r_1)^K \bar{q}(p) = c_1' + (p-r_1)c_1'' + \dots + (p-r_1)^{K-1}c_1^{(K)} + \frac{(p-r_1)^K c_2}{p-r_2} + \dots$$

ou

$$\frac{A(p)}{(p-r_2)(p-r_3)\dots} = c_1' + (p-r_1)c_1'' + \dots + (p-r_1)^{K-1}c_1^{(K)} + \frac{(p-r_1)^K c_2}{p-r_2} + \dots$$

Para calcularmos c'_1 bastar-nos-á, então, fazer nesta expressão $p=r_1$:

$$c'_1 = \frac{A(p)}{(p-r_2)(p-r_3)\dots} = \left[(p-r_1)^K \bar{q}(p) \right]_{p=r_1} \quad (2)$$

Derivando a expressão (1) em ordem a p , viria

$$(3) \quad \frac{d}{dp} (p-r_1)^K \bar{q}(p) = c''_1 + \dots + (K-1)(p-r_1)^{K-2} c^{(K)}_1 + \text{termos com o factor } (p-r_1)$$

que nos permite calcular c''_1 , fazendo $p = r_1$:

$$c''_1 = \left[\frac{d}{dp} (p-r_1)^K \bar{q}(p) \right]_{p=r_1} \quad (4)$$

Derivando (3), obteríamos

$$\frac{d^2}{dp^2} (p-r_1)^K \bar{q}(p) = 2c''_1 + \dots + (K-1)(K-2)(p-r_1)^{K-3} c^{(K)}_1 + \text{termos}$$

com o factor $p-r_1$

e, fazendo $p = r_1$, calcularíamos c''_1 :

$$c''_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{d^2}{dp^2} (p-r_1)^K \bar{q}(p) \right]_{p=r_1}$$

Procedendo do mesmo modo, poderíamos calcular sucessivamente as constantes $c^{(n)}_1$. Em geral, será

$$c^{(n)}_1 = \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} (p-r_1)^K \bar{q}(p) \right]_{p=r_1}$$

As constantes $c_2, c_3, \dots$ são calculadas como no caso dos polos simples.

Determinados os valores das constantes $\bar{q}(p)$, ficaria decomposta em fracções parciais e tendo presente que, pelo teorema I.2, é

$$L^{-1} \frac{1}{(p-r_1)^n} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{r_1 t}$$

vir-nos-ia

$$q(t) = \left[c_1' \frac{t^{K-1}}{(K-1)!} + c_1'' \frac{t^{K-2}}{(K-2)!} + \dots \right] e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + c_3 e^{r_3 t} + \dots$$

que poderia também escrever-se

$$q(t) = \frac{1}{(K-1)!} \left[\frac{d^{K-1}}{dp^{K-1}} (p-r_1)^K \bar{q}(p) e^{pt} \right]_{p=r_1} +$$

$$+ \sum_{i=2}^n \left[(p-r_i) \bar{q}(p) e^{pt} \right]_{p=r_i}$$

Exemplo: "Decompor em frações parciais a função

$$\frac{p-1}{(p-2)^2 p^3} \quad "$$

A função tem um polo de 2ª ordem $p=2$ e outro de 3ª ordem $p=0$.

$$\frac{p-1}{(p-2)^2 p^3} = \frac{c_1'}{(p-2)^2} + \frac{c_1''}{p-2} + \frac{c_2'}{p^3} + \frac{c_2''}{p^2} + \frac{c_2'''}{p}$$

Virá, então de acordo com (2), (4) e seguintes:

$$c_1' = \left[(p-2)^2 \frac{p-1}{(p-2)^2 p^3} \right]_{p=2} = \frac{1}{8}$$

$$c_1'' = \left[\frac{d}{dp} (p-2)^2 \frac{p-1}{(p-2)^2 p^3} \right]_{p=2} = \left[\frac{d}{dp} \frac{p-1}{p^3} \right]_{p=2} = \left[\frac{p^3 - (p-1)3p^2}{p^6} \right]_{p=2}$$

$$= \left[\frac{p^3 - 3p^3 + 3p^2}{p^6} \right]_{p=2} = \left[\frac{-2p^3 + 3p^2}{p^6} \right]_{p=2} = \left[\frac{-2p+3}{p^4} \right]_{p=2}$$

$$= -\frac{1}{16}$$

$$c_2' = \left[\frac{p-1}{(p-2)^2} \right]_{p=0} = -\frac{1}{4}$$

$$c_2'' = \left[\frac{d}{dp} \frac{p-1}{(p-2)^2} \right]_{p=0} = \left[\frac{(p-2)^2 - 2(p-1)(p-2)}{(p-2)^4} \right]_{p=0} = \frac{4-4}{16} = 0$$

$$c_2''' = \left[\frac{1}{2} \frac{d^2}{dp^2} \frac{p-1}{(p-2)^2} \right]_{p=0} = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dp} \frac{p-2-2(p-1)}{(p-2)^3} \right]_{p=0} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dp} \frac{-p}{(p-2)^3} \right]_{p=0} = \frac{1}{2} \left[\frac{-(p-2)^3 + p3(p-2)^2}{(p-2)^6} \right]_{p=0} = \frac{1}{2} \frac{8}{64} = \frac{1}{16}$$

vem, pois

$$\frac{p-1}{(p-2)^2 p^3} = \frac{1}{8(p-2)^2} - \frac{1}{16(p-2)} - \frac{1}{4p^3} + \frac{1}{16p}$$

Exercícios

Determine as equações subsidiárias das seguintes equações diferenciais:

$$1. -L \frac{di}{dt} + Ri = E \quad \text{com } i(0) = 0$$

$$i = i(t)$$

Pelo teorema I.3, é

$$L \frac{di}{dt} = p \bar{i}(p) - i(0)$$

$$= p \bar{i}(p)$$

$$L(Ri) = R \bar{i}(p)$$

$$L(E) = \frac{E}{p}$$

Portanto:

$$p \bar{i}(p) + R \bar{i}(p) = \frac{E}{p}$$

$$(p + R) \bar{i}(p) = \frac{E}{p}$$

$$\bar{i}(p) = \frac{E}{p(p + R)} \quad \text{--- equação subsidiária}$$

$$2. -L \frac{di}{dt} + Ri = V \sin(\omega t + \alpha)$$

$$L \sin(\omega t + \alpha) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin(\omega t + \alpha) dt =$$

$$= \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \sin(\omega t + \alpha) \right]_0^{\infty} + \frac{\omega}{p} \int_0^{\infty} e^{-pt} \cos(\omega t + \alpha) dt =$$

$$= \frac{1}{p} \sin \alpha + \frac{\omega}{p} \left[\frac{1}{p} e^{-pt} \cos(\omega t + \alpha) \right]_0^{\infty} - \frac{\omega^2}{p^2} \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin(\omega t + \alpha) dt$$

$$= \frac{1}{p} \sin \alpha + \frac{\omega}{p^2} \cos \alpha - \frac{\omega^2}{p^2} \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-pt} \sin(\omega t + \alpha) dt}_{L \sin(\omega t + \alpha)}$$

$$\left(1 + \frac{\omega^2}{p^2}\right) L \sin(\omega t + \alpha) = \frac{1}{p} \sin \alpha + \frac{\omega}{p^2} \cos \alpha$$

$$L \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) = \frac{\frac{1}{p} \operatorname{sen} \alpha + \frac{\omega}{p^2} \cos \alpha}{1 + \frac{\omega^2}{p^2}} = \frac{p \operatorname{sen} \alpha + \omega \cos \alpha}{p^2 + \omega^2}$$

Por conseguinte, vem:

$$L p \bar{i}(p) + R \bar{i}(p) = V \frac{p \operatorname{sen} \alpha + \omega \cos \alpha}{p^2 + \omega^2}$$

donde

$$\bar{i}(p) = \frac{V}{L p + R} \cdot \frac{p \operatorname{sen} \alpha + \omega \cos \alpha}{p^2 + \omega^2} \quad \text{- equação subsidiária}$$

$$3. - \frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y = 0; \quad y(0) = y_0; \quad y'(0) = V_0$$

Pelo teorema I.3, vem:

$$\begin{aligned} L y''(t) &= p^2 \bar{y}(p) - p y(0) - y'(0) \\ &= p^2 \bar{y}(p) - p y_0 - V_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L y'(t) &= p \bar{y}(p) - y(0) \\ &= p \bar{y}(p) - y_0 \end{aligned}$$

$$L y(t) = \bar{y}(p)$$

Por conseguinte:

$$p^2 \bar{y}(p) - p y_0 - V_0 + 3 p \bar{y}(p) - 3 y_0 + 2 \bar{y}(p) = 0$$

$$(p^2 + 3p + 2) \bar{y}(p) = p y_0 + V_0 + 3 y_0$$

$$\bar{y}(p) = \frac{(p+3)y_0 + V_0}{p^2 + 3p + 2} \quad \text{- equação subsidiária}$$

4. - "Determinar a solução da equação diferencial do problema 1".

$$L \frac{di}{dt} + R i = E$$

Vimos que a equação subsidiária é

$$\begin{aligned} \bar{i}(p) &= \frac{E}{p(pL + R)} \\ &= \frac{E}{L p \left(p + \frac{R}{L}\right)} = \frac{\frac{E}{L}}{p \left(p + \frac{R}{L}\right)} \end{aligned}$$

Nas tabelas de transformadas vem que

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{p(p+a)} \longrightarrow f(t) = \frac{1}{a} (1 - e^{-at})$$

Será pois

$$i(t) = \frac{E}{L} \cdot \frac{L}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right)$$

5. - Integrar a equação diferencial

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + K^2 q = E$$

para as condições iniciais $q(0) = q'(0) = 0$ ".

Temos que

$$L q(t) = \bar{q}(p)$$

$$L E = \frac{E}{p}$$

e pelo teorema I.3

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} = p^2 \bar{q}(p) - p q(0) - q'(0) = p^2 \bar{q}(p)$$

e, portanto

$$p^2 \bar{q}(p) + K^2 \bar{q}(p) = \frac{E}{p}$$

donde

$$\bar{q}(p) = \frac{E}{p(p^2 + K^2)} \quad \text{- equação subsidiária}$$

Na tabela das transformadas vê-se que

$$q(t) = \frac{E}{K^2} (1 - \cos Kt) \quad \text{- solução da equação dada.}$$

6. - Resolver a equação diferencial

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y = 0$$

Supondo as condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ ".

Temos que

$$Ly(t) = \bar{y}(p)$$

e pelo teorema I.3

$$L \frac{d^2 y}{dt^2} = p^2 \bar{y}(p) - p y(0) - y'(0) = p^2 \bar{y}(p) - 1$$

$$L \frac{dy}{dt} = p \bar{y}(p) - y(0) = p \bar{y}(p)$$

e, por conseguinte;

$$p^2 \bar{y}(p) - 1 + 3p \bar{y}(p) + 2\bar{y}(p) = 0$$

$$(p^2 + 3p + 2) \bar{y}(p) = 1$$

donde

$$\bar{y}(p) = \frac{1}{p^2 + 3p + 2} \quad - \text{equação subsidiária}$$

cuja transformada inversa não figura nas tabelas, pelo menos nesta forma.

Vamos decompor o denominador num produto:

$$p^2 + 3p + 2 = 0$$

$$p = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$$

Portanto:

$$p^2 + 3p + 2 = (p+1)(p+2)$$

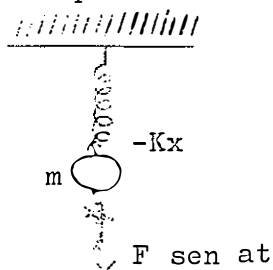
e, portanto:

$$\bar{y}(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)}, \text{ que já figura na tabela}$$

A solução da equação será, pois

$$y(t) = \frac{1}{2} (e^{-t} - e^{-2t}) = e^{-t} - e^{-2t}$$

7. - Suspende-se um corpo de massa m de uma mola, fixa na outra extremidade. Aplicando ao corpo uma força variável dada por $F \sin at$, determinar a equação do movimento resultante, sabendo que a mola exerce sobre o corpo forças proporcionais à distância à posição de equilíbrio".



Pela equação fundamental da dinâmica

$$\vec{f} = m \vec{a}$$

$$\text{ou } f = m a$$

No nosso caso, será

$$f = F \sin at - Kx$$

$$e \quad a = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

e, portanto

$$F \sin at - Kx = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

ou

$$\frac{F}{m} \sin at - \frac{K}{m} x = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

ou, ainda

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{K}{m} x = \frac{F}{m} \sin at$$

Se fizermos $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$, poderemos escrever

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = \frac{F}{m} \sin at$$

que vamos integrar.

Vamos supor que no instante inicial o corpo está em repouso na posição de equilíbrio.

As condições iniciais serão, por hipótese,

$$x(0) = x'(0) = 0$$

Será

$$L x''(t) = p^2 \bar{x}(p) - \underbrace{px(0) - x'(0)}_{= 0} = p^2 \bar{x}(p)$$

$$L x(t) = \bar{x}(p)$$

$$L \sin at = \frac{a}{p^2 + a^2}$$

e, portanto,

$$p^2 \bar{x}(p) + \omega^2 \bar{x}(p) = \frac{F}{m} \frac{a}{p^2 + a^2}$$

$$(p^2 + \omega^2) \bar{x}(p) = \frac{F}{m} \frac{a}{p^2 + a^2}$$

$$\bar{x}(p) = \frac{F}{m} \frac{a}{(p^2 + a^2)(p^2 + \omega^2)} \quad - \text{equação subsidiária}$$

As raízes do denominador são ia , $-ia$, $i\omega$ e $-i\omega$.

Virá

$$\bar{x}(p) = \frac{F}{m} \frac{a}{(p+ia)(p-ia)(p+i\omega)(p-i\omega)}$$

como a função só tem polos simples, poderemos aplicar a equação (3) da nota 2 (pág. 14):

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{F}{m} \left[\lim_{p \rightarrow -ia} \frac{a}{(p-ia)(p+i\omega)(p-i\omega)} e^{pt} + \right. \\
 &\quad + \lim_{p \rightarrow ia} \frac{a}{(p+ia)(p-ia)(p+i\omega)(p-i\omega)} e^{pt} + \\
 &\quad \left. + \lim_{p \rightarrow i\omega} \frac{a}{i\omega(p+ia)(p-ia)(p+i\omega)} e^{pt} + \lim_{p \rightarrow -i\omega} \frac{a}{-i\omega(p+ia)(p-ia)(p-i\omega)} e^{pt} \right] \\
 &= \frac{F}{m} \left[\frac{a e^{-iat}}{(-2ia)i(\omega-a)i(-a-\omega)} + \frac{a e^{iat}}{(2ia)i(\omega+a)i(a-\omega)} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{a e^{i\omega t}}{i(\omega+a)i(\omega-a)2i\omega} + \frac{a e^{-i\omega t}}{i(a-\omega)i(-\omega-a)(-2i\omega)} \right] \\
 &= \frac{F}{m} \left[\frac{a e^{-iat}}{2ia(\omega^2 - a^2)} + \frac{a e^{iat}}{2ia(\omega^2 - a^2)} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{a e^{i\omega t}}{2i\omega(a^2 - \omega^2)} + \frac{a e^{-i\omega t}}{2i\omega(a^2 - \omega^2)} \right] \\
 &\quad \text{e como } e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \\
 &= \frac{F}{m} \left[\frac{a (\cos at + i \sin at - \cos at + i \sin at)}{2ia(\omega^2 - a^2)} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{a (\cos \omega t + i \sin \omega t - \cos \omega t + i \sin \omega t)}{2i\omega(a^2 - \omega^2)} \right] \\
 &= \frac{F}{m} \left[\frac{\cancel{2} \cancel{i} \cancel{a} \sin at}{\cancel{2} \cancel{i} \cancel{a} (\omega^2 - a^2)} + \frac{\cancel{2} \cancel{i} a \sin \omega t}{\cancel{2} \cancel{i} \omega (a^2 - \omega^2)} \right] \\
 &= \frac{F}{m} \frac{1}{\omega^2 - a^2} (\sin at - \frac{a}{\omega} \sin \omega t)
 \end{aligned}$$

solução da equação do movimento em que ω é a frequência natural

III.

Propriedades da transformação de Laplace.

Vamos agora estudar alguns teoremas que facilitam a resolução e interpretação das soluções das equações diferenciais.

III.1 - Teorema do valor inicial: "Se $f(t)$ e $f'(t)$ tiverem transformadas de Laplace, o comportamento de $f(t)$ na vizinhança do ponto $t=0$, é idêntico ao comportamento de $p \bar{f}(p)$ na vizinhança de $p = \infty$ "

Ou analiticamente,

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \bar{f}(p)$$

Demonstração:

Vimos que a transformada da derivada $f'(t)$, é

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt = p \bar{f}(p) - f(0) \quad (1)$$

Para calcularmos o limite do integral do 1º membro quando $p \rightarrow \infty$, normalmente calcularíamos o integral e tomaríamos depois o limite para $p = \infty$.

Mas como p é independente de t e a igualdade (1) implica a existência do integral podemos fazer tender $p \rightarrow \infty$ antes da integração. Mas, então, o primeiro membro da igualdade é nulo e teremos

$$0 = \lim_{p \rightarrow \infty} [p \bar{f}(p) - f(0)] \quad \therefore \lim_{p \rightarrow \infty} p \bar{f}(p) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$$

c.d.d.

Em virtude deste teorema, poderemos, a partir da equação subsidiária, determinar o comportamento de um sistema na vizinhança do ponto $t = 0$ sem ser necessário o cálculo da transformada inversa.

III.2 - Teorema do valor final "Se $f(t)$ e $f'(t)$ tiverem transformadas de Laplace, e se existir o limite de $f(t)$ quando $t \rightarrow \infty$, o comportamento de $f(t)$, na vizinhança de $t = \infty$, corresponde ao comportamento de $p \bar{f}(p)$ na vizinhança de $p = 0$:

$$\lim_{p \rightarrow 0} p \bar{f}(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \quad "$$

Demonstração:

O ponto de partida é ainda a expressão da transformação da derivada

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt = p \bar{f}(p) - f(0)$$

Por motivos análogos aos que invocamos no teorema anterior calculamos o limite da função integranda do 1º membro antes

de efectuar a integração. Virá

$$\int_0^{\infty} f'(t) dt = \lim_{p \rightarrow 0} [p \bar{f}(p) - f(0)]$$

mas

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f'(t) dt &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f'(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} [f(t)]_0^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} [f(t) - f(0)] \end{aligned}$$

Igualando os 2^{os} membros das duas últimas equações, vem:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [f(t) - f(0)] = \lim_{p \rightarrow 0} p [\bar{f}(p) - f(0)]$$

Como $f(0)$ não é função de t nem de p , vem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0) = \lim_{p \rightarrow 0} p \bar{f}(p) - f(0)$$

ou

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \bar{f}(p)$$

c.d.d.

Observação: Este teorema não pode aplicar-se, como é óbvio, quando $f(t)$ é uma função oscilatória. É o caso de $\sin \omega t$, visto que $\sin \infty$ não tem valor definido

Derivação e integração:

III.3 - Teorema de derivação: "Se existirem as transformadas de Laplace de $f(t)$ e $f'(t)$, e se $p \bar{f}(p)$ tiver denominador de grau superior ao numerador, a multiplicação de $\bar{f}(p)$ por p corresponde à derivação de $f(t)$ em ordem a t ."

Demonstração:

Partamos ainda da transformada de Laplace da derivada

$$L f'(t) = p \bar{f}(p) - f(0)$$

para o caso de $f(0)=0$. Teremos por conseguinte que procurar as condições iniciais para que $f(0)=0$.

Em virtude do teorema do valor inicial, será

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = f(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \bar{f}(p)$$

Mas quando o grau do denominador de $p \bar{f}(p)$ for maior que o do numerador, será

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p \bar{f}(p) = 0$$

e, portanto,

$$f(0) = 0$$

Nestas condições, teremos, pois

$$L f'(t) = p \bar{f}(p)$$

c.d.d.

III.4 Teorema da integração: Se existir $\bar{f}(p)$, transformada de Laplace de $f(t)$, a divisão de $\bar{f}(p)$ por p corresponde à integração de $f(t)$ em ordem a t , entre os limites 0 e t . "

Demonstração:

Consideremos o integral $\int_0^t f(t) dt$. A transformada de Laplace

deste integral será, por definição,

$$L \int_0^t f(t) dt = \int_0^\infty e^{-pt} \left[\int_0^t f(t) dt \right] dt$$

Fazendo

$$u = \int_0^t f(t) dt \quad dv = e^{-pt} dt$$

$$du = f(t) dt \quad v = -\frac{1}{p} e^{-pt}$$

será

$$\begin{aligned} L \int_0^t f(t) dt &= Lu = \int_0^\infty u dv = \left[u v \right]_0^\infty - \int_0^\infty v du = \\ &= \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \int_0^t f(t) dt \right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{p} e^{-pt} f(t) dt \end{aligned}$$

Como o 1º termo do 2º membro é evidentemente nulo, teremos:

$$L \int_0^t f(t) dt = \frac{1}{p} \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt = \frac{1}{p} \bar{f}(p)$$

c.d.d.

Vamos agora estudar dois teoremas sobre a multiplicação e divisão por t :

III.5 Teorema da multiplicação por t : "Se $L f(t) = \bar{f}(p)$, será também

$$L t f(t) = - \frac{d}{dp} \bar{f}(p) \quad "$$

Demonstração:

Por definição, a transformada de Laplace de $t.f(t)$ será

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-pt} t f(t) dt &= \\ &= \left[\underbrace{-t f(t) \frac{1}{p} e^{-pt}}_{=0} \right]_0^{\infty} + \\ &+ \frac{1}{p} \int_0^{\infty} e^{-pt} \left[f(t) + t f'(t) \right] dt \end{aligned}$$

O primeiro termo do segundo membro (que obtivemos integrando por partes) é nulo, de modo que vem

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{p} \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt + \\ &+ \frac{1}{p} \int_0^{\infty} e^{-pt} t f'(t) dt . \end{aligned}$$

O primeiro integral é igual a

$\frac{1}{p} \bar{f}(p)$ e o segundo, como se vê ao lado, é

$$\frac{1}{p} \left[-\bar{f}(p) - p \frac{d}{dp} \bar{f}(p) \right]$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-pt} t f(t) dt &= \frac{1}{p} \bar{f}(p) + \frac{1}{p} \left[-\bar{f}(p) - p \frac{d}{dp} \bar{f}(p) \right] \\ &= \cancel{\frac{1}{p} \bar{f}(p)} - \cancel{\frac{1}{p} \bar{f}(p)} - \frac{d}{dp} \bar{f}(p) \end{aligned}$$

ou

$$L t f(t) = - \frac{d}{dp} \bar{f}(p) \quad \text{c.d.d.}$$

Cálculo de $\int_0^{\infty} e^{-pt} t f'(t) dt :$

Partimos da equação que nos dá a transformada da derivada

$$L f'(t) = p \bar{f}(p) - f(0)$$

ou

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt = p \bar{f}(p) - f(0)$$

Derivando em ordem a p , obtemos

$$- \int_0^{\infty} t e^{-pt} f'(t) dt = \bar{f}(p) + p \frac{d}{dp} \bar{f}(p)$$

visto que, neste caso, são permutáveis as operações de derivação e de integração e ainda porque $f'(t)$ e $f(0)$ são independentes de p .

III.6 - Teorema da divisão por t : "Se $L f(t) = \bar{f}(p)$

será também

$$L \frac{f(t)}{t} = \int_p^\infty \bar{f}(p) dp "$$

Demonstração:

Substituindo no integral do 2º membro $\bar{f}(p)$ pelo seu valor, vem

$$\begin{aligned} \int_p^\infty \bar{f}(p) dp &= \int_p^\infty \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt dp = \\ &= \int_0^\infty \left\{ \left[-\frac{1}{t} e^{-pt} f(t) \right]_p^\infty + \frac{1}{t} \int_p^\infty e^{-pt} \frac{d}{dp} \left[f(t) \right] dp \right\} dt \end{aligned}$$

$\overset{=0}{\text{---}} \quad \underset{=0}{\text{---}}$

por ser indiferente a ordem da integração e $f(t)$ independente de p .
Portanto, a expressão anterior vem

$$= \int_0^\infty \frac{1}{t} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-pt} \frac{f(t)}{t} dt = L \frac{f(t)}{t}$$

c.d.d.

Vamos agora dar alguns exemplos de aplicações destes teoremas:

1 - "Partindo da relação

$$\frac{1}{\omega} L e^{-at} \sin \omega t = \frac{1}{(p+a)^2 + \omega^2}$$

determine a correspondência que resulta da aplicação do teorema III.3 "

Se multiplicarmos o 2º membro da igualdade por p , resulta a expressão $\frac{p}{(p+a)^2 + \omega^2}$ cujo denominador tem grau mais elevado que o numerador. Podemos, pois, aplicar o teorema III.3. Virá, por conseguinte:

$$\frac{p}{(p+a)^2 + \omega^2} = \frac{1}{\omega} L \frac{d}{dt} (e^{-at} \sin \omega t) =$$

$$= \frac{1}{\omega} L (-a e^{-at} \sin \omega t + \omega e^{-at} \cos \omega t)$$

$$= L (e^{-at} \cos \omega t - \frac{a}{\omega} e^{-at} \sin \omega t) = L e^{-at} (\cos \omega t - \frac{a}{\omega} \sin \omega t)$$

A função cuja transformada é $\frac{p}{(p+a)^2 + \omega^2}$, será

$$f(t) = e^{-at} (\cos \omega t - \frac{a}{\omega} \sin \omega t)$$

2 - "Sabendo que $\frac{1}{\omega^2} L(1 - \cos \omega t) = \frac{1}{p(p^2 + \omega^2)}$, calcule a função $f(t)$ cuja transformada de Laplace é $\frac{1}{p^2(p^2 + \omega^2)}$ ".

Em virtude do teorema III.3, será

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^2(p^2 + \omega^2)} &= \frac{1}{\omega^2} L \left[\int_0^t (1 - \cos \omega t) dt \right] = \\ &= \frac{1}{\omega^2} L \left\{ \left[t \right]_0^t - \left[\frac{1}{\omega} \sin \omega t \right]_0^t \right\} = \frac{1}{\omega^2} L \left(t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right) \end{aligned}$$

Será, por conseguinte

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\omega^2} \left(t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right) \\ &= \frac{1}{\omega^3} (\omega t - \sin \omega t) \end{aligned}$$

3 - "Sabendo que $L \operatorname{sh} \omega t = \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$, determine a transformada de

Laplace da função

$$f(t) = t \operatorname{sh} \omega t$$

Em virtude do teorema III.5, é

$$L t f(t) = - \frac{d}{dp} \tilde{f}(p).$$

Portanto

$$\begin{aligned} L t \operatorname{sh} \omega t &= - \frac{d}{dp} \left(\frac{\omega}{p^2 - \omega^2} \right) = - \frac{-2p\omega}{(p^2 - \omega^2)^2} \\ &= \frac{2p\omega}{(p^2 - \omega^2)^2} \end{aligned}$$

4 - "A partir de

$$L t \sin \omega t = \frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}$$

mostre que

$$L \sin \omega t = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

Em virtude do teorema III.6, temos que

$$L \operatorname{sen} \omega t = \int_p^\infty \frac{2 \omega p}{(p^2 + \omega^2)^2} dp.$$

Vamos calcular o integral do 2º membro. Fazendo

$$p^2 + \omega^2 = u \quad \therefore \quad 2p dp = du$$

vem

$$\int \frac{2 \omega p dp}{(p^2 + \omega^2)^2} = \omega \int \frac{du}{u^2} = \omega \int u^{-2} du = -\frac{\omega}{u} = -\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

e, por conseguinte

$$L \operatorname{sen} \omega t = \int_p^\infty \frac{2 \omega p}{(p^2 + \omega^2)^2} dp = \left[-\frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \right]_p^\infty = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

Funções básicas

A definição de certas funções básicas aumenta grandemente a eficiência do método operacional. Das funções a pedra fundamental é a Função escalão unidade (unit step function, fonction échelon unité): Esta função que desempenha um papel muito importante em Cálculo das Probabilidades e em grande número de problemas técnicos, tem o valor zero para $t < a$, o valor 1 para $t > a$ e é igual a um número arbitrário para $t = a$. Designá-la-emos por $U(t-a)$ e a sua transformada de Laplace será, por definição

$$\begin{aligned} L U(t-a) &= \int_0^\infty e^{-pt} U(t-a) dt = \int_0^a e^{-pt} 0 dt + \int_a^\infty e^{-pt} 1 dt = \\ &= \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \right]_a^\infty = \frac{e^{-pa}}{p} \end{aligned} \quad (1)$$

Em particular, se $a=0$, virá

$$L U(t) = \frac{1}{p}$$

Se multiplicarmos qualquer função $f(t)$ por $U(t-a)$, a função resultante será nula para $t < a$ e igual a $f(t)$ para $t > a$.

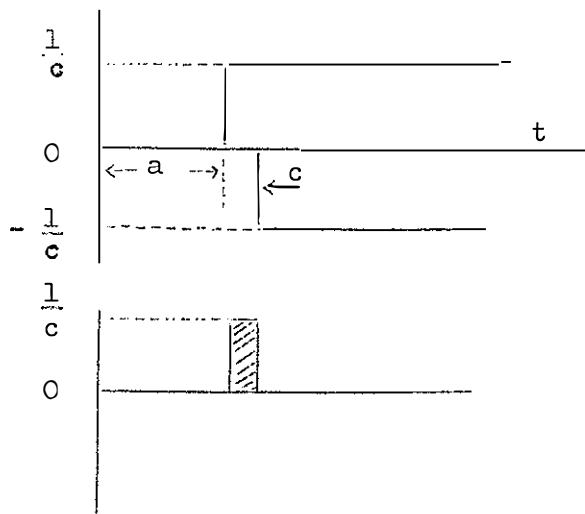
Impulso unidade ou função δ de Dirac:

É uma função definida pelo limite

$$U'(t-a) = \lim_{c \rightarrow 0} \left[\frac{1}{c} U(t-a) - \frac{1}{c} U(t-a-c) \right] \quad (2)$$

cujo valor é igual a 1 quando $t=a$ e zero para todos os outros valores de t .

Pode obter-se por combinação das duas funções escalões de altura $\frac{1}{c}$, representadas na figura, quando se torna o limite para $c=0$.



Vejamos qual é a transformada de Laplace desta função:

$$L U'(t-a) = L \left\{ \lim_{c \rightarrow 0} \left[\frac{1}{c} U(t-a) - \frac{1}{c} U(t-a-c) \right] \right\}$$

Em virtude das propriedades dos integrais e por ser $L U(t-a) = \frac{e^{-pa}}{p}$, poderemos escrever

$$L U'(t-a) = \lim_{c \rightarrow 0} \left[\frac{1}{c} \frac{e^{-ap}}{p} - \frac{1}{c} \frac{e^{-(a+c)p}}{p} \right] = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{e^{-ap} - e^{-(a+c)p}}{cp}$$

que dá origem a uma indeterminação.

Aplicando a regra de l'Hôpital, vem (por derivação em ordem a c):

$$L U'(t-a) = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{p e^{-(a+c)p}}{p} = e^{-ap}$$

$$\text{Comparando } L U(t-a) = \frac{e^{-ap}}{p} \text{ e } L U'(t-a) = e^{-ap}$$

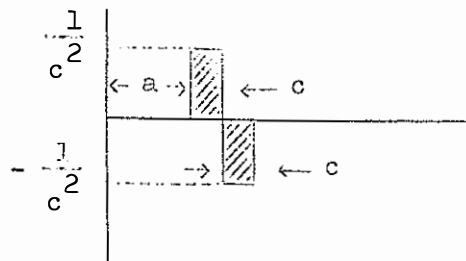
e recordando o teorema III.3, vê-se que se pode obter a segunda, multiplicando por p a primeira, o que corresponde, de acordo com aquele teorema, à derivação da função. É isto que justifica a representação da função δ de Dirac por $U'(t-a)$.

Doblete unidade (unit doublet)

É uma função definida por

$$U''(t-a) = \lim_{c \rightarrow 0} \left[\frac{U(t-a) - 2U(t-a-c) + U(t-a-2c)}{c^2} \right]$$

que se obtém por combinação de três funções escalões e que é representada na figura



A transformada obtém-se de maneira análoga à da função δ de Dirac:

$$L U''(t-a) = \lim_{c \rightarrow 0} \left[\frac{e^{-ap} - 2e^{-(a+c)p} + e^{-(a+2c)p}}{c^2 p} \right] = p e^{-ap}$$

*

Vamos agora enunciar e demonstrar o segundo teorema da translação:

III.7 "Se a transformada inversa de $\bar{f}(p)$ for $f(t)$, a transformada inversa de $e^{-ap} \bar{f}(p)$ será $f(t-a) U(t-a)$.

Ou, analiticamente

$$L^{-1} e^{-ap} \bar{f}(p) = f(t-a) U(t-a)$$

A demonstração faz-se a partir da definição da transformada de Laplace:

$$\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-p\lambda} f(\lambda) d\lambda$$

Fazendo $\lambda = t-a$, vem

$$\begin{aligned} \bar{f}(p) &= \int_a^{\infty} e^{-p(t-a)} f(t-a) dt = e^{ap} \int_a^{\infty} e^{-pt} f(t-a) dt \\ &= e^{ap} \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t-a) U(t-a) dt \end{aligned}$$

e, por conseguinte,

$$L^{-1} e^{-ap} \bar{f}(p) = f(t-a) U(t-a) \\ \text{c.d.d.}$$

Caso particular das funções periódicas

Se a função for periódica de período T , a transformada de Laplace, será

$$\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^T e^{-pt} f(t) dt + \int_T^{2T} e^{-pt} f(t) dt + \dots$$

e, aplicando o 2º teorema da translação, poderemos escrever

$$\begin{aligned} \bar{f}(p) &= (1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + \dots) \int_0^T e^{-pt} f(t) dt \\ &= \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t) dt \end{aligned}$$

* * *

As funções periódicas com pulsação aplica-se o

III.8 Teorema: Se $f(t)$ for periódica de período c e se $L f(t) = \bar{f}(p)$, teremos

$$L f(t) U(t-c) = e^{-cp} \bar{f}(p) \quad "$$

Como $f(t) \cdot U(t-c)$ é nula para $t < c$ e igual a $f(t)$ para $t > c$, vem

$$L f(t) U(t-c) = \int_c^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

e introduzindo a variável $\lambda = t-c$, teremos

$$\int_c^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = e^{-cp} \int_0^{\infty} e^{-p\lambda} f(\lambda + c) d\lambda = e^{-cp} \int_0^{\infty} e^{-p\lambda} f(\lambda) d\lambda$$

e, portanto,

$$L f(t) U(t-c) = e^{-cp} \bar{f}(p) \\ \text{c.d.d.}$$

A partir do conhecimento das soluções de certas equações diferenciais, podem determinar-se facilmente as soluções de outras equações diferenciais, pela aplicação de alguns conceitos e teoremas que vamos examinar. A nomenclatura usada para designar estes con-

ceitos reflecte ainda a sua origem em problemas de Física. Assim, consideremos um circuito eléctrico de impediência Z e apliquemos-lhe uma tensão representada por uma função escalão unidade ou por um impulso unidade. A intensidade da corrente no circuito terá, no 1º caso, o nome de resposta índice e de resposta impulsiva, no 2º caso.

A partir destas, como veremos, pode obter-se a intensidade correspondente a qualquer tensão arbitrária aplicada ao circuito.

Resposta índice: Em geral, chama-se resposta índice à solução da equação diferencial de um sistema quando o estímulo (2º membro da equação) é a função escalão unidade.

Por exemplo, a transformada da resposta do sistema à função escalão unidade, será

$$\tilde{g}(p) = \frac{1}{p Z(p)}$$

em que $\frac{1}{p}$ é a transformada de $U(t)$ e $Z(p)$ é a transformada da impediência característica do sistema.

A resposta índice será, então

$$g(t) = L^{-1} \frac{1}{p Z(p)}$$

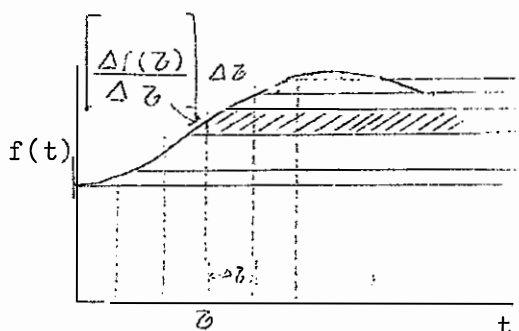
Resposta impulsiva

Se for $\tilde{h}(p) = \frac{1}{Z(p)}$ a transformada da resposta impulsiva esta será

$$h(t) = L^{-1} \frac{1}{Z(p)}$$

em que 1 é a transformada de $U'(t)$ e $Z(p)$ a da impediência do sistema.

Integral de convolução: É por meio deste integral que se obtém a resposta $x(t)$ a um estímulo arbitrário $f(t)$, quando se conhecem a resposta índice, $g(t)$ e a resposta impulsiva, $h(t)$, do sistema. Se



dividirmos o tempo em intervalos Δz podemos aproximar a curva por uma série de termos

$$\left[\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} \right] \Delta z$$

Se a função se mantivesse igual a $f(0)$, a resposta no primeiro intervalo Δz seria

$$f(0).g(t)$$

e no intervalo Δz que começa no instante $t = z$, seria

$$\left[\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} \right] \Delta z . g(t-z)$$

A resposta $x(t)$ em qualquer instante t , seria a soma

$$x(t) = f(0).g(t) + \sum_{z=\Delta z}^t \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} g(t-z) \Delta z$$

Calculando o limite desta soma quando $\Delta z \rightarrow 0$, viria

$$x(t) = f(0) g(t) + \int_0^t f'(z) g(t-z) dz \quad (a)$$

que é designado por integral de Duhamel ou integral de sobreposição.

A expressão (a) pode representar-se por várias formas diferentes. Assim, se fizermos a substituição

$$u = g(t-z) \quad , \quad du = g'(t-z) dz$$

$$dv = f'(z) dz \quad \quad v = f(z)$$

e integrarmos por partes, obtemos

$$\begin{aligned} x(t) &= f(0) g(t) + \left[f(z) g(t-z) \right]_0^t + \int_0^t f(z) g'(t-z) dz \\ &= \int_0^t f(z) g'(t-z) dz \end{aligned}$$

e como

$$g'(t-z) = h(t-z) \text{ (cf. pág. 30 e 31), vem:}$$

$$x(t) = \int_0^t f(z) h(t-z) dz \quad (b)$$

$$= f(t) * h(t)$$

Esta última expressão (b) é designada por integral de convolução, representado abreviadamente por $f(t) * h(t)$ que se lê convolução de $f(t)$ e $h(t)$.

Se fizermos $\lambda = t-z$ podemos obter ainda outra forma

$$x(t) = \int_0^t f(t-\lambda) h(\lambda) d\lambda$$

III.9 Teorema de Borel: "A transformada inversa do produto de duas funções subsidiárias é igual à convolução das transformadas inversas dessas funções".

Se $f(t)$ for a excitação e $x(t)$ a resposta, a transformada desta última poderá escrever-se

$$\bar{x}(p) = \frac{\bar{f}(p)}{Z(p)} = \bar{f}(p) \cdot \bar{h}(p)$$

A transformada inversa será, pois, em virtude da equação (b)

$$x(t) = L^{-1} \bar{f}(p) \cdot \bar{h}(p) = \int_0^t f(\zeta) h(t - \zeta) d\zeta = f(t) * h(t)$$

Como se vê, este teorema permite introduzir o integral de convolução no cálculo operacional.

* * *

Solução correspondente ao regime estacionário quando a excitação é sinusoidal

Vamos ver que, quando a excitação $f(t)$ é uma função sinusoidal, se pode obter a solução correspondente ao regime permanente (integral particular da equação diferencial do sistema), a partir da equação subsidiária, sem ser necessário efectuar a transformação inversa.

Se $f(t)$ é sinusoidal, podemos escrevê-la na forma exponencial $f(t) = e^{i\omega t}$ e a transformada será

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{p - i\omega}$$

Por outro lado, podemos escrever a equação subsidiária na forma

$$\bar{y}(p) = \frac{\bar{f}(p)}{Z(p)}$$

em que $\bar{y}(p)$ é a transformada da resposta e $Z(p)$ a transformada da impediência.

Virá, pois,

$$\bar{y}(p) = \frac{1}{(p - i\omega)Z(p)}$$

e, por conseguinte,

$$y(t) = \frac{e^{i\omega t}}{Z(i\omega)} + \left\{ \frac{e^{pt}}{(p - i\omega)Z'(p)} \right\}_{p=\text{raízes de } Z(p) = 0}$$

como o segundo termo só dá origem a termos transitórios, a solução correspondente ao regime estacionário será

$$y(t) = \frac{e^{i\omega t}}{Z(i\omega)}$$

* * *

Em alguns problemas físicos, aparecem potências de t de expoentes fraccionários. Nesses casos, é necessário utilizar técnicas especiais para o cálculo dos integrais.

Função gama - Suponhamos o caso da função $f(t) = t^n$. A sua transformada de Laplace

$$L t^n = \int_0^{\infty} e^{-pt} t^n dt$$

existe para $n > -1$, o que significa que o integral é convergente para estes valores de n .

Se introduzirmos a nova variável $x=pt$, virá $dx = p dt$ e aquela relação aparecerá na forma

$$L t^n = \frac{1}{p^{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx.$$

Este último integral define uma espécie de funções $\Gamma(n+1)$, contínuas para $n > -1$, denominadas funções gama, cujos valores figuram em tabelas.

No caso presente

$$L t^n = \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}} \quad (\text{para } n > -1)$$

Para valores inteiros de n , $\Gamma(n+1) = n!$, e teremos então a forma conhecida

$$L t^n = \frac{n!}{p^{n+1}} \quad (\text{com } n \text{ inteiro})$$

No caso particular de $n = -\frac{1}{2}$, virá

$$L t^{-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{p^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{p}} = \pi^{\frac{1}{2}} p^{-\frac{1}{2}}$$

ou

$$L \pi^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} = p^{-\frac{1}{2}}$$

ou ainda

$$L^{-1} p^{-2} = \frac{1}{\sqrt{\pi} t}$$

A partir desta equação, podem obter-se as transformadas de $t^{\frac{1}{2}}$, $t^{\frac{3}{2}}$, ... aplicando o teorema III.5 (multiplicação por t).

Função de erro

É outra função cujos valores são dados em tabelas. É definida pela equação

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\lambda^2} d\lambda$$

Como exemplo, vamos agora considerar uma função cuja transformada inversa conduz à função de erro.

Suponhamos que queríamos determinar a transformada inversa de

$$\frac{1}{\sqrt{p(p-1)}} :$$

Já vimos que

$$L^{-1} \frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{\pi} t} \longrightarrow f(\mathcal{O}) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \mathcal{O}}$$

e

$$L^{-1} \frac{1}{p-1} = e^t \longrightarrow h(t-\mathcal{O}) = e^{t-\mathcal{O}}$$

Aplicando o integral de convolução, teremos

$$L^{-1} \frac{1}{\sqrt{p(p-1)}} = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi} \mathcal{O}} \cdot e^{t-\mathcal{O}} d\mathcal{O} =$$

$$= \int_0^t \frac{e^t \cdot e^{-\mathcal{O}}}{\sqrt{\pi} \sqrt{\mathcal{O}}} d\mathcal{O} = \frac{e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\mathcal{O}}}{\sqrt{\mathcal{O}}} d\mathcal{O}$$

Fazendo $\lambda = \sqrt{\mathcal{O}}$ ($d\lambda = \frac{1}{2} \mathcal{O}^{-\frac{1}{2}} d\mathcal{O} = \frac{1}{2\sqrt{\mathcal{O}}} d\mathcal{O}$), virá

$$L^{-1} \frac{1}{\sqrt{p(p-1)}} = \frac{e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} \frac{e^{-\lambda^2}}{\lambda} 2\lambda d\lambda$$

$$\frac{2e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-\lambda^2} d\lambda = e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t})$$

A aplicação do 1º teorema da translação a este resultado, permite-nos obter outro par de transformadas. Com efeito, em virtude daquele teorema, viria

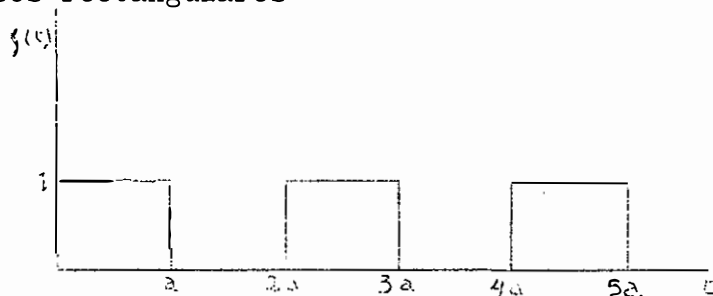
$$L \operatorname{erf}(\sqrt{t}) = \frac{1}{\sqrt{p+1} \cdot p}$$

ou

$$L^{-1} \frac{1}{p \sqrt{p+1}} = \operatorname{erf}(\sqrt{t}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-\lambda^2} d\lambda$$

Exercícios

1. "Calcule a transformada da função representada por uma sucessão de impulsos rectangulares



Exprimindo a função dada numa soma algébrica de funções escalo unidade, vem

$$f(t) = U(t) - U(t-a) + U(t-2a) - U(t-3a) + U(t-4a) - U(t-5a) + \dots$$

Mas, como vimos

$$L U(t) = \frac{1}{p}$$

e

$$L U(t-a) = \frac{e^{-pa}}{p}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \bar{f}(p) &= \frac{1}{p} - \frac{e^{-pa}}{p} + \frac{e^{-2pa}}{p} - \frac{e^{-3pa}}{p} + \frac{e^{-4pa}}{p} - \frac{e^{-5pa}}{p} + \dots \\ &= \frac{1}{p} \left[1 - e^{-pa} (1 - e^{-pa} + e^{-2pa} - e^{-3pa} \dots) \right] \\ &= \frac{1}{p} \frac{1}{1 + e^{-pa}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{p} \left(1 - \frac{e^{-pa}}{1 + e^{-pa}} \right)$$

$$= \frac{1}{p} \frac{1 + e^{-pa} - e^{-pa}}{1 + e^{-pa}} = \frac{1}{p(1 + e^{-pa})}$$

2. "Calcular as transformadas das funções t^2 e $t^{3/2}$ ".

Como $t^{\frac{1}{2}} = t \cdot t^{-\frac{1}{2}}$ e $L t^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{p}}$, da aplicação do teorema III-5,

resulta que

$$L t^{\frac{1}{2}} = L t t^{-\frac{1}{2}} = - \frac{d}{dp} \sqrt{\frac{\pi}{p}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{p^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{p^3}}$$

e, de modo análogo,

$$\begin{aligned} L t^{\frac{3}{2}} &= L t \cdot t^{\frac{1}{2}} = - \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{p^3}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\frac{3}{2} \sqrt{\pi} p^{\frac{1}{2}}}{p^3} \\ &= \frac{3}{4} \frac{\sqrt{\pi}}{p^{7/2}} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{p^7}} \end{aligned}$$

3. "Aplicando o integral de convolução, determine a transformada inversa de

$$\bar{x}(p) = \frac{1}{p(p+a)} \quad "$$

seja

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{p} \longrightarrow f(\zeta) = 1$$

$$\bar{h}(p) = \frac{1}{p+a} \longrightarrow h(t-\zeta) = e^{-a(t-\zeta)}$$

Pelo teorema de Borel, vem

$$\begin{aligned} x(t) &= L^{-1} \bar{f}(p) \cdot \bar{h}(p) = \int_0^t f(\zeta) h(t-\zeta) d\zeta = f(t) * h(t) \\ &= \int_0^t e^{-a(t-\zeta)} d\zeta = \int_0^t e^{-at} e^{a\zeta} d\zeta = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{-at} \int_0^t e^{az} d\mathcal{C} = e^{-at} \left[\frac{1}{a} e^{az} \right]_0^t = \\
 &= e^{-at} \left(\frac{1}{a} e^{at} - \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{a} e^{-at} = \frac{1}{a} (1 - e^{-at})
 \end{aligned}$$

* * * * *

4. Determine a transformada inversa de

$$\bar{x}(p) = \frac{1}{p^2(p^2+a^2)} \quad ".$$

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{p^2} \longrightarrow f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$$

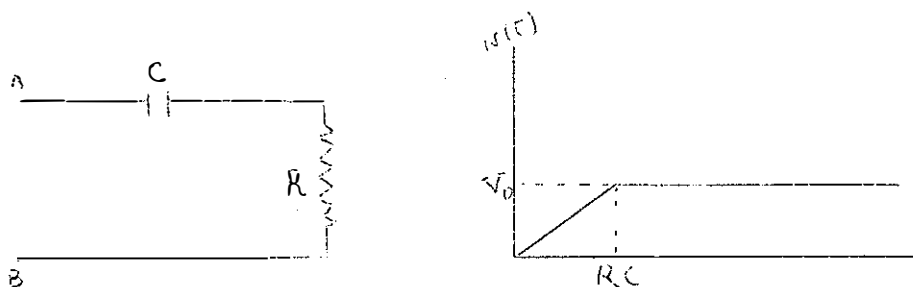
$$\bar{h}(p) = \frac{1}{p^2+a^2} \longrightarrow h(t-\mathcal{C}) = \frac{1}{a} \operatorname{sen} a(t-\mathcal{C})$$

e, pelo teorema de Borel,

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \int_0^t \mathcal{C} \frac{1}{a} \operatorname{sen} a(t-\mathcal{C}) d\mathcal{C} = \left[\mathcal{C} \frac{1}{a^2} \cos a(t-\mathcal{C}) \right]_0^t - \\
 &\quad - \frac{1}{a^2} \int_0^t \cos a(t-\mathcal{C}) d\mathcal{C} = \frac{1}{a^2} t + \frac{1}{a^3} \left[\operatorname{sen} a(t-\mathcal{C}) \right]_0^t \\
 &= \frac{1}{a^2} t - \frac{1}{a^3} \operatorname{sen} at = \frac{1}{a^3} (at - \operatorname{sen} at)
 \end{aligned}$$

5. Entre os pontos A e B do circuito representado na figura, aplica-se um impulso em virtude do qual, durante um intervalo de duração igual a RC , a tensão de A em relação a B sobe lineamente e atinge, no fim do intervalo, um dado valor V_0 . Depois esta tensão permanece com o valor V_0 . Provar que, estando o condensador inicialmente descarregado, a sua carga no instante t contado a partir do instante inicial do impulso será dada por

$$\begin{aligned}
 t < RC &\longrightarrow q = V_0 C \left(\frac{t}{RC} - 1 + e^{-\frac{t}{RC}} \right) \\
 t > RC &\longrightarrow q = V_0 C \left[1 - (e-1) e^{-\frac{t}{RC}} \right] \quad "
 \end{aligned}$$



A equação do circuito é

$$Ri + \frac{q}{C} = v(t)$$

e como $i = \frac{dq}{dt}$, poderemos escrever

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = v(t)$$

que vamos transformar.

Como o condensador está inicialmente descarregado $q(0)=0$ e, por conseguinte

$$L q'(t) = p \bar{q}(p)$$

e

$$L q(t) = \bar{q}(p)$$

Resta-nos calcular a transformada de $v(t)$:

Entre 0 e RC , será

$$v(t) = \frac{V_0}{RC} t$$

Para $t > RC$

$$v(t) = V_0$$

Virá, então

$$\begin{aligned} \bar{v}(p) &= L v(t) = \int_0^{\infty} e^{-pt} v(t) dt = \int_0^{RC} \frac{V_0}{RC} t e^{-pt} dt + \\ &+ \int_{RC}^{\infty} V_0 e^{-pt} dt = \frac{V_0}{RC} \left[-\frac{1}{p} t e^{-pt} - \frac{1}{p^2} e^{-pt} \right]_0^{RC} + V_0 \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \right]_{RC}^{\infty} = \\ &= \frac{V_0}{RC} \left(-\frac{1}{p} RC e^{-RCp} - \frac{1}{p^2} e^{-RCp} + \frac{1}{p^2} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
+ V_o \frac{1}{p} e^{-RCp} &= -\frac{V_o}{p} e^{-RCp} - \frac{V_o}{RCp^2} e^{-RCp} + \frac{V_o}{RCp^2} + \\
+ \frac{V_o}{p} e^{-RCp} \\
&= \frac{V_o}{RCp^2} \left(1 - e^{-RCp} \right)
\end{aligned}$$

Teremos, por conseguinte:

$$R p \bar{q}(p) + \frac{1}{C} \bar{q}(p) = \frac{V_o}{RCp^2} \left(1 - e^{-RCp} \right)$$

$$\left(Rp + \frac{1}{C} \right) \bar{q}(p) = \frac{V_o}{RCp^2} \left(1 - e^{-RCp} \right)$$

$$\bar{q}(p) = \frac{\frac{V_o}{RCp^2} - \frac{V_o}{RCp^2} e^{-RCp}}{Rp + \frac{1}{C}} = \frac{\frac{V_o}{R^2 C} - \frac{V_o}{R^2 C} e^{-RCp}}{p^2 \left(p + \frac{1}{RC} \right)} \quad \text{-eq. subsidiária}$$

Mas, na tabela de transformadas, vê-se que

$$L^{-1} \frac{1}{p^2 \left(p + \frac{1}{RC} \right)} = R^2 C^2 \left(e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{t}{RC} - 1 \right)$$

Aplicando o 2º teorema da translacção

$$L^{-1} e^{-ap} \bar{f}(p) = 0 \quad \text{para } 0 < t < a$$

$$= f(t - a) \quad \text{para } t > a$$

$$L^{-1} \frac{e^{-RCp}}{p^2 \left(p + \frac{1}{RC} \right)} = 0 \quad \text{para } 0 < t < RC$$

$$= R^2 C^2 \left(e^{-\frac{t-RC}{RC}} + \frac{t-RC}{RC} - 1 \right) \quad \text{para } t > RC$$

Será, pois

$$L^{-1} \frac{\frac{V_0}{R^2 C}}{p^2 \left(p + \frac{1}{RC}\right)} = V_0 C \left(e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{t}{RC} - 1 \right), \text{ em qualquer instante}$$

$$L^{-1} \frac{-\frac{V_0}{R^2 C} e^{-RCp}}{p^2 \left(p + \frac{1}{RC}\right)} = 0, \text{ para } 0 < t < RC$$

$$= -V_0 C \left(e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{t - RC}{RC} - 1 \right), \text{ para } t > RC$$

Temos, então:

Para $0 < t < RC$

$$q(t) = V_0 C \left(e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{t}{RC} - 1 \right)$$

e, para $t > RC$

$$q(t) = V_0 C \left(e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{t}{RC} - 1 \right) - V_0 C \left(e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{t - RC}{RC} - 1 \right)$$

$$= V_0 C e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{V_0}{R} t - V_0 C - V_0 C e^{-\frac{t}{RC}} - V_0 \frac{t - RC}{R} + V_0 C$$

$$= V_0 C e^{-\frac{t}{RC}} - V_0 C e^{-\frac{t}{RC}} + V_0 C$$

$$= V_0 C \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} + e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

$$q(t) = V_0 C \left[1 - (e - 1) e^{-\frac{t}{RC}} \right]$$

c.d.d.

6. "Admitindo que o comportamento cinético de um reactor supercrítico é expresso analiticamente pela equação

$$\frac{1}{\lambda} \left[\frac{d^2 n(t)}{dt^2} + \frac{\beta}{I} \frac{d n(t)}{dt} \right] = \frac{N_i}{I} \left[\frac{1}{\lambda} \frac{d \delta k(t)}{dt} + \delta k(t) \right]^* \quad (1)$$

e que

$$\delta k(t) = \delta k_p - \alpha \lambda \delta k_p t(2) ,$$

determine a resposta do reactor a uma variação linear negativa de δk , sendo, no instante inicial,

$$n(t) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dn}{dt} = N_i \delta k_p \frac{\lambda}{\beta} \quad " .$$

[Significado das letras:

N - concentração de neutrões (análoga à potência do reactor)

$n(t)$ - pequenas variações de N

N_i - valor de N no instante em que k começa a variar

K_e - constante de multiplicação efectiva

k - $(k_e - 1)$

δk_p - variação positiva escalonada de k

β - fracção dos neutrões que são retardados

λ - constante de decrescimento do grupo médio de neutrões retardados

I - duração dos neutrões imediatos

α - factor constante] .

Resolução:

Vamos, em primeiro lugar, transformar a equação (1).

De (2) tira-se

$$\frac{d \delta k(t)}{dt} = -\alpha \lambda \delta k_p$$

que, juntamente com o valor de $\delta k(t)$, substituímos em (1):

* (A dedução da equação (1) pode ver-se em Nuc. Sc. and Eng, 5, 5, 283 (1959)

$$\frac{1}{\lambda} \left[\frac{d^2 n(t)}{dt^2} + \frac{\beta}{f} \frac{dn(t)}{dt} \right] = \frac{N_i}{f} \left[-\frac{1}{\lambda} \alpha \lambda \int k_p + \int k_p - \alpha \lambda \int k_p t \right]$$

$$= N_i \int k_p \left(\frac{1-\alpha}{f} - \frac{\alpha \lambda t}{f} \right)$$

Mas

$$L \frac{d^2 n(t)}{dt^2} = p^2 \bar{n}(p) - p n(o) - n'(o) ; L 1 = \frac{1}{p}$$

$$L \frac{dn(t)}{dt} = p \bar{n}(p) - n(o) ; L t = \frac{1}{p^2}$$

e, atendendo às condições iniciais, vem

$$L \frac{d^2 n(t)}{dt^2} = p^2 \bar{n}(p) - N_i \int k_p \lambda / \beta$$

$$L \frac{dn(t)}{dt} = p \bar{n}(p) .$$

Portanto:

$$\frac{1}{\lambda} \left[p^2 \bar{n}(p) - N_i \int k_p \lambda / \beta + \frac{\beta}{f} p \bar{n}(p) \right] = N_i \int k_p \left(\frac{1-\alpha}{f p} - \frac{\alpha \lambda}{f p^2} \right)$$

ou

$$\frac{p \bar{n}(p)}{\lambda} \left(p + \frac{\beta}{f} \right) - \frac{N_i \int k_p}{\beta} = N_i \int k_p \left(\frac{1-\alpha}{f p} - \frac{\alpha \lambda}{f p^2} \right)$$

e, passando o 2º termo do 1º membro para o 2º

$$\frac{p \bar{n}(p)}{\lambda} \left(p + \frac{\beta}{f} \right) = N_i \int k_p \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1-\alpha}{f p} - \frac{\alpha \lambda}{f p^2} \right)$$

Donde

$$\bar{n}(p) = \frac{\frac{1}{\beta}}{N_i \int k_p \lambda \left(p + \frac{\beta}{f} \right)} + \frac{\frac{1-\alpha}{f}}{p^2 \left(p + \frac{\beta}{f} \right)} - \frac{\frac{\alpha \lambda}{f}}{p^3 \left(p + \frac{\beta}{f} \right)}$$

que é a equação subsidiária.

Vamos agora proceder à transformação inversa:

No quadro das transformadas vemos que

$$L^{-1} \frac{\frac{1}{\beta}}{p \left(p + \frac{\beta}{\ell} \right)} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\frac{\beta}{\ell}} \left(1 - e^{-\frac{\beta}{\ell} t} \right) = \frac{\ell}{\beta^2} - \frac{\ell}{\beta^2} e^{-\frac{\beta}{\ell} t}$$

e

$$\begin{aligned} L^{-1} \frac{\frac{1-\alpha}{\ell}}{p^2 \left(p + \frac{\beta}{\ell} \right)} &= \frac{1-\alpha}{\ell} \cdot \frac{1}{\frac{\beta^2}{\ell^2}} \left(e^{-\frac{\beta}{\ell} t} + \frac{\beta}{\ell} t - 1 \right) \\ &= \frac{\ell(1-\alpha)}{\beta^2} e^{-\frac{\beta}{\ell} t} + \frac{1-\alpha}{\beta} t - \frac{\ell(1-\alpha)}{\beta^2} \end{aligned}$$

Como o termo restante não figura na tabela, vamos calculá-lo decompondo-o em fracções parciais:

$$\frac{\frac{\alpha \lambda}{\ell}}{p^3 \left(p + \frac{\beta}{\ell} \right)} = \frac{C_{11}}{p^3} + \frac{C_{12}}{p^2} + \frac{C_{13}}{p} + \frac{C_1}{p + \frac{\beta}{\ell}} \quad (3)$$

Multiplicando por p^3 , vem:

$$\frac{\frac{\alpha \lambda}{\ell}}{p + \frac{\beta}{\ell}} = C_{11} + C_{12} p + C_{13} p^2 + \frac{C_1 p^3}{p + \frac{\beta}{\ell}} \quad (4)$$

fazendo $p = 0$, temos imediatamente

$$C_{11} = \frac{\alpha \lambda}{\beta}$$

Derivando (4) em ordem a p , será:

$$\frac{d}{dp} \frac{\frac{\alpha \lambda}{\ell}}{p + \frac{\beta}{\ell}} = C_{12} + 2 C_{13} p + \frac{3 p^2 C_1 \left(p + \frac{\beta}{\ell} \right) - C_1 p^3}{\left(p + \frac{\beta}{\ell} \right)^2}$$

ou

$$-\frac{\frac{\alpha \lambda}{l}}{\left(p + \frac{\beta}{l}\right)^2} = c_{12} + 2 c_{13} p + \frac{3 p^2 c_1 \left(p + \frac{\beta}{l}\right) - c_1 p^3}{\left(p + \frac{\beta}{l}\right)^2}$$

e, fazendo $p = 0$, viria

$$c_{12} = -\frac{\alpha \lambda l}{\beta^2}$$

Derivando novamente, teremos

$$\frac{\frac{\alpha \lambda}{l} 2 \left(p + \frac{\beta}{l}\right)}{\left(p + \frac{\beta}{l}\right)^4} = 2 c_{13} + \text{termo que se anula para } p = 0$$

e, fazendo $p = 0$

$$c_{13} = \frac{\frac{\alpha \lambda \beta}{l^2}}{\frac{\beta^4}{l^4}} = \frac{\alpha \lambda l^2}{\beta^3}$$

Cálculo de c_1 :

Multiplicando (3) por $p^3 \left(p + \frac{\beta}{l}\right)$, vem

$$-\frac{\alpha \lambda}{l} = c_{11} \left(p + \frac{\beta}{l}\right) + c_{12} p \left(p + \frac{\beta}{l}\right) + c_{13} p^2 \left(p + \frac{\beta}{l}\right) + c_1 p^3$$

e como no 1º membro não há termo em p^3 , será

$$c_{13} + c_1 = 0 \therefore c_1 = -c_{13} = -\frac{\alpha \lambda l^2}{\beta^3}$$

substituindo os valores das constantes em (3), temos,

$$\frac{\frac{\alpha \lambda}{l}}{p^3 \left(p + \frac{\beta}{l}\right)} = \frac{\frac{\alpha \lambda}{\beta}}{p^3} - \frac{\frac{\alpha \lambda l}{\beta^2}}{p^2} + \frac{\frac{\alpha \lambda l^2}{\beta^3}}{p} - \frac{\frac{\alpha \lambda l^2}{\beta^3}}{p + \frac{\beta}{l}}$$

Será então, pelo quadro das transformadas

$$L^{-1} \frac{\frac{\alpha \lambda}{l}}{p^3 \left(p + \frac{\beta}{l} \right)} = \frac{\alpha \lambda}{\beta} \frac{t^2}{2} - \frac{\alpha \lambda l}{\beta^2} t + \frac{\alpha \lambda l^2}{\beta^3} - \frac{\alpha \lambda l^2}{\beta^3} e^{-\frac{\beta}{l} t}$$

Virá, por conseguinte

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_i \delta k_p \lambda} n(t) &= \frac{l}{\beta^2} - \frac{l}{\beta^2} e^{-\frac{\beta}{l} t} + \frac{l(1-\alpha)}{\beta^2} e^{-\frac{\beta}{l} t} + \\ &+ \frac{1-\alpha}{\beta} t - \frac{l(1-\alpha)}{\beta^2} - \frac{\alpha \lambda t^2}{2\beta} + \frac{\alpha \lambda l t}{\beta^2} - \frac{\alpha \lambda l^2}{\beta^3} + \\ &+ \frac{\alpha \lambda l^2}{\beta^3} e^{-\frac{\beta}{l} t} \\ &= \cancel{\frac{1}{\beta^2}} - \cancel{\frac{l}{\beta^2}} e^{-\frac{\beta}{l} t} + \cancel{\frac{l}{\beta^2}} e^{-\frac{\beta}{l} t} - \frac{l\alpha}{\beta^2} e^{-\frac{\beta}{l} t} + \frac{1-\alpha}{\beta} t - \\ &- \cancel{\frac{l}{\beta^2}} + \frac{l\alpha}{\beta^2} - \frac{\alpha \lambda}{2\beta} t^2 + \frac{\alpha \lambda l}{\beta^2} t - \frac{\alpha \lambda l^2}{\beta^3} + \frac{\alpha \lambda l^2}{\beta^3} e^{-\frac{\beta}{l} t} \\ &= \frac{l\alpha}{\beta^2} \left(1 - e^{-\frac{\beta}{l} t} \right) + \frac{1-\alpha}{\beta} t - \frac{\alpha \lambda l^2}{\beta^3} \left(1 - e^{-\frac{\beta}{l} t} \right) + \\ &+ \frac{\alpha \lambda l}{\beta^2} t - \frac{\alpha \lambda}{2\beta} t^2 \end{aligned}$$

$$\text{Fazendo } N(t) = N_i + n(t) \therefore \frac{n(t)}{N_i} = \frac{N(t)}{N_i} - 1$$

poderíamos escrever

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta k_p \lambda} \left(\frac{N(t)}{N_i} - 1 \right) &= -\frac{\alpha l}{\beta^2} \left(1 - e^{-\frac{\beta}{l} t} \right) + \frac{1-\alpha}{\beta} t - \\ &- \frac{\alpha \lambda l^2}{\beta^3} \left(1 - e^{-\frac{\beta}{l} t} \right) + \frac{\alpha \lambda l}{\beta^2} t - \frac{\alpha \lambda}{2\beta} t^2 \end{aligned}$$

ou, finalmente,

$$\begin{aligned} \frac{N(t)}{N_i} = & 1 + \frac{\int_{kp} \alpha \lambda}{\beta^2} \left(1 - e^{-\frac{\beta}{\lambda} t} \right) + \frac{(1 - \alpha) \int_{kp} \lambda}{\beta} t - \\ & - \frac{\int_{kp} \alpha \lambda^2}{\beta^3} \left(1 - e^{-\frac{\beta}{\lambda} t} \right) + \frac{\int_{kp} \alpha \lambda^2}{\beta^2} t - \frac{\int_{kp} \alpha \lambda^2}{2\beta} t^2 \end{aligned}$$

Quadro I

Operações Funcionais	
$f(t)$ (espaço original)	$\bar{f}(p)$ (espaço imagem)
$f(t)$	$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$
$f'(t)$	$p \bar{f}(p) - f(0)$
$f^{(n)}(t)$	$p^n \bar{f}(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
$t f(t)$	$-\frac{d}{dp} \bar{f}(p)$
$\frac{1}{t} f(t)$	$\int_p^{\infty} \bar{f}(p) dp$
$f\left(\frac{t}{a}\right)$	$a \bar{f}(ap)$
$e^{at} f(t)$	$\bar{f}(p-a)$
$f(t-a) \cdot U(t-a)$	$e^{-ap} \bar{f}(p)$
$f(t) = f(t+T)$	$\frac{1}{1 - e^{-Tp}} \int_0^T e^{-pt} f(t) dt$
$\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$	$\lim_{p \rightarrow \infty} p \bar{f}(p)$
$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\lim_{p \rightarrow 0} p \bar{f}(p)$

Quadro II
Transformadas de Laplace

$\bar{f}(p)$	$f(t)$
1	$U'(t) = \text{impulso unidade em } t=0$
$\frac{1}{p}$	1 ou $U(t) = \text{função escalão unidade em } t=0$
$\frac{1}{p^n} (n=1,2,\dots)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{p^{1/2}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
$\frac{1}{p^{3/2}}$	$2 \sqrt{\frac{t}{\pi}}$
$\frac{1}{p^n} (n > 0)$	$\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}$
$\frac{n!}{p^{n+1}} (n \text{ inteiro})$	t^n
$\sqrt{\frac{\pi}{p}}$	$t^{-\frac{1}{2}}$
$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{p^3}}$	$t^{\frac{1}{2}}$
$\frac{3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{p^5}}$	$t^{\frac{3}{2}}$
$\frac{1}{p+a}$	e^{-at}
$\frac{1}{p(p+a)}$	$\frac{1}{a} (1 - e^{-at})$
$\frac{1}{p^2(p+a)}$	$\frac{1}{a^2} (e^{-at} + at - 1)$
$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$
$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$
$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$	$\cosh \omega t$
$\frac{1}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} \sin \omega t$
$\frac{1}{p^2 - \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} \sinh \omega t$

Quadro II (cont.)

-52-

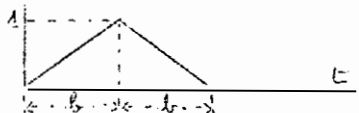
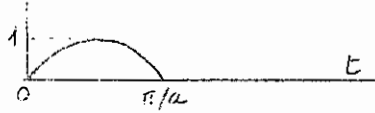
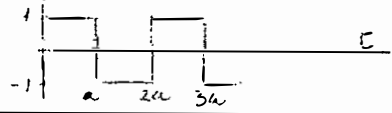
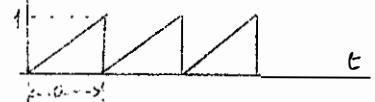
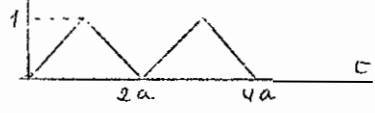
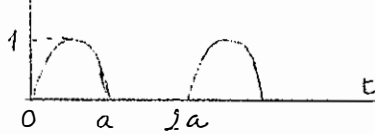
$\bar{f}(p)$	$f(t)$
$\frac{1}{p(p^2 + \omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^2} (1 - \cos \omega t)$
$\frac{1}{p^2(p^2 + \omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^3} (\omega t - \sin \omega t)$
$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$
$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{a-b} (a e^{-at} - b e^{-bt})$
$\frac{1}{(p+a)^2}$	$t \cdot e^{-at}$
$\frac{1}{(p+a)^n} (n=1, 2, \dots)$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at}$
$\frac{p}{(p+a)^2}$	$e^{-at} (1 - at)$
$\frac{1}{p(p+a)^2}$	$\frac{1}{a^2} [1 - (1+at) e^{-at}]$
$\frac{p+b}{(p+a)^2}$	$[(b-a)t - 1] e^{-at}$
$\frac{1}{(p^2 + a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3} (\sin at - at \cos at)$
$\frac{b}{(p^2 + a^2)^2}$	$\frac{t}{2a} \sin at$
$\frac{p^2}{(p^2 + a^2)^2}$	$\frac{1}{2a} (\sin at + at \cos at)$
$\frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$	$t \cos at$
$\frac{1}{(p+a)^2 + b^2}$	$\frac{1}{b} e^{-at} \sin bt$
$\frac{1}{p^2 + 2\zeta \omega_0 p + \omega_0^2}$	$\frac{1}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_0 t} \sin \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t$
$\frac{p+a}{(p+a)^2 + b^2}$	$e^{-at} \cos bt$
$\frac{1}{p[(p+a)^2 + b^2]}$	$\frac{1}{\omega^2} \left[1 + \frac{\omega}{b} e^{-at} \sin(bt - \varphi) \right] \begin{cases} \omega^2 = a^2 + b^2 \\ \varphi = \arctg \frac{b}{-a} \end{cases}$
$\frac{1}{p^2[(p+a)^2 + b^2]}$	$\frac{1}{\omega^2} \left[t - \frac{2a}{\omega^2} + \frac{1}{b} e^{-at} \sin(bt - \varphi) \right] \begin{cases} \omega^2 = a^2 + b^2 \\ \varphi = \arctg \frac{2ab}{b^2 - a^2} \end{cases}$

Quadro II (cont)

-53-

$\bar{f}(p)$	$f(t)$
$\frac{1}{(p^2+d^2)[(p+a)^2+b^2]}$	$\frac{1}{[(a^2+b^2-d^2)^2+4a^2d^2]^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{1}{d} \sin(dt-\varphi_1) + \frac{1}{b} e^{-at} \sin(bt-\varphi_2) \right]$ $\varphi_1 = \arctan \frac{2ad}{a^2+b^2-d^2} \quad ; \quad \varphi_2 = \arctan \frac{-2ad}{a^2-b^2+d^2}$
$\frac{1}{p^4-a^4}$	$\frac{1}{2a^3} (\sinh at - \sinh at)$
$\frac{p}{p^4-a^4}$	$\frac{1}{2a^2} (\cosh at - \cosh at)$
$\frac{p^2}{p^4-a^4}$	$\frac{1}{2a} (\sinh at + \sinh at)$
$\frac{p^3}{p^4-a^4}$	$\frac{1}{2} (\cosh at + \cosh at)$
$\frac{p}{p^4+4a^4}$	$\frac{1}{2a^2} \sinh at \cdot \sinh at$
$\frac{4a^3}{p^4+4a^4}$	$\sinh at \cdot \cosh at - \cosh at \cdot \sinh at$
$\frac{1}{p} \left(\frac{p-a}{p+a} \right)$	$-1 + 2e^{-at}$
$\frac{1}{p^2} \left(\frac{p-a}{p+a} \right)$	$\frac{2}{a} - t - \frac{2}{a} e^{-at}$
$\frac{e^{-ap}}{p}$	$U(t-a)$
e^{-ap}	$U'(t-a)$
$p \cdot e^{-ap}$	$U''(t-a)$
$\frac{2}{a} e^{-a\sqrt{p}}$	$\frac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t^3}}$
$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-a\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$
$\frac{1}{p\sqrt{p+1}}$	$\operatorname{erf}(\sqrt{t})$
$\frac{1}{\sqrt{p}(p-1)}$	$e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t})$
$\frac{1}{\sqrt{p+1}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - e^t [1 + \operatorname{erf}(\sqrt{t})]$

Quadro II (cont.)

$\bar{f}(p)$	$f(t)$
$\frac{1}{p} (1 - e^{-bp})$	Impulso rectangular 
$\frac{1}{b} \left(\frac{1 - e^{-bp}}{p} \right)^2$	Impulso triangular 
$\frac{a}{p^2 + a^2} (1 + e^{-\frac{\pi p}{a}})$	Impulso sinusoidal 
$\frac{1}{p} \operatorname{tg} h \left(\frac{ap}{2} \right)$	Função meandro 
$\left[\frac{1}{ap^2} - \frac{e^{-ap}}{p(1 - e^{-ap})} \right]$	Onda em dente de serra 
$\frac{1}{p^2} \operatorname{tg} h \frac{ap}{2}$	Onda triangular 
$\frac{a}{(p^2 + a^2)(1 - e^{-\frac{\pi p}{a}})}$	Rectificação de meia onda da onda sinusoidal 
$\frac{a}{p^2 + a^2} \operatorname{ctg} h \frac{\pi p}{2a}$	Rectificação de onda completa da onda sinusoidal 