ECONOMIA
E
FINANÇAS

ANAIS DO INSTITUTO SUPERIOR
DE CIÊNCIAS
ECONÓMICAS E FINANCEIRAS

Resolução dum problema

Resolução dum problema

Pelo PROF. ENG. ANTÓNIO GOUVÊA PORTELA

Sendo x o número de cabeçotes de determinado aparelho, y o número de rotações desse aparelho, $z = \dfrac{2x+5}{x\,y}$ o custo da operação do aparelho por unidade de produção $x \,.\, y^2 \leqslant 40\,.\,662$ uma restrição imposta de natureza mecânica, deseja-se conhecer os pontos $P\ (x_1\ y)$ extremos significativos que minimizam z .

★

1.ª Operação: Definição do paralelotropo de partida e tornar discretas e finitamente numeráveis as variáveis.

x pode tomar valores inteiros positivos $1, 2, 3, \ldots$ mas o seu número é pràticamente limitado a *10*. Assim os valores de x são: $x = 1, 2, \ldots 10$.

y é uma função contínua, que interessa estudar no intervalo (60 , 160) e verificou-se que 10 era o intervalo de incerteza $(k\sigma)$ a adoptar neste caso por razões de natureza empírica e prática.

Assim os valores y são: $y = 60, 70, \ldots, 160$ (10 valores).

O número total de pontos contidos no paralelotropo de partida (R^2) são $10 \times 10 =$ *100* .

Para facilitar o cálculo vamos efectuar uma mudança de variáveis, (esta operação não é necessária ,mas procedendo-se manualmente ao cálculo, confere certas vantagens).

Façamos $\rightarrow \lambda = 10\ y$ e será:

$$\left.\begin{array}{r} x\,\lambda \leqslant 406 \\ 1 \leqslant x \leqslant 10 \\ 6 \leqslant x \leqslant 16 \end{array}\right\} \text{constrangimento do tipo } \phi_j\,(x^1, \ldots x^n) \gtrless 0$$

$$\left.\min \frac{2x+5}{10\,x\,\lambda}\ \right\} \min\ \phi\,({}_nP)$$

2.ª Operação: Amostragem e determinação da dimensão da amostra.

Desejamos que a probabilidade de não sair um número em 10 ao fim de M repetições seja 0,06

$$\left(\frac{9}{10}\right)^M = 0{,}06 \qquad \text{e} \qquad M = \frac{0{,}05}{0{,}9}$$

Fizeram-se 25 sorteios e obtiveram-se 25 pares (x, λ).

Tabela 1

x	λ
8	13
7	8
8	15
7	15
9	8
4	10
6	6
7	7
2	14
3	12
4	15
5	7
1	13
6	1
1	14
10	8
8	10
8	15
1	14
8	8
3	7
9	13
4	13
4	6
4	14

3.ª Operação: Condições de fronteira e rejeição de pontos por não verificarem os constrangimentos.

Os pares sorteados foram testados a fim de apurar quais os que satisfaziam aos constrangimentos do ponto $P(x_1, \lambda)$, isto é $a : x\,\lambda^2 \leqslant 406$.

Foi obtida a seguinte lista de pares que satisfaziam a condição de fronteira imposta.

Tabela 2

x	λ
7	8
4	10
6	6
7	7
2	14
1	14
3	7
4	6
5	7
1	13

Daqui resulta que dos 25 pontos escolhidos, ao acaso, no paralelotropo só 10 satisfaziam as condições impostas, o que permite afirmar que o volume do domínio de validade de $P(x_1\, \lambda)$ anda por cerca de $\frac{10}{25} \sim 0{,}4$ do volume do paralelotropo.

4.ª Operação: Estudo das vizinhanças dos pontos da colecção retida na operação 3.

Haverá que calcular, para os pontos da tabela 2, os valores do min $[\max ({}_a x^i - {}_b x^i)]$ e obtém-se os seguintes resultados.

Tabela 3

Ponto	$\min[\max ({}_a x^i - {}_b x^i)]$
(7,8)	1
(4,10)	2
(6,6)	1
(7,7)	1
(2,14)	1
(1,14)	1
(3,7)	1
(4,6)	1
(5,7)	1
(1,13)	1

A partir destes resultados (tabela 3), é fácil de ver que em *duas* iterações se cobrem todas as distâncias e que ao termo da 1.ª, iteração a propabilidade de atingir qualquer ponto é:

$$p_{\lambda} = p_{\lambda_1} = \frac{9}{10} = 0{,}9$$

5.ª Operação: Conceito de extremo significativo e rejeição dos pontos afastados dos extremos significativos procurados.

Há que calcular $z = \dfrac{2\,x + 5}{10\,x\,\lambda}$ para os pontos da *tabela 2* e obtém-se a *tabela 4*.

Tabela 4

$x\ \lambda$	z
(7,8)	0,00340
(4,10)	326
(6,6)	470
(7,7)	388
(2,14)	321
(1,14)	500
(3,7)	523
(4,6)	530
(5,7)	428
(1,13)	538

Para facilitar o cálculo fomos escolher uma função $\varphi(x)$, probabilidade de se perder um extremo ,inspirado na $erf(x)$ mas truncada para 5 intervalos de z, ajustando $\varphi(z) = 0{,}99$ ao menor valor de z registado na *tabela 4* e $\varphi(z) = 0{,}01$ ao maior valor de z da mesma tabela ou, nas iterações seguintes ao menor valor registado. Obteve-se a *tabela 5*.

Tabela 5

Intervalo de z	$\varphi(z)$ $erf\ z$	Número (n) de Pontos $P(x,\lambda)$	$n \times \varphi$
(321-352)	0,99	3	2,97
(352-399)	0,90	1	0,90
(399-446)	0,50	2	1,00
(446-493)	0,10	0	0,00
(493-540)	0,01	4	0,04
> 540	0,00	0	0,00
		10	4,84

Se desprezarmos todos os pontos aos quais corresponde $z > 0{,}00446$ temos uma probabilidade de pertder o extremo igual a:

$$p_1 = \frac{0{,}04}{4{,}84} = 0{,}0082 \qquad \text{e} \qquad q \geqslant 0{,}9918$$

Os pontos retidos são os pares :

Tabela 6

(7,8)
(4,10)
(4,10)
(6,6)
(7,7)
(2,14)
(5,7)

Todos os pontos da tabela têm a propriedade de $z < 0{,}00446$.

6.ª Operação: Realização da 1.ª iteração.

A tabela n.º 7 fornece o resultado da 1.ª iteração.

Tabela 7

C_1	Pontos gerados na 1.ª iteração								
7,8	6,7	6,8	6,9	7,7	7,8	7,9	8,7	8,8	8,9
4,10	3,9	3,10	3,11	4,9	4,10	4,11	5,9	5,10	5,11
6,6	5,5	5,6	5,7	6,5	6,6	6,7	7,5	7,6	7,7
7,7	6,6	6,7	8,8	7,6	7,7	7,8	8,6	8,7	8,8
2,14	1,13	1,14	1,15	2,13	2,14	2,15	3,13	3,14	3,15
5,7	4,8	4,7	4,8	5,6	5,7	5,8	6,6	6,7	6,8

7.ª Operação: Repetição das operações anteriores mas incidindo agora sobre a colecção de pontos da tabela 7.

a) Eliminação na tabela n.º 7, dos pontos que não satisfaçam as condições de fronteira, bem como os pontos a que correspondem valores de $z > 0{,}00446$.

Os pontos retidos constam da tabela 8.

Tabela 8

Pontos	z
6,7	0,00405
6,8	355
7,7	389
8,6	438
8,7	375
5,7	430
5,8	375
5,9	334
4,8	406
4,8	361
4,10	325
3,9	408
3,10	367
3,11	333
2,13	346
2,14	325

b) Rejeição dos pontos afastados dos extremos significativos.

Ajustamento de *erf(z)*.

A_2	n	$P—er\varphi$	$n \times p$
321 a 346	5	0,99	4,95
346 a 371	3	0,9	2,70
371 a 396	3	0,5	1,50
396 a 421	3	0,1	0,30
421 a 446	2	0,01	0,02
446	0	0,00	0,00
	16		9,47

Suprimindo os pontos a que correspondem valores de z superiores a 0,00421 na colecção de pontos da tabela 8, a probabilidade associada à perda dos extremos significativos é:

$$p_2 = \frac{0,32}{9,47} = 0,034 \qquad \text{e} \qquad q_2 = 0,966$$

Os pontos retidos ao termo da 1.ª iteração são os da *tabela 9.*

Tabela 9

Pontos
6,8
7,7
8,7
5,8
5,9
4,9
4,10
3,10
3,11
2,13
2,14

8.ª Operação: Realização da 2.ª iteração.

A partir da tabela 9 foi formada a tabela 10.

Tabela 10

6,8	5,7	5,8	5,9	6,7	6,8	6,9	7,7	7,8	7,9
7,7	6,6	6,7	6,8	7,6	7,7	7,8	8,6	8,7	8,8
8,7	7,6	7,7	7,8	8,6	8,7	8,8	9,6	9,7	9,8
5,8	4,7	4,8	4,9	5,7	5,8	5,8	6,7	6,8	6,9
5,9	4,8	4,9	4,10	5,8	5,9	5,10	6,8	6,9	6,10
4,9	3,8	3,9	3,10	4,8	4,9	4,10	5,8	5,9	5,10
4,10	3,9	3,10	3,11	4,9	4,10	4,11	5,9	5,10	5,11
3,10	2,9	2,10	2,11	3,9	3,10	3,11	4,9	4,10	411
3,11	2,10	2,11	2,12	3,10	6,11	3,12	4,10	4,11	4,12
2,13	1,12	1,13	1,34	2,12	2,13	2,14	3,12	3,13	3,14
2,14	1,13	1,14	1,16	3,13	2,14	2,15	3,13	3,14	3,15

9.ª Operação: Repetição das operações de eliminação.

a) Vamos suprimir da *tabela 10* os pontos que não satisfazem à fronteira e a que correspondem $z(P)$ superior a 0,00401.

Obtém-se a *Tabela 11:*

Tabela 11

6,8	355	2,12	375
7,7	389	2,13	346
8,7	375	2,14	321
5,8	375		
5,9	332		
4,9	361		
4,10	325		
3,10	367		
3,11	333		

b) Supressão dos pontos afastados dos extremos significativos.

Tabela 12

Intervalos	n	$P—er\varphi$	
321 a 334	4	0,99	3,98
334 a 349	1	0,9	0,90
349 a 365	2	0,5	1
365 a 380	4	0,1	0,4
380 a 396	1	0,01	0,01
396	0	0,000	0,00
	12		6,29

$$p_3 = \frac{0{,}01}{6{,}29} = 0{,}0159 \qquad 9 = 0{,}9841$$

Donde os números retidos serem os que constam da *tabela 13.*

Tabela 13

6,8 (355)	3,10 (367)
8,7 (375)	3,11 (333)
5,8 (375)	2,12 (375)
5,9 (332)	
4,9 (361)	2,13 (346)
4,10 (325)	2,14 (321)

10.ª Operação:

Verifica-se que ao termo da 2.ª iteração que os pontos retidos estão contidos na colecção dos pontos da *tabela 9* retidos ao termo da iteração anterior.

Está assim realizada a condição de interrupção do prosseguimento de novas iterações.

Resumindo pode dizer-se, que os extremos significativos se encontram na colecção da *Tabela 13.*

Sendo o mínimo minimorum (2,14) com $z = 0{,}00321$.

São pontos de interesse mais os seguintes:

(2,14) com $z = 0{,}00321$

(4,10) com $z = 0{,}00325$

(5,9) com $z = 0{,}00332$

Passando agora das variáveis usadas no cálculo para as variáveis em que o problema foi posto inicialmente teremos, por ordem, os seguintes pontos com interesse:

2 cabeçotes e 140 rotações

4 » » 100 »

5 » » 90 »

A probabilidade de não se ter perdido outros «mínimos significativos» é dada, segundo o critério adoptado, por:

$$p = p_{\alpha_2} \times \prod_{i=1}^{\alpha_2} qi \qquad \begin{aligned} &= 1 \times 0{,}993 \times 0{,}954 \times 0{,}986 \\ &= 0{,}933 \end{aligned}$$

Como a probabilidade final encontrada é relativamente elevada o resultado obtido merece confiança.