DISCRET.WOO   A.G.Portela. IST , 9 DEZ 1993 .

** DISCRETIZACAO e ESPACOS IMAGENS **

A) INTRODUCAO

O corpo dos reais foi e e' a estructura algebrica mais usada na construcao dos espacos formais onde sao projectadas as imagens do universo tal como este e' observado pelo "homem instrumentado" .

Contudo por mais perfeitos que sejam os instrumentos usados e os sentidos de que o homem e' munido , os resultados finais sao passivos de uma "incerteza intrimseca" , Ie , isto e', o mesmo "objecto" da' origem a imagens diferentes quando obsrvado repetidamente .

Uma "incerteza" semelhante , Is , caracteriza os instrumentos de comando e o "gesto" humano e dai' que a uma mesma instrucao ou decisao vao corresponder accoes distintas .

O processamento da informacao tambem e' feito com uma "incerteza" , Ii .

Assim, um robot interactivo e' capaz , em geral , de :

1 "observar" e criar a imagem respectiva ,
2 processar essa imagem ,
3 construir uma "decisao" com base na imagem processada e num conjunto de instrucoes e dum historial memorizados.
4 finalmente "agir" em conformidade com a decisao tomada .

Porem porque todos os processos referidos sao eivados de uma incerteza , I_ , o resultado (ou composicao) final vem acompanhada de uma incerteza I que vai caracterizar esse robot .

Em geral ha dois processadores que possuiem uma incerteza, I_ , muito elevadas : 1 "oservacao" e o 4 "accao" .

Os processadores 2 e 3 possuiem icertezas que sao EXP(- z) vezes mais pequenos , com z em [9..12] .

Para a incerteza final , I_ , do robot contribuiem , praticamente, apenas as incertezas dos operadores 1 e 4 e sao desprezaveis as dos operadores 2 e 3 .

Esta observacao constitui o motivo do interesse que merecem , aos formalistas e aplicadores odiernos , conceitos tais como :

. incerteza intrinseca I ,
. descretizacao do continuo ,
. substituicao dos reais por inteiros , naturais ou reticulados com relacoes de ordem nao estrictas .
. logicas vagas , operadores de mistura ,
  etc. etc.

B) CONSIDERACOES GERAIS .

. Os objectos observaveis , reais ou virtuais, sao finitos .
. Os instrumentos projectam imagens que representam atributos dos objectos observados .
. A descriminacao "espacial" dos instrumentos e' finita , ou seja os intrumentos exigem que o observado tenha uma dimensao superior a un minimo para que a respectiva imagem seja fiavel .
. A descriminacao "temporal" dos instrumentos e' tambem finita, isto e', o tempo de observacac tem de ser superior a um minimo para que o instrumento estacionarize .
. A observacao vem acompanhada de uma incerteza intrinseca ,

I , humana e instrumental .

. Ha igualmente limitacoes instrumentais quanto a' dimensao dos atributos dos objectos .

. Consideracoes identicas podem ser feitas , mutatis mutandis, com relacao aos instrumentos de accao ou motores e , dum modo geral aos processadores de informacao , e.g. computadores analogicos ou digitais .

. Os modelos formais que emulam o real sao redes de relacoes, estas relacoes sao descritiveis por conjuntos contidos em produtos carteseanos dum conjunto de partida e outro de chegada , nao necessariamente com a mesma estructura .

. Embora os conjuntos acima referidos possam ser sub_conjuntos dos reais , na maioria dos casos sao finitos e entao e' injustificado o uso de reais .

C) PARTICOES, DESCRETIZACAO .

Do Universo so' uma parte esta' em observacao em cada momento e , para o efeito do que se segue, a essa parte vai dar-se o nome de "conjunto universal" , U .

O conjunto universal, U, tambem pode ser particionado .

Numa visao tradicional , o espaco de representacao tera' 4 dimensoes , sendo 3 geometricas , 1 , o tempo .
As tres dimensoes geometricas sao munidas de uma metrica e o tempo de uma metrica propria .
Se relativista , as 4 dimensoes tem uma metrica comum .

Particionar o conjunto universal , e' formar paralelotropos com 3 dimensoes geometricas e uma temporal .
O processo de particao esta' associado ao conceito de descretizacao do continuo e para tanto basta fazer corresponder a cada paralelotropo 4-dimensional um elemento paradigmatico desse paralelotropo .

Com efeito, o conjunto universal tem uma dimensao geometrica finita e tambem e' finito o tempo do processo de observacao e dai' ser finita a dimensao dos paralelotropos 4-dimensionais .

Das consideracoes acima resulta que a particao vai ter um numero finito de partes .

Porque o instrumento de observacao possui descriminacoes espaciais e temporais finitas , estas podem constituir um criterio para definir o paralelotropo minimo e dai' a cardinalicidade da particao do conjunto universal .

O conceito de "incerteza" pode tambem designar-se de "imprecisao" e tem por oposto o conceito de "precisao" .

D) INCERTEZA .

D1) da OBSERVACAO (ou Entrada, ENT), IE .

A incerteza da observacao instrumental , IE, resulta do facto de um objecto com propriedades invariantes observado por um dado instrumento, este vai produzir imagens diferentes, isto e', a imagem resultante e' melhor descrita por uma "destribuicao" de imagens (ou valorese) e nao por uma imagem unica (um so' valor) .
Esta destribuicao estatistica , em geral, tera' uma media uma variancia .
O desvio padrao podera' ser usado como referencia para caracterizar a incerteza intriseca do instrumento , IE, fazendo por exemplo : IE = (1 a 3) * desvio padrao .
A escolha do IE vai contribuir para a fixacao das

dimensoes do paralelotropo minimo .
Veja-se no Anexo 1 uma apresentacao com mais pormenor .

D2) da ACCAO sobre o exterior (ou Saida, SAI), IS .
Os instrumentos de accao sobre o exterior possuiem tambem uma incerteza IS que pode ser tratada dum modo semelhante ao referido com relacao a IE .
Em geral, sucede que o nivel de incerteza IS e' muito superior a IE .

D3) das operacoes INTERNAS (ou Interior, INT), II .
As cadeias de operadores que connectam a entrada com a saida teem uma incerteza II muito pequena e hoje , com o processamento de sinais digitalizado , quasi desprezavel em relacao a IS e ate' a IE .
NOTA
Os operadores internos mecanicos teem incertezas da mesma ordem de grandeza das dos operadores de saida .

E) COMPOSICAO .
A composicao de Distribuicoes e' uma operacao essencial .
Conhecidas as destribuicoes dos instrumentos e operadores que participam num sistema (e.g. : robot) , ha que as compor para obter a destribuicao final do sistema .
Sugere-se por exemplo o metodo de Monte Carlo .
Esta composicao pode ser feita realizando corridas sucessivas, comecando com a distribuicao do instrumento de saida e acreando progressivamente mais instrumentos e ou operadores antecessores ate' atingir os instrumentos de entrada .
As distribuicoes compostas , sucessivamente obtidas permitem calcular a imcerteza correspondente e a final .
O metodo implica :

. Dividir o sistema (robot) em partes .
  Convem que a particao escolhida seja simples e , na medida do possivel, procurando nao misturar numa mesma parte um calculador e um braco mecanico ou um motor electrico de potencia ou um "olho de insecto" .
. Descrever a rede que liga as partes .
. Para cada parte obter a respectiva destribuicao .
  Aqui o uso de formalismos vagos "fuzzy" permite substituir a distribuicao por dois valores , os limites superior e inferior que contem entre eles , por exemplo , 90% da massa da distribuicao .
. Finalmente construir as composicoes acima referidas , recordando que os compositores vagos sao muito mais rapidos do que o metodo de Monte Carlo .

Para mais esclarecimentos , veja-se o Anexo 2 .

ANEXO 1
METODOS de PARTICAO .
a) Presupostos
Para simplificar a apresentacao do tema , introduzem-se as seguuintes hipoteses :

. a imagem produzida pelo instrumento e' projectavel num espaco com uma dimensao e.g. a recta real .
. as imagens do instrumento cabem no intervalo finito [Li..Ls] da recta real .
. o objecto observado tem atributos invariantes no tempo e no espaco , donde decorre que as destribuicoes da imagem sao da responsabilidade apenas do instrumento .

b) Simbologia :

X, Xo — reais , onde Xo pertence ao intervalo [Li,Ls] , finito .

D(X;Xo) — uma destribuicao tendo por dominio X e por parametro Xo .

P(Xo) — desvio padrao da distribuicao D(X;Xo) .

I(P) — funcao monotona com P(Xo) e que , por hipotese, representa a incerteza intrinseca do instrumento .

Na figura 1 , esta' representado um exemplo .

c) Particao do intervalo [Li,Ls] .

Apresentam-se tres modos tipicos de tratar o problema .

c1 A medida do intervalo e' funcao de Xo e portanto de P e de I .

c2 Os intervalos teem medida constante e o problema reconduz-se a' fixacao dessa medida comum .

c3 Construccao dum reticulado .

c1) O intervalo [Li,Ls] e' particionado em N partes . Seja dada a sucessao ordenada dos limites dos intervalos XO, X1,...,XN , onde XO=Li e XN=Ls . Um intervalo generico sera' representado por (Xi-1, Xi] , excepto para o intervalo 1 que e' fechado a' esquerda, [XO,X1] .
Designando por Mi a "medida" do intervalo (Xi-1, Xi], a hipotese estabelecida e' que os intervalos teem medidas M proporcionais a' incerteza I do aparelho nesse intervalo , ou seja Mi/Mj = Ii/Ij ....(1)
Usando a "medida usual" , sera' :
(X(i) - X(i-1))/(X(j) - X(j-1)) = Ii/Ij ....(2)
Designando por Zi a relacao M(i)/M(i-1) , temos :
X(i+1)-X(i) / (X(i)-X(i-1)) = Ii/I(i-1) = Zi ou ainda
X(i+1) = (Zi+1)*X(i) + Zi*X(i-1) ....(3)
onde i pertence a [1..N] , XO=Li e XN=Ls .
Conevem empregar um metodo iterativo para calcular a expressao (3) , como segue :

1) Arbitra-se para X1 um valor no interior do intervalo e.g. : X1-XO = (Ls-Li)/N .
2) Usamndo (3) , calculam-se sucessivamente X2 .. XN .
3) Em geral, o valor de XN calculado sera' diferente de Ls . Corrige-se o valor inicialmente dado a X1 acrestando-lhe (Ls-XN)/Ls .
4) Se ABS((Ls-XN)/Ls) > W entao regressar a 1) , caso contrario sair da iteracao .
W devera' ser escolhido caso a caso mas , em geral, tomara' valores compreendidos entre EXPonencial de (-4 a -10) .

c2) Os intervalos teem medida igual e o problema reduz-se a' escolha da medida comum , Mc , das partes , usando como referencias , por exemplo :
o maximo, mininmo, a media, a moda da funcao I(Xo).
Seja k =(Ls-Li)/Mc , escolher para Mc o menor inteiro que seja maior ou igual a k . .

c3) Construir um reticulado .
Supoe-se que ja foi escolhida a particao e sejam dados :
. a sucessao ordenada de limites : XO, X1, ... , XN ,

com XO=Li e XN = Ls .

, e a funcao incerteza I(P(Xo)) .

Designando por Wi um ponto interior do intervalo (X(i-1), Xi] , por exemplo Xi ou (Xi+X(i-1))/2 ,

forme-se a sucessao W1,...,WN de pontos .

Desige-se por Gi=[XO, Xi] e por M.i a medida de Gi

Entao sera M.i = SOMATorio (Mj) , com j em [1..i] .

Pode construir-se um reticulado , onde

Ur = {M.1, M.2,...,M.N} e o conjunto universal,

Max e Min sao as connectivas de que vai ser dotado Ur,

>= e a relacao de ordem adoptada.

Reparar que as connectivas , Max e Min , sao fechadas e a relacao de ordem e' estricta , porque X(i-1) < Xi , para todo o i em [1..N] .

A particao e o reticulado { Ur : Max, Min, >} estao em condicoes de ser operados empregando teorias formais vagas (fuzzy) .

ANEXO 2

COMPOSICAO de FUNCOES .

A composicao e' feita ao nivel das funcionais D(X; Xo) .
Como o parametro Xo tem a potencia do continuo , a solucao adoptada consiste :

1º Particionar o Sistema (Robot) em M partes S1,S2,...,SM e , se possivel, tendo tambem em atencao uma razoavel homogeneidade da incerteza intrinseca dos subsistemas que constituiem as partes Sk .

Os subsistemas Sk , sao constituidos por varios aparelhos e instrumentos com "incertezas" distintas , donde ser necessario particionar Sk , sendo Skl o simbolo generico duma parte de Sk .

E assim sucessivamente ate' ser atingido um nivel de desagrgacao considerado conveniente .

Uma rede descreve o modo como as partes estao ligadas . S(k..r) simboliza uma parte do Sistema cujo caminho de desagregacao e' k..r .

Para cada parte S(k..r) do Sistema sao construidas as particoes [Xi..Xs]:(k..r) e criadas as distribuicoes D(X, Xo):(k..r), correspondentes , veja-se Anexo 1 .

2 Porque Xo tem a potencia do continuo , havera' que proceder a' escolha de uma distribuicao paradigmatica , D(X; Wo):(k..r), para representar a parte S(k..r).

As funcionais , D(X; Wo):(k..r) , sao entao "compostas" tendo em atencao a rede que descreve a desagregacao do do sistema (robot) .

3 Um exemplo muito simples ilustrara' o metodo :

O sistema foi particionado em 3 partes :

S1 Sistema de Observacao (ENT) ,

S3 Sistema de Accao (SAI) ,

S2 Sistema de Operadores (INT) que connectam S1 com S3 .

A rede e' descrita pelos seguintes pares :

(S1,S2) e (S2,S3) .

Sejam D(X, Xo1):1 , D(X,Xo2):2 e D(X,Xo3):3 as 3 distribuicoes a compor .

Sejam D(X,Xo23):(2+3) a composicao C(2,3) e
D(X,Xo123):(1+2+3) a composicao C(1,C(2,3)) .

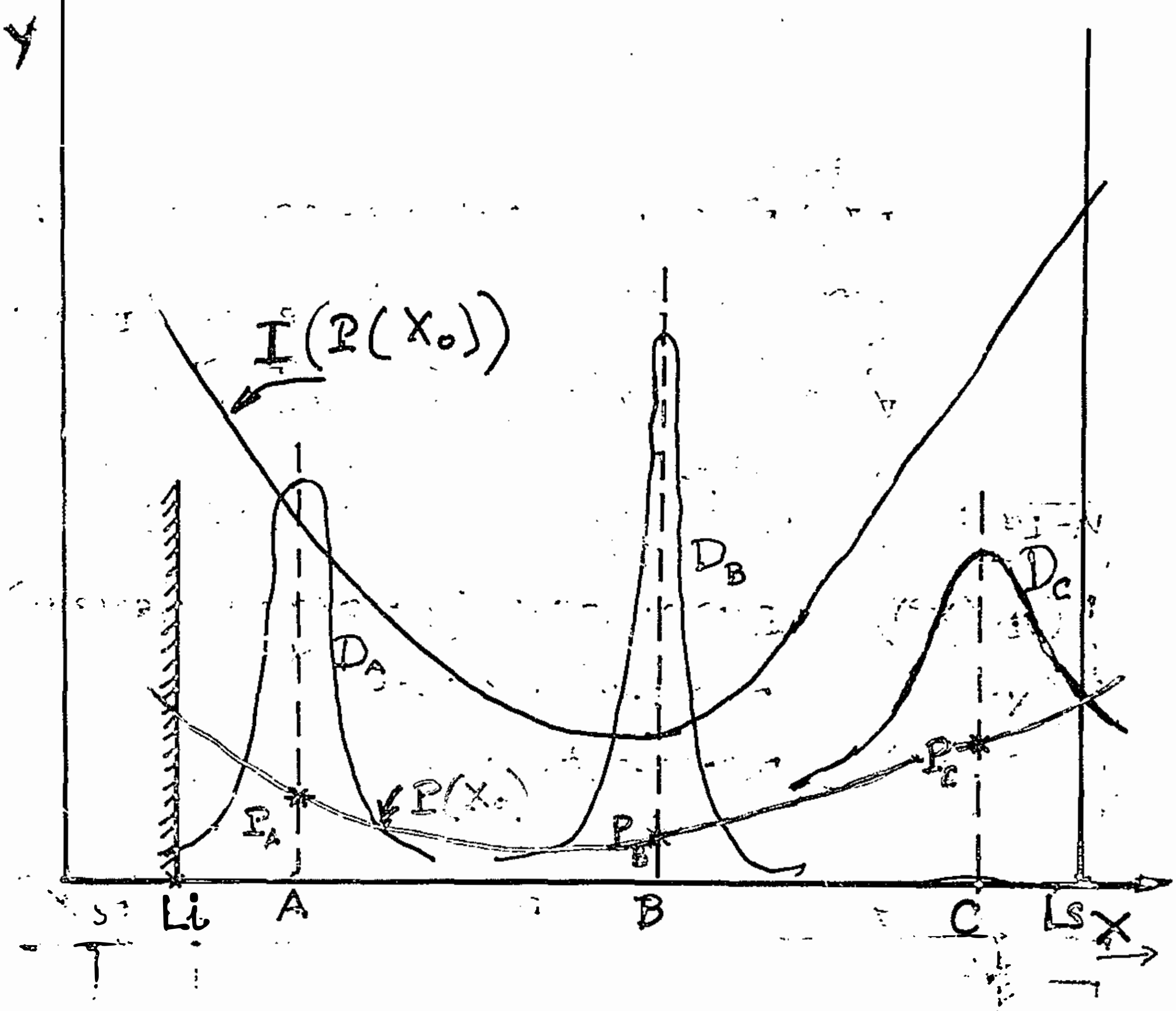
A partir das distribuicoes compostas obtem-se os desvios padrao e finalmente IG , a incerteza do sistema global (do Robot) .

4 Recorda-se , mais uma vez que estas operacoes sao muito mais simples se forem usandos reticulados .

NOTA:

Normalmente, a Relacao entre o intervalo minimo, observavel, e o intervalo de Observacao do Aparelho anda por 1/100 a 1/1000 donde só serem Precisos articulados com Conjuntos Universais com condicoes entre 100 e 1.000.

Fig: 1



$D(X;X_0)$	Distribuições
$P(X_0)$	Desvios Padrao.
$I(P(X_0))$	Incerteza (inverso de Precisao)

<u>Nota</u>: o instrumento é mais "preciso" na região central do intervalo.

A escala das Ordenadas YY é cerca de 1/100 da escala das abcissas XX, para P e I.

D_A, D_B e D_C supoem-se normalizadas a 1.