



INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

GEOMETRIA AFIM E A MEDIDA DO VALOR

ANTÓNIO GOUVEA PORTELA

DOCUMENTO DE TRABALHO

77

2ª Conferência sobre Aplicações da Matemática à Economia e à Gestão

23-24 de Novembro de 1988

CENTRO DE MATEMÁTICA APLICADA À PREVISÃO E DECISÃO ECONÓMICA

Rua Miguel Lúpi, 20
1200 Lisboa

Este documento não pode ser reproduzido, sob qualquer forma,
sem autorização expressa

Titulo : Geometria Afim e a Medida do Valor .

Autor : Antonio Gouvea Portela .
(I.S.T)

Data : Setembro de 1988 .

* Resumo : E' possivel construir :

- a) um espaco-imagem baseado em medidas de natureza economica .
- b) hiper-superficies referenciais destinadas a processos economicos
- c) uma figura de merito para medir a eficiencia dos processos economicos .
- d) Finalmente , a geometria afim parece particularmente adequada para representar objectos e quantidades de natureza economica , e a sua avaliacao no tempo .

* Summary : It is possible to construct :

- a) an image-space based on measures of economic nature .
- b) referencial hyper-surfaces for economic processes .
- c) a figure of merit to evaluate the efficiency of economic processes .
- d) Finally , afin geometry is deemed well suited to represent objects and quantities of economical nature and their evolution in time .

* Résumé : On peut construire :

- a) un espace-image basé sur des mesures de nature économiques .
- b) des hyper-surfaces referencielles pour les processus économiques .
- c) une figure de merito pour evaluer l'efficience des processus économiques .
- d) Finalement , la geometrie afin est adequate a' la representation des objects et quantites de nature economique et leurs evolutions temporelles.

INDICE

Pagina

A) PROLOGO	1
B) ALGUNS CONCEITOS BASICOS	3
B1) Real e Imagens .	3
B2) Espacos Imagens e suas estruturas .	4
B3) Especificacao :	4
B3.1) Fronteiras .	4
B3.2) Indicatriz , Caracterizante	5
B4) Funcoes de conjuntos e medidas .	5
B5) Funcoes Homogeneas e nocao de grau .	6
B6) Funcoes quasi-medidas , paradigmas e correccao.	7
B7) Espacos mensuraveis e metricas .	7
B8) Medidas de Probabilidade e Conjuntos vagos .	8
C) APLICACAO	9
C0) Introducao .	9
C1) Apresentacao de algumas funcoes tipicas	9
C1.1) Densidades volumicas	10
C1.2) " Superficiais	10
C1.3) " por linhas	10
C1.4) Objectos pontuais	11
C2) Funcoes medidas paradigmaticas	12
C3) Construcão de um espaco mensuravel Zu	12
D) Conceitos Complementares	13
D1) Conceito de valor	13
D1.0) Introducao	13
D1.1) Subjectividade	13
D1.2) Aditividade	14
D1.3) Solucao adoptada	14
D2) Conceito de reversibilidade	14
D2.0) Introducao	14
D2.1) Transferencias reversiveis	15
D2.2) " irrevversiveis	15
D3) Conceito de resto do universo	15
D4) Criterio de eficiencia economica	16
E) Formalisacao do conceitos	17
E0) Introducao	17
E1) Espacos X_3 e Y_u	17
E1.1) Simbolos	17
E1.2) Aplicacao do teorema de Stokes	18
E2) Formalisacao do conceito valor (VLR e VMV)	19
E2.0) Introducao	19
E2.1) Simbologia	19
E2.2) Transformacao	19
E2.3) Exemplos tipicos	20
E2.4) Comentarios	20
F) RESUMO e CONCLUSAO	21

Anexo 1	Transformadas de Contacto	[1]	1
Anexo 2	Geometria afim	[2]	1
1)	Algumas noções gerais		1
1.0)	Introdução		1
1.1)	Simbologia		2
1.2)	Tipos de espaços		2
1.3)	Objectos e quantidades geométricas		3
1.4)	Operações sobre afinos		3
1.5)	Objectos e fórmulas de transformação		4
1.6)	Tensor fundamental		4
1.7)	Operadores diferenciais		5
2)	Teorema de Stokes		5
3)	Operador de Lie		6
4)	" de Lagrange		6
5)	Aplicação do conceito de valor		7
5.1)	Simbologia		7
5.2)	Continuidade e teorema de Stokes		7
5.3)	Conceito de valor		7
Anexo 3	Grafos de acreação	[3]	1
0)	Introdução .		1
1)	Simbologia		2
2)	Grafos típicos .		
2.1)	Tipo 1		2
2.2)	Tipo 2		3
2.3)	Tipo 3		4
2.4)	Tipo 4		5
2.5)	Tipo 5		5

Bibliografia

INDICE

A) PROLOGO .

Com o advento da facil e instantanea tranferencia de informacao e do transporte de pessoas e bens a velocidades progressivamente mais elevadas , resultou que os povos sabem cada vez melhor como os outros vivem em sociedade , que meios economicos deteem , que regimens politicos adoptam , que credos e conviccoes seguem.

A poderosa forza do mimetismo , a "moda" , leva-os , por um lado , a copearem-se mutuamente , assimilando culturas , comportamentos e procedimentos , mas por outro , a acumular frustracoes , reservas e odios que podem eclodir em conflitos .

Mesmo os povos grandes e ricos ja nao podem decidir sem terem em atencao os projectos , aspiracoes , vontades e comportamentos dos outros povos , porque o planeamento, em isolamento nacional , nao seria eficaz .

A' escala planetaria . o numero . a dimensao e a influencia das sociedades "isoladas" sao diminutos .

A exaustao de um recurso mineral , a desertificacao duma regioao , um mau ano agricola , a poluicao industrial , catastrofes , etc. ja' nao sao processos intra-muros , porque os seus efeitos repercutem-se rapidamente e em paizes mesmo muito distantes .

A ciencia economica , como uma forma de observar os processos societais humanos , nao pode deixar de estudar a evolucao dos povos a nao ser como um todo e a' escala terrestre.

Parece oportuno dar os primeiros passos na senda da criacao duma "base geografica economica" , emulando as bases geograficas fisicas .

O suporte espacial subjacente a' "base geografica fisica" serve igualmente a' imagem economica a qual sera' uma applicacao num espaco de grandesas economicas .

Os objectivos desta comunicacao sao :

- . apresentar um suporte formal , a geometria afim que se afigura a linguagem adequada a este desiderato .
- . mostrar a relevancia de certos conceitos semanticos na modelacao do "real economico" procurando inspiracao na fisica.
- . Introduzir um conceito de valor , que configure uma funcao medida e que permita construir um instrumento formal de apreciacao e medida da eficiencia economica .

Para este efeito :

* No Cap B faz-se uma rapida e sumaria apresentacao dos conceitos semanticos de maior interesse .

* No Cap C faz-se uma applicacao , alinhando-se algumas sujestoes de espacos-imagens que se afiguram adequados a' representacao do "real economico" .

- * No Cap D sao introduzidos conceitos complementares , tais como : valor , reversibilidade , resto do universo e e' sugerido um criterio de eficiencia economica .
- * No Cap E sao efectuadas formalisacoes dos principais conceitos , porem numa linguagem mais discursiva do que sintatica .
- * No Cap F apresenta-se o resumo e a conclusao .

Com o objecto de nao tornar pesada a leitura do texto principal , essencialmente semantico e descritivo , remetem-se tres temas para anexos :

- * Anexo 1 : As transformadas de contacto .
Sao essenciais na passagem de grandezas extensivas (medidas) para intensivas (relacoes entre extensivas) .
Permitem , em certas circunstancias , reduzir a dimensao do espaco imagem .
 - * Anexo 2 : A geometria afim .
Porque a - geometria afim - e' um instrumento formal poderoso mas nao muito divulgado na linguagem e simbologia de Schouten , recordam-se alguns conceitos e formulas antes de efectuar uma applicacao a' modelacao da imagem economica da realidade .
 - * Anexo 3 : Os hiper-grafos .
Varias applicacoes da teoria dos grafos sao expostas , porque o conceito de valor dum "objecto" implica a construcao de grafos. Sao examinados alguns tipos mais caracteristicos .
- * No final encontram-se algumas referencias bibliograficas e o indice .

Comentarios :

- . E' conspicuo a ausencia de referencias a temas economicos . mas na verdade , o objectivo e' essencialmente mostrar como se procediria em disciplinas como a fisica, teoria da informacao ou do conhecimento, por exemplo, mas nao e' certamente provar semanticamente que um qualquer "modelo" descreve aceitavelmente o real economico .
- . A esperanca que esta exposicao possa vir a interessar um economista ou especialista em ciencias sociais que , com melhor formacao e informacao , possa modelar , em geometria afim , a imagem economica do real , e' toda a motivacao do autor .
- . Seguindo a nova tendencia dos cultores das linguagens formais , a semantica , a interpretacao do "real" , faz parte da apresentacao da linguagem sintatica , estabelecendo uma ponte entre a realidade e as formas puras que a emulam .

. Finalmente cabe aqui agradecer ao Prof.Dr.Antonio A. Costa a paciencia de ter dado uma leitura ao texto e feito sugestoes da maior valia , mas os erros e incorreccoes que sobejaram sao da exclusiva responsabilidade do autor .

B) Alguns conceitos basicos .

B1) Real e Imagens .

Todo e qualquer " objecto de estudo " vai passar a designar-se por "objecto_real" ou simplesmente por "objecto", e sera' entendido como um "conjunto universal" , com o significado que esta expressao tem em algebra e topologia .

O "objecto" e' o dominio do estudo semantico e dele sao extraidas "imagens" , sempre parciais , mas que em conjunto produzem uma representacao , intelegivel para os humanos , desse "objecto" .

O "objecto-real" pode ser :

- um objecto ou coleccao de objectos fisicos .
- uma imagem de um objecto fisico ,
- um biota ou uma sociedade de biotas (e.g. humanos) ,
- uma sensacao , um conceito , um credo , etc. ,
- em resumo , tudo quanto for - objecto - de estudo .

Porque o "objecto-real" configura um "conjunto universal" . os conjuntos nele contidos serao especificados da forma mais adequada , usando caracterizantes se requerido .

Qualquer imagem dum "objecto" forma-se num "espaco_imagem" , ou simplesmente "imagem" e este espaco , em geral , sera' munido de estruturas algebraica e topologica .

Ha a preocupacao de escolher para o espaco_imagem a estrutura mais simples que a modelacao do real consentir .

O "objecto-real" e' descrito numa linguagem semantica , e.g.: linguagem natural e ou seus dialectos scientificos ou ate' outra linguagem objectiva usada como semantica .

Uma - funcao - , definida sobre o "objecto" (este desempenhando o papel de dominio da funcao) e tomando valores no "espaco_imagem" , (contra-dominio da funcao) , configura o "processo intrumental" de produzir imagens .

Em toda os dominios da ciencia admite-se o pressuposto entimemico seguinte: A estrutura do espaco_imagem adoptada e' homologa da estrutura do "objecto-real" a emular e a funcao que aplica o "objecto-real" no espaco_imagem nao deturpa essa homologia .

Note-se que se for um instrumento fisico a realizar a referida applicacao, entao havera que, experimentalmente, assegurar a satisfacao deste pressuposto .

O convencimento da "verdade" desta homologia pode tornar-se muito forte e obsessiva, transformando-se num verdadeiro "credo" defendido denodadamente pela congregação científica que o adoptou e só o carreamento de nova informação vai permitir provar ou não a verossemelhança da referida homologia.

Ver refer. : 2 e 3 (semantica) e 1.a (sintatica) .

B2) Espacos_imagens e suas estruturas .

Por principio, o espaco_imagem deve ter a estrutura formal adequada e não devem ser impostas restricoes quer à dimensao do espaco quer a complexidade da estrutura .

Tambem não devem ser conferidas a estrutura do espaco_imagem propriedades que o real não possui.

A dimensao dos espacos imagens é , em geral finita ou numeravel porem ha situacoes onde sera' necessario recorrer a espacos fractais.

B3) Especificacao .

A especificacao dum conjunto consiste em verificar quais os elementos do "conjunto_universal" que satisfazem a uma lista de atributos semanticos - o meta-teorema da especificacao - . Todo o elemento que satisfaca aos referidos atributos declara-se - membro - do conjunto especificando .

Este tema é importante quando se trata de reconhecer e interpretar a lista de atributos semanticos dos elementos do "obj-real" e não apenas de especificar conjuntos em espacos formais, muito mais simples e regulares do que a realidade .

Para definir um conjunto contido no "conjunto universal" ha que adoptar um metodo , essencialmente interpretativo , a executar por observadores humanos , auxiliados ou não por instrumentos de observacao e medida.

A " intervencao " de humanos nos processos de observacao e medida vai " deformar " a imagem resultante , por forza e causa dos concomitantes credos, conviccoes e estados de alma dos humanos intervenientes .

Por fim , é recomendavel que as "imagens" sejam escolhidas de modo a tornar facil a compreensao , e.g. : a fotografia dum objecto é de mais facil reconhecimento do que a respectiva transformada de Fourier . Ver ref. 1.a , 2 e 3 .

B3.1 Fronteiras

Uma classe de especificadores muito corrente em semantica , é baseada na utilizacao de um outro conjunto ja especificado . Este conjunto de apoio é , em muitas casos , um dominio espacial delimitado por uma fronteira .

Os fluxos através desta fronteira e as restrições selectivas resultantes representam um problema básico não só na física e outras ciências afins, mas também, no outro extremo, nas ciências que se interessam pelos biotas (humanos ou não) e respectiva vida societal, com os seus territórios e domínios de actuação.

A termodinâmica usa essencialmente este modo de especificar conjuntos, ver ref.: 13 e 14.

B3.2 Indicatriz e Caracterizante.

Os especificadores usuais declaram que um dado elemento do "conjunto universal" pertence ou não ao conjunto a especificar, ou seja, aplicam o "conjunto universal" no reticulado de Boole (diádico) e esta aplicação designa-se por indicatriz do conjunto especificando.

A realidade, sobretudo quando os biotas interveem no processo, é porém muito mais complexa e é difícil declarar perentoriamente se sim ou não um elemento dado pertence ao conjunto especificando.

Zadeh estendeu os especificadores a aplicações que tomam valores em reticulados em geral e estas aplicações designam-se por caracterizantes.

Assim a indicatrix é um caso particular dum caracterizante que usa o reticulado de Boole (diádico). Ver ref.: 11 e 13.

B4) Funções de conjunto e medidas.

Aqui interessa referir aquele tipo de funções de conjunto que estabelecem uma correspondência unívoca do conjunto com um elemento do espaço-imagem, estando este dotado de uma estrutura algébrica munida de, pelo menos, uma connectiva de natureza aditiva.

Assim, sendo dados dois conjuntos A e B, a função vai invocar respectivamente os elementos: a, b do espaço-imagem e tem sentido escrever $a + b$, onde (+) simboliza a connectiva aditiva da estrutura de que foi munido o espaço-imagem.

Entre estas funções de conjunto do tipo acima existe um sub-tipo, as medidas, que gozam da propriedade da aditividade, isto é, se A e B forem disjuntos e c for a medida do conjunto reunião (A,B) então $c = a + b$.

A busca desta funções_medidas tem sido uma preocupação constante do Homem, e.g.:

- O cardinal do reunião de dois rebanhos A e B, disjuntos, é a soma dos cardinais de A e B. (conhecido desde os tempos do homem - pastor).
- A aditividade dos volumes dos cereais deu origem ao conceito de silos comunitários, evitando a construção de grandes edificações para conter, em vasos separados, os cereais dos diversos agricultores e comerciantes.

- O reconhecimento da aditividade das areas de terrenos agricolas, constituiu descoberta essencial para o loteamento agricola no Egipto classico e foi promotora do desenvolvimento da geometria entre os gregos .
- A balanca instrumento concebido na alta antiguidade , conta com a aditividade da massa dos corpos disjuntos.
- A aditividade da energia e' fundamento da termodinamica e e basica no calculo das maquinas motrises .
- A entropia pode ser construida como uma medida nos processos reversiveis dos sistemas reais .
- A teoria das probabilidades assenta no conceito de medida positiva finita e normada .
- Um funcionario-caixa dum banco acredita na aditividade dos escudos que recebe ou entrega .

A descoberta de uma nova medida no Universo e' motivo para vastos desenvolvimentos e inovacoes .
As ciencias "duras" (ou inanimadas) constroem os seus modelos usando referenciais que sao funcoes medidas do "real" .

Ver ref. : 1.f , 10 e 14 .

B5) Funcoes Homogeneas e Noçao de grau . (e.g. : 0 e 1).

Seja dado um espaco imagem devidamente estruturado de N dimensoes onde se projectam N medidas M_{ij} dum conjunto C_j contido num "conjunto universal" (obj.real) .

Se , para todo C_j contido num certo dominio do (obj.real) e para duas medidas k e l , for M_{kj} / M_{lj} constante entao diz-se que esse dominio do "obj.real" e' homogeneo em k e l .

M_{kj} pode ser descrito em funcao de M_{lj} por meio de uma funcao homogenea de grau 1 , se o "obj.real" for homogeneo em k e l .

Se esta propriedade se verificar para todo e qualquer par de medidas das N do espaco imagem , entao diz-se que o dominio e' completamente homogeneo e qualquer nova medida pode ser descrita por uma funcao homogenea de grau 1 em funcao das restantes medidas .

A relacao de duas funcoes homogeneas de grau 1 produz uma funcao homogenea de grau zero e a homogeneidade do dominio pode verificar-se pela constancia das funcoes homogeneas de grau zero.

Os povos da antiguidade devem ter verificado a existencia duma relacao homogenea de grau 1 entre o volume aparente dum cereal e a massa desse volume e porque uma medida volumetrica e' mais facil de construir e mais simples de manusear do que efectuar uma pesagem com uma balanca , dai talvez resultasse uma larga divulgacao das medidas volumetricas .

A funcao homogenea de grau zero associada ao par (massa, volume) designa-se por massa especifica aparente a qual devera' ser constante no dominio se este for homogeneo .

Ver ref. : 1.f , 4 , 6 , 9 , 10 , 12 e 14 .

B6) Funcoes quasi_medidas , medidas paradigmas e funcoes de correccao .

Partindo dum silo vazio , efectuado o seu enchimento no tempo das colheitas e retirado o cereal , a medida das necessidades ate ao seu completo esvaziamento e tendo tomado nota das pesagens das entradas e saidas, se a - massa - for uma funcao_medida e' de esperar que a soma das massas entradas seja igual a' das saidas . Porem tal nao se verifica na pratica e apura-se um erro ou diferenca nao desprezavel .

Dois caminhos podem ser tomados :

- ou a - massa - e' retirada da lista das funcoes_medidas .
- ou se acrescenta ou retira uma porcao ficticia de cereal que sera' responsabilisada pelas diferencas .

Desde tempos muito recuados a solucao escolhida foi a segunda , tao importante se considerava , ia' nessa altura, conservar a aditividade a certas grandezas .

Assim as " quasi_medidas" do mundo real sao substituidas por "medidas paradigmaticas" e formalmente perfeitas e acrescenta-se uma funcao correctiva e associada a' medida_paradigma , afim de compensar as diferencas encontradas .

A circunstancia de nao ser conhecida a explicacao das diferencas verificadas nao impediu esta pratica , talvez na esperanca de um dia vir a ser descoberta a sua causa .

As leis da conservacao da massa , da energia ou duma simples contabilidade de partidas dobrados , atestam a importancia da construcao de funcoes_medidas a partir das quasi-medidas do mundo "real" . Ver ref. : 12 e 14 .

B7) Espacos mensuraveis e metricas .

O espaco onde uma - medida - toma valores e' mensuravel , em geral , e varias metricas podem ser adoptadas . Mas as imagens do "obj-real" implicam varias medidas e e' usual formar o producto cartesiano respectivo . Um multiplo (elemento do producto cartesiano) sera' a imagem global de um dado sub-conjunto do "obj-real".

O problema esta' em saber se se pode dotar de uma metrica o espaco_producto , isto e' , se e' possivel provar semanticamente que o "obj.-real" e' um espaco mensuravel e qual a metrica adequada .

O presuposto da homologia entre a realidade e o espaco imagem impoe esta precaucao , porque embora formalmente possa ser possivel e ate facil dotar o espaco imagem de uma metrica , contudo tal pode nao ter sentido nem intepretacao coerente com os factos e experiencias efectuadas na realidade em estudo . e.g.: o espaco-imagem da classica termoestatica nao tem metrica .

Muitos exemplos existem no dominio da economia que deixo ao leitor atento o prazer da descoberta .

Em sintese , a metrica escolhida para o espaco imagem tem de corresponder a uma propriedade verificavel na natureza .

Ver ref. : 1.e , 1.f e 14 .

B8) Medidas de probabilidade e conjuntos vagos (fuzzy sets) .

Nas operacoes de observacao e medida , a correspondencia (relacao) , que descreve a formacao da imagem do real , nao e' , em geral , univoca e varias imagens correspondem a um mesmo objecto real .

Assim , no caso simples da imagem ser um ponto na recta real , a plurivocidade da relacao tomara' a forma de varios pontos representarem o mesmo objecto .

Em certos casos , tem sentido definir uma medida finita e normada sobre o espaco-imagem e a "imagem do objecto" nao sera' dada por um ponto mas pela distribuicao que descreve a medida referida.

O sentido semantico dado a estas medidas e' o de probabilidade (a priori ou a posteriori) dos acontecimentos . isto e' . das imagens dum dado objecto .

Entretanto Zadeh estende o conceito de especificacao de conjuntos substituindo o reticulado de Boole por reticulados sem restricoes e interessou-se muito especialmente pelo intervalo fechado $[0, 1]$ da recta real.

Daqui resultou que os caracterizantes dos sub-conjuntos do conjunto universal tomam a forma de applicacoes do conjunto universal no intervalo $[0, 1]$ e desta feita , os caracterizantes , como as medidas de probabilidade sao funcoes dum conjunto universal e tomam valores no intervalo $[0, 1]$, so' que as probabilidades sao funcoes aditivas e os caracterizantes nao sao .

A estas applicacoes nao aditivas deu-se o sentido semantico de " possibilidade " , e tem sido preocupacao dos cultores da "fuzzy mathematics" encontrar exemplos e situacoes que permitam ilustrar o que se entende por - possibilidade - e o que a distingue do conceito de - probabilidade - , sem recorrer ao teste formal da aditividade .

Dada a facilidade de compor funcoes (distribuicoes) cujos dominios e contradominios sao os mesmos , tem sido fecundos os exercicios formais combinados sobre - possibilidades - (com o reticulado $[0, 1]$) e as - probabilidades - .

Ver ref. : 15 (Possibilidade versus Probabilidade) e a bibliografia nela referida .

C) Aplicacao .

C0) Introducao .

- * O objecto-real , como - conjunto universal - , e' o planeta Terra com a sua envoltura gasosa e os biotas que nela vivem , os artefactos e o excreta da sua actividade .
Contudo nada impede que se estenda o conceito acima definido a outros dominios do Universo .
- * O espaco formal sera' um $X_4 = X_3 \times R$, onde :
 X_3 representara' o espaco fisico 3-dimencional e
 R o tempo .
 - . O espaco fisico X_3 sera' dotado de uma metrica como e' usual , para permitir definir distancias angulos etc. , a base para X_3 sera' centrada no centro da Terra . mas outras bases auxiliares serao escolhidas quando tal se mostrar conveniente .
exemplos de representacao : coordenadas esfericas , cilindricas ou cartesianas .
 - . O espaco R , o tempo , sera' dotado da metrica usual , o centro sera' uma data escolhida arbitrariamente e o simbolo t sera' reservado para descrever o tempo.
 - . O espaco X_4 nao tem metrica , uma vez que nao se preveem fenomenos necessitando de correccao relativista .
- * O espaco-imagem Y_u sera' formado pelo producto cartesiano de u funcoes reais F_k de X_3 , (k em $[1..u]$) .
 - . Y_u sera' uma imagem geometrica do objecto-real mas adequada a ulterior tratamento com vista a criar imagens de natureza economica .
 - . t , o tempo , continua a funcionar como parametro .
 - . por razoes do foro da interpretacao , Y_u nao podera' ser dotado de uma metrica .
 - . a apresentacao das funcoes F_k acima referidas , far-se-ha a' medida das necessidades da exposicao do modelo .

C1) Apresentacao de algumas funcoes tipicas .

A caracteristica essencial do espaco Y_u e' de ser formado por funcoes reais que representem :
 ou grandezas "extensivas" as quais gosam da propriedade da aditividade e descritiveis por funcoes_medidas (F_k),
 ou grandezas "intensivas" , que sao relacoes (G_k) de funcoes_medidas .

Recorda-se que a partir das funcoes (G_k) e de uma medida de -referencia- (F_z) , podem ser reconstruidas as medidas (F_k) associadas a (G_k) .

As grandezas serao na realidade pseudo-medidas . mas podem ser convertidas em medidas pela introducao das funcoes de correccao auxiliares (ver: B6) .

O que interessa portanto é reconhecer e identificar no objecto-real , as propriedades (atributos) que se assemelham ou a grandezas extensivas ou a intensivas .

O preco , relacao entre uma quantidade de moeda e quantidade correspondente de mercadoria é uma grandeza intensiva . Na verdade verifica-se uma razoavel aditividade nas grandezas moeda e mercadoria para as assimilar a grandezas extensivas .

C1.1) Densidades Volumicas .

A relacao de uma qualquer grandeza extensiva e o volume (espacial) ocupado , é uma propriedade intensiva muito empregada para descrever : jazigos minerais , oceanos , lagos , a crosta terrestre e a envoltura gasosa , etc. . A densidade (volumica) é usualmente representada por um vector definido em cada "ponto" do dominio a descrever .

- * O conceito de "ponto" terá , em geral , o sentido semantico de "retículo", isto é , dum paralelotropo de dimensoes suficientemente pequenas para poder ser assimilado a um ponto no contexto da observacao ou mensuracao . Em cada caso concreto deverao ser indicadas as dimensoes do paralelotropo , e.g.: jazigos (1 m^3), lagos (1 Dec^3) , oceanos (1 km^3) , etc. .

Repare-se que sendo a massa da terra finita , será finita a massa dum "reticulo" e as funcoes quer representem grandezas extensivas (F_k) quer intensivas (G_k) serao tambem finitas . Mesmo na hipotese de que fossem infinitas num numero numeravel de pontos , o recurso a uma representacao por meio de distribuicoes regularisaveis a' Schwartz seria uma solucao para o problema .

C1.2) Densidades superficiais .

Grandezas tais como : recobrimentos florestais , culturas , extensoes lacustres , barragens , desenvolvimentos urbanos , regioes administrativas , populacoes de biotas etc. sao descritiveis facilmente por meio de densidades superficiais.

Tratam-se de dominios em X_2 simplesmente connectados por linhas connectantes em X_1 , (as fronteiras do dominio) . Os fluxos, atraves dessas fronteiras, de grandezas gozando de aditividade pode ser tratado como referido anteriormente para as densidades volumicas .

C1.3) Densidades em linhas .

As redes de comunicacao (ferro e rodo-viarias , oleo e gasoductos, redes de agua e saneamento , etc.), contornos ou fronteiras regionais ou nacionais constituem exemplos de objectos susceptiveis de se descreverem em X_1 , as fronteiras sao pontos e os fluxos sao apurados nos dois pontos connectantes .

O formulario a usar é identico ao applicavel a C1.1 e C1.2 .

C1.4) Objectos pontuais .

Muitos objectos são essencialmente isolados , e.g.: viaturas , navios , imóveis . fabricas . biotas etc. .

A sua localização será mais facilmente representada por um vector centrado e cujo extremo está situado num ponto do objecto escolhido para referencia .

Um espaço E_3 ou E_6 , centrado no extremo do vector acima referido e solidário com o objecto , complementa a imagem do objecto . Em geral , aproveitam-se as simetrias que o objecto eventualmente possui .

Porque os reticulos da malha resultante da discretização do continuo , têm uma dimensão finita e não infinitesimal , sucede que num reticulo podem existir mais do que um objecto ou inversamente sejam necessários mais de um reticulo para o descrever .

Esta dificuldade resolve-se , escolhendo convenientemente a dimensão do reticulo e o pormenor da descrição do objecto será relegado para o E_6 local .

Os biotas são de longe os mais difíceis de descrever e o método a seguir será criar uma taxonomia (uma arborescência) e estudar apenas as classes resultantes , o que reduz o cardinal do conjunto universal a valores que já possibilitam o registo e a manipulação informáticos .

Em geral serão necessárias várias taxonomias cada uma desenhada tendo em vista o problema a resolver , e.g.: um problema de transportes exige uma taxonomia diferente da dum problema ecológico.

C2) Funções-medidas paradigmáticas .

Foram apresentadas em C1) alguns tipos de funções cujo producto cartesiano forma o espaço-imagem Y_u .

Todas elas descrevem grandezas extensivas , quer directamente quer na forma de densidades espaciais , e.g.: volume , massa , energia , número de elementos , horas , numerário etc. .

Não será difícil justificar , quer por via experimental quer por construção , a natureza extensiva destas grandezas , a respectiva mensurabilidade e propor quasi-medidas adequadas .

A partir das quasi-medidas que descrevem propriedades e atributos observáveis no "objecto" , serão construídos os correspondentes pares de :

funções-medidas (paradigmáticas) e
funções-correctivas (associadas) .

Recorda-se que embora o espaço Y_u seja formado por funções mensuráveis e dotadas de métricas , não é , possível , semanticamente , dotar Y_u de uma métrica .

C3) Construcao de um espaco metrisavel (Zu) .

Os objectos , nao sendo -iguais- nem da mesma natureza , podem , para certas formas da actividade do homem em sociedade , serem considerados -equivalentes- .

Para mensurar essa equivalencia , introduz-se um conceito "sincretico e subjectivo" que sera' designado por "valor".

O "valor" tem estado subjacente na apreciacao do "real-economico" dos objectos desde a mais remota antiguidade .

Varias interpretacoes do conceito "valor" teem sido propostas , acompanhadas dos metodos para o determinar e cunhadas "palavras reservadas" para melhor as distinguir (preco , utilidade etc) .

Porem , em geral , nao tem havido a preocupacao de construir essas interpretacoes subordinadas a' condicao de serem representaveis por funcoes-medidas , muito embora muitas dessas interpretacoes configurem funcoes quasi-medidas e dai' com condicoes semanticas para suportar a construcao de medidas-paradigmas .

* Espaco Zu .

Sao pressupostos na construcao do espaco Zu :

- . a existencia de uma grandeza (propriedade ou atributo) designada por "valor" .
- . a possibilidade de encontrar u funcoes H que apliquem as "imagens" do real-economico , em Yu , no espaco dos valores , em Zu .
- . As funcoes H sao homogeneas de grau 1 .

O problema foi assim resolvido pela forma usual :

- . construcao de um operador {H} que aplique o espaco Yu num outro Zu , com a mesma dimensao e permitindo uma correspondencia bi-univoca entre os respectivos sub-espacos.
- . conferindo homogeneidade linear ao operador {H}.
- . porque todos os espacos (de dimensao 1) que formam o espaco-producto Zu , representam a mesma grandeza , o "valor" , ja nao existem objecoes semanticas em declarar Zu mensuravel e dota-lo de uma metrica .

Adiante , em D1) , o conceito de "valor" sera' retomado com mais pormenor .

D) Conceitos Complementares .

D1) Conceito de "valor" .

D1.0) Introducao .

A necessidade de conferir uma metrica a Z_u , vai implicar rever e precisar o conceito de "valor" , tomando precaucoes em relacao a dois pontos :

- . subjectividade inerente a' sua mensuracao ,
- . construcao de uma definicao que preserve a sua aditividade , objectivo essencial a atingir .

D1.1) Subjectividade .

O resultado da observacao e mensuracao do atributo "valor" dum objecto e' uma funcao do :

- . metodo de mensuracao empregue ,
- . referencial do "biota" que procede a' operacao ,
- . quadro contextual que inclui informacao e experiencia memorisadas .

Esta circunstancia implica complementar os resultados obtidos com uma referencia explicita ao metodo , ao referencial e ao contexto .

Repare-se ainda que no texto se faz referencia a "biotas" e nao apenas a "humanos" , porque uma visao excessivamente antropocentrica esquece a importancia das "respostas" dos biotas nao humanos .

Alteracoes climaticas , desertificacoes , decrementos populacionais de especies (ate' a' sua extincao) , epidemias etc. , sao uma resposta dos biotas (nao humanos) ao comportamento dos homens .

Se o processo economico fosse estacionario , talvez fosse justificavel esperar que os "valores" dos objectos viessem a convergir , mas o processo economico nao e' estacionario .

Pode conceber-se um metodo que assentaria nas seguintes regras :

- . escolha de um referencial (base) privilegiado .
- . construcao dos operadores formais destinados a' transformacao das bases pertencentes a um dado grupo de bases .
- . com os operadores acima , converter ao referencial privilegiado os "valores" dos "objectos" descritos em outros referenciais .

Mercados e bolsas procuram emular referenciais privilegiados e o progresso nos sistemas de comunicacao tem vindo a permitir a construcao dos operadores referidos acima .

D1.2) Aditividade do Valor (VLR) .

O "objecto" , ao longo do seu processo de formacao , transporte e comercialisacao , vai acreando "valor" e o metodo consiste em ir acumulando esses valores acreados .

Este metodo que se assemelha ao do "valor acrescentado" na sua execucao , tem porem um defeito que se manifesta sob a seguinte forma :

dois objectos "iguais" colocados num mesmo local e ocasiao vao ter , em geral , "valores" diferentes , ora objectos "iguais" deveriam ter iguais "valores" .

A expressao "igual" tem o sentido de os objectos nao so serem morfologicamente muito proximos como equivalentes sob o ponto de vista economico e social .

O simbolo VLR sera reservado para representar o "valor" calculado por este metodo .

D1.3) Valor minimo virtual (VMV) .

A forma de evitar o principal defeito de construçao de VLR , consiste em introduzido o conceito de "valor minimo virtual" , VMV , com a seguinte definicao :

Sendo dado um local e um tempo , encontrar a sucessao de estadios (caminho processual) que permita colocar , nesse local e tempo , um "objecto" duma dada classe de objectos equivalentes , com o minimo de valor acreado .

VMV diz-se virtual porque o resultado pode nao ter sido obtido por meio de experimentacao ou exercicio factual mas apenas estimado usando valores de transformacao parciais considerados minimos .

Estes VMV sao unicos em cada local e num dado tempo , foram formados aditivamente e podem ser estimados para todo e qualquer imagem extensiva dum "objecto" do conjunto universal .

D2) Conceito de reversibilidade .

D2.0) Introducao

A diferenca entre VMV dum "objecto" e o seu "valor" VLR , experimental (factual) representa um desvio que pode ser explicado por duas ordens de motivos : transferencia de VLR para outro objecto e a irreversibilidade . (D2.1 e D2.2).

D2.1) Transferencias Reversiveis .

Algum VLR foi transferido de ou para outro objecto , mas esta transferencia foi feita sem perdas , isto e' , reversivelmente . e.g.: subsidios, tributacao enviesada , transferencia de valor entre objectos , uso de valores medios , etc. .

Nestes casos , verifica-se uma transferencia de valor VLR havendo objectos beneficiados por contrapartida de outros que sao prejudicados mas a aditividade de global de VLR e' conservada .

D2.2) Transferencias Irreversiveis .

Correspondem a VLR perdido e irrecuperavel , e.g. : ineficiencia , processos tecnologicos obsoletos , circuitos de transporte , comercializacao inapropriados , acidentes , fogos , fugas , etc. .
O VLR global ja' nao e' aditivo , as perdas de uns ja nao sao compensadas pelos ganhos de outros e cabe entao recorrer ao conceito de funcao correctiva associada .

Dado o modo como VMV foi definido , e descontadas as transferencias reversiveis , as funcoes correctivas associadas sao sempre positivas , e estao em correspondencia com o conceito de "entropia produzida" nos processos irreversiveis (naturais da fisica) , onde igualmente a entropia produzida e' positiva , e.g.: perdas por atrito, viscosidade, producao de calor , etc. .

D3) Conceito de Resto do Universo .

Todo o modelo formal tem um - dominio de aplicacao - e assim e' obrigatorio introduzir o conceito de "Resto do Universo", RU , que representa tudo quanto nao esta' incluido no dominio do modelo .

Entre RU e o modelo verificam-se permutas das grandezas referenciais do modelo mesmo que o processo de transformacao seja efectuado aparentemente em isolamento do exterior .

Para conferir aditividade a VMV ha que explicar donde vem e para onde vai o valor VLR ligado aos processos irreversiveis.

Assim , sera' conferido ao "resto do universo" RU as duas funcoes seguintes :

- . "fonte de inovacao" . Donde provem todo o VMV negativo (a nega-entropia ou informacao) injectado no modelo e que esta' associado a novas descobertas e inovacoes .
- . "esgoto de perdas" . Para onde sao regeitadas todas as perdas , quebras e ineficiencias que se verificam nos processos reais e irreversiveis (entropia produzida , .

D4) Criterio de eficiencia economica .

As superficies que descrevem o VMV de um dado "objecto" , num dado local e momento temporal , representam "minimos" de valor acreado os quais podem desempenhar a funcao de referenciais de "maxima eficiencia economica" .

O VLR , factual ou real , do mesmo "objecto" representa um valor atingivel na pratica , nesse mesmo momento temporal e local .

Descontando as transferencias artificiais de valores entre "objectos" , sera' $VLR \geq VMV$ e $VLR - VMV$ representa uma distancia (distancia usual nos reais) onde o valor zero significara' que foi atingida a maxima eficiencia economica .

Parece razoavel definir uma "figura de merito" adimensional que descreva a "ineficiencia economica" (NEF) do processo real :

$$NEF = (VLR - VMV) / VMV .$$

O inverso de NEF representara' a "eficiencia" do processo .

NEF corresponde , nos processos "fisicos" , ao conceito de "entropia produzida" a qual e' nula se o processo for "reversivel" e e' tanto maior quanto maior for a ineficiencia termodinamica do processo real .

E) Formalisacao dos Conceitos

EO) Introducao .

Evitando o uso de linguagens formais mais especializadas que sao relegadas para anexos , procura-se contudo apresentar a materia ja exposta numa forma mais precisa .
Sao tratados dois temas :

- Em E1 , os espacos X_3 , Y_u , respectivos operadores de transformacao, verificacao da lei da continuidade e aplicacao do teorema de Stokes .
- Em E2 , os espacos Y_u , Z_u , avaliacao do "valor" em varias situacoes tipicas , tanto VLR como VMV .

E1) Espacos X_3 e Y_u .

E1.1) Simbologia .

X_3	o "objecto-real" como "conjunto universal" que se observa, mede e se pretende modelar.
Y_u	uma "imagem do objecto-real" , a dimensao de Y_u esta em correspondencia com o numero de atributos, propriedades ou grandezas a descrever . Sao atributo tipicos : volume , superficie , massa . numero de unidades do "objecto" . O espaco producto Y_u nao tem metrica , embora os espacos componentes possuam metricas proprias .
Z_u	espaco producto de igual dimensao da de Y_u , onde a ordem dos espacos em Y_u e conservada em Z_u .
VLR, VMV	funcoes de Y_u sobre Z_u . Estas funcoes permitem dotar Z_u de metrica .
V_i	dominio espacial (i) em X_3 , simplesmente connectado . Se (i) for diferente de (j) entao V_i e V_j sao disjuntos .
S_i	fronteiras connectante de V_i , pertence a um X_2 .
R_U	"resto" do conjunto universal . Dado (Va) e (Vb) disjuntos entao a uniao de (Va) , (Vb) e R_U reconstroi o conjunto universal .
{k}	tipo de "objecto" .
G	uma grandeza (volume , massa etc) .
P_i	um ponto generico de V_i .
dV_i	elementos de volume centrados em P_i .
W e R	vectores densidade duma grandeza G em V_i e S_i .
$WG\{i\}$	vector densidade da grandeza G do "objecto" tipo {i} no elemento de volume dV_i .
dS_i	elemento da fronteira connectante de dV_i
$RG\{i\}$	vector densidade de fluxo da grandeza G de {i} em dS_i .
$MG\{i\}$	total de G{ i } (entrada ou saida) em V_i .
div	divergencia usual dum vector .

- T{1}>2} processo tecnologico que transforma uma unidade de G{1} em z unidades de G{2} .
- TMG{1} quantidade de G{1} consumida por unidade de tempo na transformacao .

E1.2) Aplicacao do teorema de Stokes .

Porque as funcoes representadas em Yu sao mensuraveis e' possivel aplicar o teorema de Stokes que formalisa a lei da continuidade ou a lei da conservacao das grandezas extensivas (medidas) .

Caso 1 .

Para {1} e dominio Va , a declaracao da conservacao de G exprimem-se pelas formulas :

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{WG}\{1\}\text{a}).\text{dVa} - \text{RG}\{1\}\text{a} . \text{dSa} &= 0 . \\ \text{div}(\text{WG}\{1\}\text{a}).\text{dVa} + \text{d/dt}(\text{MG}\{1\}\text{a}).\text{dVa} &= 0 \end{aligned}$$

Identicamente para {2} e ou Vb .

Caso 2 .

No caso de existir , em Va , um processo tecnologico que transforme {1} em {2} com um rendimento z , as expressoes da continuidade sao :

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{WG}\{1\}\text{a}).\text{dVa} - \text{RG}\{1\}\text{a} . \text{dSa} - \text{TMG}\{1\} &= 0 , \\ \text{div}(\text{WG}\{2\}\text{a}).\text{dVa} - \text{RG}\{2\}\text{a} . \text{dSa} - \text{TMG}\{1\} * z &= 0 , \\ \text{div}(\text{WG}\{1\}\text{a}).\text{dVa} + \text{d/dt}(\text{MG}\{1\}).\text{dVa} - \text{TMG}\{1\} &= 0 , \\ \text{div}(\text{WG}\{2\}\text{a}).\text{dVa} + \text{d/dt}(\text{MG}\{2\}).\text{dVa} + \text{TMG}\{1\} * z &= 0 . \end{aligned}$$

Porque se deseja conservar o caracter de funcao-medida a' grandeza W entao ha que justificar a diferenca $\text{TMG}\{1\} * (1 - z)$, na passagem de {1} para {2} . O "resto do universo" , RU , vai desempenhar essa funcao e sera' :

$$\text{MG}\{1\}\text{RU} + \text{MG}\{2\}\text{RU} = \text{TMG}\{1\} * (z-1) .$$

Caso 3 .

O modelo envolve , alem de RU , dois dominios Va e Vb . O processo tecnologico que converte {1} em {2} , esta' situado em Va . Notar que o exercicio esta' centrado em Va , por isso nao interessa referir os fluxos entre Vb e RU . O espaco Yu sera' a producto de 2 espacos tridimensionais que descrevem em Va , Vb e RU , a grandeza G dos objectos dos tipos {1} e {2} .

- . Em Va , ha uma transformacao {1} > {2} e aplicam-se as expressoes do caso 2 .
- . Em Vb , nao ha transformacao e aplicam-se as expressoes do caso 1 , depois de substituir (a) por (b) .

- * Resumindo , esta' garantida a aditividade para a grandesa G (massa ou qualquer outra grandesa extensiva) , tanto para $\{i\}$ como para $\{2\}$ e podem atribuir-se duas metricas para os dois sub-espacos $(Y3)$.

E2) Formalisacao do conceito do VALOR (VLR e VMV) .

E2.0) Introducao .

As grandezas usadas para $\{i\}$ e $\{j\}$ nao sao necessariamente as mesmas (por exemplo : peso e quantidade) e , embora cada uma dotada de metrica nos respectivos espacos $Y\{i\}$ e $Y\{j\}$, o espaco producto $Y\{i\}::Y\{j\}$ nao tera' metrica . Ao aplicar Y_u em Z_u por meio de VLR ou VMV , procura-se que Z_u possa vir a ser dotado de metrica .

E2.1) Simbologia :

$O[I]$ substitui $G\{I\}a$, e significa grandesa G do "objecto" tipo I em a . Ou estadio de transformacao , transporte , comercialisacao , etc. .

$VLR(O[J])$ Valor (VLR) acumulado no "objecto" $O[J]$, ou quando O atingiu o estadio. J .

$dVLR(O[I,J])$ Valor (VLR) , positivo ou negativo , transferido entre $O[I]$ e $O[J]$ na transformacao $O[I,J]$.

$zVLR(O[I,J])$ Valor (VLR > 0) perdido na transformacao $O[I,J]$ por irreversibilidade .

A funcao VLR que realiza a aplicacao de Y_u em Z_u pode ser outra , nomeadamente VMV "Valor Minimo Virtual" .

E2.2) Transformacao .

Na transformacao do "objecto" $O[I]$ em $O[J]$, descreve-se a aplicacao VLR como segue :

$$\begin{aligned} VLR(O[J]) &= VLR(O[I]) + dVLR(O[I,J]) + zVLR(O[I,J]) \\ VMV(O[J]) &= VMV(O[I]) + dVMV(O[I,J]) \end{aligned}$$

Representando :

$$\begin{aligned} D[I,J] &= VLR(O[I]) - VMV(O[I]) \\ &\quad \text{a diferenca entre VLR e VMV acumulados em } O[I] . \\ d[I,J] &= dVLR(O[I,J]) - dVMV(O[I,J]) \\ &\quad \text{a diferenca entre os valores acreados por VLR e VMV na transformacao } [I,J] . \end{aligned}$$

Note-se que se $D = 0$ entao d e' positivo .

E2.3) Exemplos tipicos .

Apresentam-se alguns exemplos tipicos para ilustrar os conceitos de VLR e VMV .

* Circulacao .

O "objecto" O e' transferido do local AI para AJ

$$\begin{aligned} VLR(O[J]) &= VLR(O[I]) + dVLR(O[I,J]) + zVLR(O[I,J]), \\ VMV(O[J]) &= VMV(O[I]) + dVMV(O[I,J]) . \end{aligned}$$

Depois o "objecto" O e' retransferido de AJ para AI .

$$\begin{aligned} VLR(O[I]) &= VLR(O[J]) + dVLR(O[J,I]) + zVLR(O[J,I]) \\ &= VLR(O[I]) + dVLR(O[I,J]) + dVLR(O[J,I]) + \\ &\quad + zVLR(O[I,J]) + zVLR(O[J,I]) , \\ VMV(O[I]) &= VMV(O[J]) \quad (\text{por definicao de minimo}) . \end{aligned}$$

A conclusao a tirar , VMV e' um invariante e nao depende das circulacoes ou caminhos usados enquanto que VLR vai depender da historia do processo de transformacao .

* Limitacao de capacidade .

Um novo processo tecnologico permite um $VMV(O[I])^*$ inferior ao $VMV(O[I])$ precedente .

Porem a capacidade fabril dispondo do novo processo e' insuficiente para abastecer a totalidade do mercado de $O[I]$, que valor minimo adoptar ? : $VMV(O[I])$ ou $VMV(O[I])^*$. Apesar da falta de capacidade fabril , devera' escolher-se $VMV(O[I])^*$ para o novo minimo .

Na verdade e' desejavel que os VMV representem optimos paradigmaticos em relacao aos quais os valores VLR conseguidos nos processos reais possam ser confrontados .

E2.4) Comentarios .

Em termodinamica , os rendimentos dos ciclos teoricos desempenham funcoes identicas as de VMV .

A introducao dum novo ciclo ou processo mais eficiente vai provocar um - transiente - que se decipara' com o decorrer do tempo e na medida em que as velhas unidades forem substituidas por novas usando o novo processo tecnologico .

VMV foi construido em termos de conservar a aditividade das grandezas que aplicam e e' legitimo dotar Z_u de uma metrica .

A distancia de Hamming sera' a indicada para tratar grandezas compostas , porque a distancia entre dois pontos e' dada pela soma das diferencas das coordenadas desses pontos e assim e' mantida a aditividade .

F) RESUMO e CONCLUSAO .

Esta exposicao teve por objecto :

- a) Mostrar a possibilidade da criacao de um espaco producto de funcoes-medidas onde projectar as imagens dos processos economicos .
- b) Criar superficies paradigmaticas de valores que sirvam de referencia nos processos economicos reais .
- c) Construir uma figura de merito da - eficiencia - dos processos economicos .
- d) Apresentar a - geometria afim - como linguagem sintatica de base adequada a' construcao e manipulacao dos objectos e quantidades geometricas (economicas) , descritoras do seu estado e da sua avaliacao no tempo e espaco .
Esta apresentacao encontra-se concentrada no anexo 2 .
- e) Chamar a atencao para a possibilidade de aplicar uma base geografica (fisica) num espaco producto de funcoes economicas e com metrica .

ANEXO 1

* Transformadas de contacto *

Porque este tipo de transformadas é utilizado em conjugação com grandezas extensivas e intensivas, recorda-se a sua definição e uma propriedade resultante da homogeneidade parcial ou total dos "objectos" em estudo.

Seja :

$$\{x_i \mid i \in 1..n\}$$

$$\{X_i \mid i \in 1..n\}$$

dois conjuntos de variáveis reais .

$$z = z\{x_i\} , Z = Z\{X_i\}$$

duas funções reais . contínuas e com derivadas contínuas até a ordem que for necessária .

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i} , P_i = \frac{\partial Z}{\partial X_i}$$

as derivadas parciais de primeira ordem .

Se existir uma função $\int (z, x_i, p_i)$ tal que :

$$dZ - \sum_{i \in 1..n} P_i dX_i = \int (dz - \sum_{i \in 1..n} p_i dx_i)$$

então $\int$ transformou por contacto as coordenadas $[z, x_i]$ em $[Z, X_i]$.

* Exemplo 1 .

Seja dada a função $Z = z - p_1 x_1$, será :

$$dZ = dz - p_1 dx_1 - x_1 dp_1 = \sum_{i \in 2..n} p_i dx_i - x_1 dp_1$$

mas se $dp_1 = 0$, isto é , p_1 é constante , então :

$$dZ = \sum_{i \in 2..n} p_i dx_i$$

A dimensão do espaço foi reduzida de uma unidade .

* Exemplo 2 .

Se Z^* for definido como segue : $Z^* = z - \sum_{i \in 1..n} p_i x_i$

então será $dZ^* = \sum_{i \in 1..n} x_i dp_i$, a grande conónica .

Se o "objecto" é homogêneo em todas as variáveis x_i então todos os dp_i serão nulos e a dimensão é zero .

ANEXO 2 .

Geometria afim .

** N.B. Quem estiver familiarizado com esta linguagem ou com o calculo tensorial sugere-se a passagem ao ponto 2) , que descreve uma applicacao em geometria afim dos conceitos de continuidade e de valor ** .

1) Algumas nocoes gerais .

1.0) Introducao .

* O recurso a este tipo de estruturas algebricas e topologicas justifica-se pela clareza e precisao da simbologia empregada por J.A.Schouten (ref. 6) , veja-se ainda : (5 e 8) .

Contudo convem apresentar a referida simbologia por esta nao ser universalmente adoptada e ainda porque , em alguns casos , nao sera seguida estritamente .

* Os objectos geometricos da geometria afim sao de varios tipos , designados genericamente por -afinores- . Reserva-se o vocabulo - tensor - para os afinores simetricos .

Quando adiante se faz referencia a - modulos - , note-se que as declaracoes sao applicaveis tambem a - espacos vectoriais - .

* Os conceitos formais mais relevantes na geometria afim sao :

- . Multilinearidade :
que interessa as applicacoes de produtos cartesianos de modulos , num modulo .
- . Homomorfismo :
essencial na passagem de modulos esquêrdos para direitos e vice-versa.
- . Dualidade :
base da distincao entre co-variancia e contra-variancia em afinores .
- . Productio tensorial (:T:) (de dois modulos) :
uma connectiva de natureza multiplicativa que vai permitir criar objectos geometricos mais complexos do que vectores , os afinores .
- . Grupo de transformacoes multiplicativo :
cujos elementos permitem modificar a representacao de objectos geometricos e ou de bases, e ainda caracterizar os espacos de representacao segundo a classe de funcoes que constitui o conjunto universal do grupo .
- . Tensor Fundamental :
usado na definicao de distancia , angulo e metrica
- . Operadores diferenciais e integrais :
necessarios a' definicao de gradiente, rotacional e divergencia , derivadas de Lie e de Lagrange e a' applicacao do teorema de Stokes .

1.1) Simbologia .

- * Cada "objecto geometrico" e' simbolizado por uma letra ou letras a que poderao ser acrescentados - indices a' esquerda - (superiores ou inferiores) . A este conjunto da-se o nome de "simbolo nuclear" do objecto e e' invariante com a base de referencia , e.g. : ${}^{\alpha}\mathcal{X}$ ${}^{\gamma}\mathcal{C}$ ${}^{\kappa}\mathcal{P}$ $\mathcal{F}$ $\mathcal{Q}$

Porque o conhecimento da base (ou referencial) usada e' essencial para a clareza das formulas , o simbolo nuclear e' complementado com - indices a' direita - , sendo os superiores destinados aos espacos contra-variantes e os inferiores aos espacos co-variantes , como em : $\mathcal{F}^{\alpha}_{\beta}$.

$\mathcal{X}$ e $\mathcal{X}^*$	um espaco e o seu dual , os elementos de $\mathcal{X}$ dizem-se contra-variantes e os de $\mathcal{X}^*$ de co-variantes .
$::$ ou $\mathcal{X}$	simbolo do produto cartesiano .
$\mathcal{X}::\mathcal{X}^*::\mathcal{X}^*::\mathcal{X}::\mathcal{X}$	representa um espaco-produto (a ordem dos espacos no produto tem significado) .
(h,i,j,k,l)	um multiplo ordenado de indices cuja ordem e' a mesma da do espaco-produto .
${}^{\alpha}\mathcal{S}$ ${}^{\alpha}\mathcal{S}^{\alpha\beta\gamma\dots\kappa}$ ${}^{\alpha}\mathcal{S}_{\alpha\beta\gamma\dots\kappa}$	simbolo nuclear de um objecto geometrico .
$\mathcal{S}^{\alpha}_{\beta}$	simbolo completo do objecto .
$\mathcal{R}^{\alpha}_{\beta}$	simbolo do operador que transforma as coordenadas da base de um espaco curvo .
$A^{\kappa'}_{\kappa}$	operador linear (matriz quadrada) usado na transformacao das bases dos espacos lineares .

1.2) Tipos de Espacos .

- * Espacos curvos ($\mathcal{X}_n$) .

Estao associados a um grupo multiplicativo $\mathcal{R}^{\alpha}_{\beta}$ de n funcoes analiticas continuas com derivadas continuas ate' a' ordem que for necessaria (em geral, ordem 4) .
As funcoes teem um dominio de applicacao regional .

- * Espacos lineares nao centrados ($\mathcal{E}_n$) .

Estao associadas a um subgrupo do grupo acima $\mathcal{R}^{\alpha}_{\beta}$,
- o grupo linear - cujas funcoes teem a forma :
$$x^{\kappa'} = A^{\kappa'}_{\kappa} x^{\kappa} + a^{\kappa'}_{\kappa} , \det(A^{\kappa'}_{\kappa}) \neq 0 .$$

- * Espacos lineares e centradas ($\mathcal{R}_n$) .

Estao associadas ao - subgrupo linear-homogeneo - cujas funcoes teem a forma : $x^{\kappa'} = A^{\kappa'}_{\kappa} x^{\kappa} , \det(A^{\kappa'}_{\kappa}) \neq 0$

1.3) Objectos e quantidades geometricas em E_n .

* Objecto geometrico

Sejam :

 $(\kappa), (\kappa')$ duas bases para E_n . $A_{\kappa}^{\kappa'}(\) + a_{\kappa}^{\kappa'}$ o operador linear que transforma (κ) em (κ') . $\{\Lambda_{\kappa}\}, \{\Lambda_{\kappa'}\}$ 2 conjuntos ordenados de reais (cardinal = N), em correspondencia com $(\kappa), (\kappa')$.

Se qualquer elemento $\Lambda_{\kappa'}$ for uma funcao $\Phi_{\kappa'}$ de apenas :
os elementos $\Lambda_{\kappa}, A_{\kappa}^{\kappa'}$ e $a_{\kappa}^{\kappa'}$, entao diz-se que Λ_{κ} sao
as coordenadas de um objecto geometrico em E_n .

Da definicao resulta que o reconhecimento dos objectos se deve
fazer pelos operadores $\Phi_{\kappa'}$ que transformam os seus
componentes.

* Quantidades-geometricas

Sao uma sub-classe dos objectos-geometricos, onde as
funcoes $\Phi_{\kappa'}$ satisfazem às condicoes suplementares seguintes :

- . sao lineares e homogeneas dos Λ_{κ} .
- . sao algebraicas e homogeneas de $A_{\kappa}^{\kappa'}$.
- . nao sao funcao de $a_{\kappa}^{\kappa'}$.

1.4) Operacoes sobre afinores

(usa-se a convencao de Einstein)

* Definicao : $P^{\kappa}{}_{\dot{\epsilon}\dot{n}}$ e $P^{\dot{\epsilon}\dot{n}}{}_{\kappa}$ sao isomeros.

* Operacoes binarias

- . Soma : $P^{\kappa}{}_{\dot{\epsilon}\dot{n}} + Q^{\kappa}{}_{\dot{\epsilon}\dot{n}} = S^{\kappa}{}_{\dot{\epsilon}\dot{n}}$
- . Multiplicacao : $P^{\kappa}{}_{\dot{\epsilon}\dot{n}} \times Q^{\dot{\epsilon}\dot{n}}{}_{\kappa} = M^{\kappa\kappa}{}_{\dot{\epsilon}\dot{n}\dot{\epsilon}\dot{n}}$
- . Transveccao : $P^{\kappa}{}_{\dot{\epsilon}\dot{n}} \cdot Q^{\dot{\epsilon}\dot{n}}{}_{\kappa} = T^{\dot{\epsilon}\dot{n}}{}_{\kappa}$
- . Estrangulamento : $e_p P^{\kappa}{}_{\dot{\epsilon}\dot{n}} = P^{\kappa}{}_{\dot{\epsilon}\dot{n}}$

* Operacoes Unarias

. Mistura () :

$$P_{(\kappa\lambda\mu)} = \frac{1}{3!} (P_{\kappa\lambda\mu} + P_{\lambda\mu\kappa} + P_{\mu\kappa\lambda} + P_{\kappa\mu\lambda} + P_{\lambda\kappa\mu} + P_{\mu\lambda\kappa})$$

. Alternacao [] :

$$P_{[\kappa\lambda\mu]} = \frac{1}{3!} (P_{\kappa\lambda\mu} + P_{\lambda\mu\kappa} + P_{\mu\kappa\lambda} - P_{\kappa\mu\lambda} - P_{\lambda\kappa\mu} - P_{\mu\lambda\kappa})$$

1.5) Objectos e suas formulas de transformacao , em En .

- Afinores :

$$P^{k'_1 \dots k'_p}_{\dots \lambda'_1 \dots \lambda'_q} = A^{k'_1 \dots k'_p}_{k_1 \dots k_p} \lambda_1 \dots \lambda_q P^{k_1 \dots k_p}_{\dots \lambda_1 \dots \lambda_q}$$
- Tensores : (afinores simetricos)

$$P_{(\kappa \lambda \mu)} = P_{\kappa \lambda \mu}$$
- Multivectores (p-vector) :

$$\omega_{k_1 \dots k_p} = \omega_{[k_1 \dots k_p]}$$
- n-Vectores : (volume orientado em X_n)

$$V_{k_1 \dots k_n}$$
- Densidades : (densidade afim de peso ϕ)

$$D^{k'_1 \dots k'_p}_{\dots \lambda'_1 \dots \lambda'_q} = \Delta^{-\phi} A^{k'_1 \dots k'_p}_{k_1 \dots k_p} \lambda_1 \dots \lambda_q D^{k_1 \dots k_p}_{\dots \lambda_1 \dots \lambda_q}$$

Note-se que existem densidades de outros tipos e sao frequentes as densidades escalares .

1.6) Tensor Fundamental $g_{\lambda\kappa}$:

Qualquer En pode ser munido de uma metrica e para o efeito bastam :

- um afinor simetrico . $g_{\lambda\kappa}$, "tensor fundamental" , duas vezes covariante de elementos reais que pode ser representado por uma matriz quadrada com um determinante nao nula (para ser invertivel) .
- e o operador transveccao

Os elementos do tensor sao funcoes reais do ponto e do tempo (parametro) , mas , podem ser constantes .

$g_{\lambda\kappa}$ tem por inverso o tensor $g^{\lambda\kappa}$, duas vezes contravariante .

Podem encontrar-se dificuldades ao dotar de metricas espacos com uma dimensao superior a 3 .

Recordam-se ainda as definicoes de :

- Modulo de um vector : $+ \sqrt{g_{\lambda\kappa} v^{\lambda} v^{\kappa}}$
- Angulo de dois vectores : $\cos \varphi = \pm \frac{g_{\lambda\kappa} v^{\lambda} v^{\kappa}}{\sqrt{((g_{\lambda\kappa} u^{\lambda} u^{\kappa}) \times (g_{\lambda\kappa} v^{\lambda} v^{\kappa}))}}$

1.7) Operadores diferenciais em X_n :

* Operador : ∂_λ (derivada espacial usual , afinor
1 vez covariante) .

Conforme a connectiva empregada e a natureza do afinor a que o operador ∂_λ e' aplicado , assim sao obtidos os seguintes objectos :

* Gradiente (multiplicacao e afinor var. zero) :
 $\partial_\lambda P$ afinor (1) covariante .

* Divergencia (transveccao e indices contra-var.) :
 $\partial_\lambda \omega^{\lambda \kappa_2 \dots \kappa_p}$ afinor (p-1) contra-var .

* Rotacional (alternacao e indices co-var.) :
 $(q+1) \partial_{[\mu} v_{\lambda_1 \dots \lambda_q]}$ afinor (q+1) co-variante .

Note-se que o operador ∂_λ pode aplicar-se sucessivamente ,
como por exemplo :

$$\partial_\lambda \mu = \partial_\lambda \partial_\mu \omega^{\lambda \mu \kappa_2 \dots \kappa_p} \quad \text{afinor (p-2) contra-var.}$$

2) Teorema de Stokes .

Porque , nos modelos economicos se verificam fluxos atraves de fronteiras , convem recordar o teorema de Stokes que , na presente simbologia , toma uma forma menos usual .

Sejam :

X_n um espaco a n dimensoes

X_{q+1} um sub-espaco de X_n , $q+1$ dimensoes.

τ_{q+1} um dominio de X_{q+1} simplesmente connectado .

τ_q a hiper-superficie connectante de .

$d\tau$ um elemento de τ_{q+1} ou τ_q .

Ha varios modos de expressar a formula de Stokes , os quais dependem da natureza dos objectos geometricos representados , mas e' paradigmatica a formula seguinte :

$$\int_{\tau_{q+1}} \partial_{[\mu} v_{\lambda_1 \dots \lambda_q]} d\tau^{\mu \lambda_1 \dots \lambda_q} = \int_{\tau_q} v_{\lambda_1 \dots \lambda_q} d\tau^{\lambda_1 \dots \lambda_q}$$

Uma forma equivalente de aplicar o teorema de Stokes e expressar a lei da continuidade , assenta na introducao da grandeza ,
densidade escalar .

As formulas vao ser ajustadas a um espaco X_3 .

Sejam :

v^k velocidade do movimento massico atraves da superficie connectante .

μ densidade escalar .

$\eta^k = \int^M v^k$ densidade da corrente massica .

$d\mathbb{F}_\mu$ elemento de superficie .

$d\mathbb{F}$ " de volume (escalar) .

* A lei da continuidade :

$$\partial_\lambda \eta^\lambda + \frac{dM}{dt} = 0 \quad (\text{forma diferencial}) .$$

$$\int_{\Sigma_3} \partial_\lambda \eta^\lambda d\mathbb{F} + \int_{\Sigma_3} \frac{dM}{dt} d\mathbb{F} = 0 \quad (\text{forma integral}) .$$

* O teorema de Stokes :

$$\int_{\Sigma_2} \eta^\lambda d\mathbb{F}_\lambda = \int_{\Sigma_3} \partial_\lambda \eta^\lambda d\mathbb{F}$$

3) Operador de Lie ($\frac{d}{dt}$) :

A derivada de Lie em relacao ao campo v^k e' dada por :

$$\frac{d}{dt} P^{\kappa\lambda}_{\mu\nu} = v^\mu \partial_\mu P^{\kappa\lambda}_{\nu} + P^{\kappa\lambda}_{\mu} \partial_\nu v^\mu - P^{\kappa\lambda}_{\mu} \partial_\mu v^\nu$$

A derivada de Lie permite introduzir o conceito de um campo absolutamente invariante em relacao ao campo , para o que basta verificar se a derivada de Lie e' identicamente nula na regio considerada .

4) Operador de Lagrange (simbolo : $\{ \} \}$) .

Sejam : Φ N funcoes de $\{^k$

L uma funcao de Φ

$\Phi_\mu, \Phi_{\mu\nu}$ representam respectivamente as derivadas $\partial_\mu \Phi$ e $\partial_{\mu\nu} \Phi$

A expressao do operador de Lagrange e' :

$$\{L\} = \frac{\partial L}{\partial \Phi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \Phi_\mu} + \partial_\nu \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \Phi_{\mu\nu}} - \dots$$

- 5) Aplicacao do conceito de * valor * .
(Veja-se a descricao do problema em E2) .

5.1) Simbologia

O espaco fisico de partida e' um X_3 , um volume .
e sejam :

$\{ \zeta_\theta \}$	uma particao de X_3 com $D+1$ membros .
$\theta \in [1..D+1]$	indices dos conjuntos da particao.
$\theta_{D+1} = RU$	resto do universo .
$\mathcal{R}_\theta$ em X_2	superficies connectantes de ζ_θ , com $\theta \in [1..D]$.
$\alpha \in [1..O]$	tipos de "objectos" .
$\xi \in [1..U]$	tipos de grandezas , por hipotese , estas configuram funcoes-medidas e tomam valores em Y_u .
ξ^α_μ	densidade da grandeza ξ e objecto α , em X_3 . (escalar , afinor de ordem 0) .
ξ^α_μ	densidade de fluxo (ou de corrente) da grandeza ξ e objecto α atraves de $\mathcal{R}$. (afinor 1 vez contra-variante) .
ξ^α_μ	quantidade da grandeza ξ em ζ_θ do objecto α , (escalar) .

- 5.2) A declaracao da continuidade e aplicacao do teorema de Stokes . formulam-se como segue :

$$\int_{\mathcal{R}_\theta} \xi^\alpha_\mu d\mathcal{P}_\mu = \int_{\mathcal{R}_\theta} \partial_\mu \xi^\alpha_\mu d\mathcal{P}_\mu = - \int_{\mathcal{R}_\theta} \frac{d\xi^\alpha_\mu}{dt} d\mathcal{P}_\mu = - \xi^\alpha_\mu$$

As expressoes sao validas para todos os triplos (α, θ, ξ) .

Para toda a grandesa ξ , sera' ainda :

$$\xi^\alpha_\mu = \sum_{\theta \in [1..D]} \xi^\alpha_\mu$$

- 5.3) Conceito de valor .

Porque nao sao comparaveis as grandezas ξ ,
o seu somatorio nao pode ser efectuado.

Uma funcao "valor" , $\mathcal{V}^\delta$, afinor 1 vez contravariante ,
aplica a grandeza ξ num espaco Z_u , com $\delta \in [1..U]$.

Se for possivel dotar Z_u de um tensor fundamental $\mathcal{G}_{\delta\beta}$,
o que implica aditividade para as funcoes $\mathcal{V}^\delta$, entao
sera' : $\mathcal{V}^\delta(\xi^\alpha_\mu)$, e ja' tem sentido o somatorio : $\sum_\beta \mathcal{V}^\delta \mathcal{G}_{\delta\beta}$.

ANEXO 3

* Grafos de acreacao *

0) Introducao .

A acreacao de valor tem algumas dificuldades de interpretacao e de calculo que implicam um tratamento mais cuidado e apoiado na teoria dos grafos (ref. 16).

Convem redefinir a simbologia afeicoando-a mais a teoria usual e , em particular , o conceito de "estadio" de um objecto e' substituido por um simbolo distinto todas as vezes que o "estadio" do objecto se alterou , as vantagens colhidas residem numa simplificacao formal .

Todos os "objectos" tem um simbolo (letra minuscula com ou sem indices) e o conjunto universal dos "objectos" , UHG , tem um cardinal finito n .

O modelo mais adequado e' o de um hiper-grafo (e nao de simples grafo) e UHG desempenha a funcao do conjunto universal do hiper-grafo , onde os "nos" estao em correspondencia com os "objectos" do UHG .

Pressupoe-se portanto a existencia de um hiper-grafo $HG \subset UHG \times UHG$ que descreve todos os vinculos entre os "objectos" , elementos de UHG .

Uma familia FH de partes E_i de UHG completa a descricao do hiper-grafo e sao satisfeitas as condicoes usuais seguintes : todos os E_i sao nao vazios e a sua reuniao reconstroí UHG .

$HG = \{ UHG : E_1 \dots E_m \}$, onde $m = \text{card}(FH)$.

Os E_i sao designados por arestas .

Porque a processo de acreacao sera' apresentado a partir de grafos , recorda-se a definicao de ordem de um sub-conjunto S de UHG :

$$\text{ord}(S) = \max(i) [\text{card}(S \cap E_i)] , \text{ para todo o } i , \\ \text{ donde } \text{ord}(UHG) \text{ sera' a ordem do hiper-grafo } HG .$$

Se para todo o i for $\text{card}(E_i) = \text{ord}(UHG)$ entao o hiper-grafo HG diz-se uniforme de $\text{ord}(UHG)$ e se for $\text{ord}(UHG) = 2$ entao o hiper-grafo degenera num grafo simples .

* A materia apresentada adiante retoma o conceito de "valor" , VLR e VMV , ja introduzidos em D1 e formalizados em E2 .

Assim , as funcoes $VLR[a,b]$ e $VMV[a,b]$, aplicam nos reais os arcos $[a,b]$ do hiper-grafo HG , os quais representam os valores acreados nas transformacoes relativas a $[a,b]$.

1) Simbologia .

UHG	conjunto universal do hipergrafo HG .
UI	subconjunto de UHG em estudo , delimitado pela fronteira FRT .
i, j, k	"no" , "objecto" , elemento de UI.
z	representa indiscriminadamente qualquer elemento pertencente a $\{UHG - UI\}$.
$[a,b]$	"arco orientado" ou simplesmente "arco", par orientado de (a) para (b) e corresponde a uma "transformacao" .
$[i,j]$	"arco" , que liga "nos" que estao no interior da fronteira FRT .
$[i,z]$	"arco" partindo do interior para o exterior da fronteira FRT .
$[z,i]$	"arco" partindo do exterior de FRT para o interior .

2) Conjuntos de arcos tipicos .

Designa-se por GUI o grafo constituido por todos os arcos do hiper-grafo HG onde participam os elemetos de UI.

Construa-se a seguinte particao de GUI :

E	(arcos de entrada)	tipo : $[z,i]$.
S	(arcos de saida)	tipo : $[i,z]$.
N	(arcos do interior)	tipo : $[i,j]$.

Pressupoem-se ainda que N nao e' vazio , uma vez que o objecto do estudo sao justamente os elementos do conjunto UI e os arcos interiores $[i,j]$.

Se E e S forem vazios entao o grafo GUI diz-se isolado .

Em todos os tipos verificam-se os pressupostos apresentados no final do ponto 1) .

2.1) TIPO 1 .

**** Confluencia simples e holonica ,
sem circulacoes nem restricoes ** .**

- * O conjunto S tem 1 unico elemento (holonicidade).
- * Ha 1 so' grafo interior GI (confluencia simples) .
- * GI nao tem circulacoes .
- * Nao ha restricoes sobre as quantidades produzidas .

(Veja-se fig : 1) .

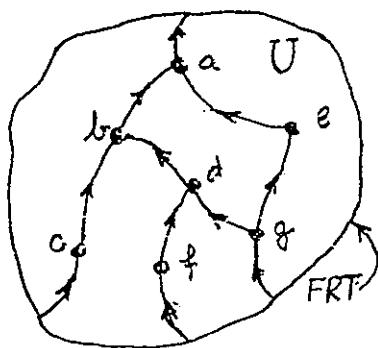


Fig : 1

$$U = \{a, b, c, d, e, f, g\} .$$

$$E = \{c, f, g\} .$$

$$S = \{a\} .$$

$$N = \{b, d, e\} .$$

$$G = \{[z, c], [z, f], [z, g], [c, b], [f, d], [g, d], [g, e], [d, b], [b, a], [e, a], [a, z]\} .$$

$$GI = \{[c, b], [f, d], [g, d], [g, e], [d, b], [b, a], [e, a]\} .$$

Aplicações (VLR) e (VMV) :

$$VLR[a] = \sum_{j \in E} VLR[j] + \sum_{[i, j] \in GI} VLR[i, j] .$$

$$VMV[a] = \sum_{j \in E} VMV[j] + \sum_{[i, j] \in GI} VMV[i, j] .$$

Por definição de VMV será ainda :

$$VMV[j] \leq VLR[j] , \text{ para todo } j \in E .$$

$$VMV[i, j] \leq VLR[i, j] , \text{ " " } [i, j] \in GI .$$

donde $VMV[a] \leq VLR[a]$. como desejado .

2.2) TIPO 2 .

**** Confluência múltipla e holônica sem circulações nem restrições **** .

- * O conjunto S tem 1 único elemento (holonicidade) .
- * Há $r > 1$ grafos GI (confluência múltipla) .
- * GI não tem circulações .
- * Não há restrições sobre as quantidades produzidas .

Partindo do exemplo anterior, fig: 1, pode suceder que sobre (a) confluam mais de 1 grafo (do tipo 1), eventualmente vindos de pontos fora da fronteira FRT. Então, aumentando o domínio da fronteira se necessário, incluem-se todos os grafos $GI(p)$, com $p \in [1, r]$ que confluem em (a) e que são do tipo 1 por hipótese .

Para cada $GI(p)$ e para todo p em $[1, r]$ são calculadas as aplicações :

$$VLR(p)[a] \text{ e } VMV(p)[a] , \text{ donde resulta } VMV[a] = \min(p) \{ VMV(p)[a] \} .$$

Este sera o metodo a utilizar no caso de confluencias multiplas as quais correspondem a varios modos e processos de obter o "objecto" (a) num certo local e ocasio .

Os GI(p) para os quais for $VMV(p)[a] = VMV[a]$ (minimo) sao igualmente "bons" para produzir (a) .

2.3) TIPO 3 .

**** Confluencia simples e holonica ,
com circulacoes mas sem restricoes ** .**

- * O conjunto S tem 1 unico elemento (holonicidade) .
- * Ha 1 so' grafo GI (confluencia simples) .
- * GI tem circulacoes .
- * Nao ha restricoes sobre as quantidades produzidas .

O grafo e' do tipo 1 (como o da fig: 1) mas a que se acrescentaram arcos de que resultou a possibilidade de realizar circulacoes internas .

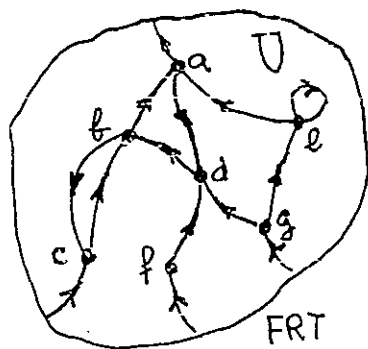


Fig: 2

Arcos acrescentados :
[a,d] , [e,e] e [b,c] .

Circulacoes induzidas :
(c,b,c) , (e,e) e (d,b,a,d) .

$VLRc(k)$ valor acreado na
circulacao (k) .

$N(k)$ numero de circulacoes
efectuadas em (k) .

CIR numero de circuitos.

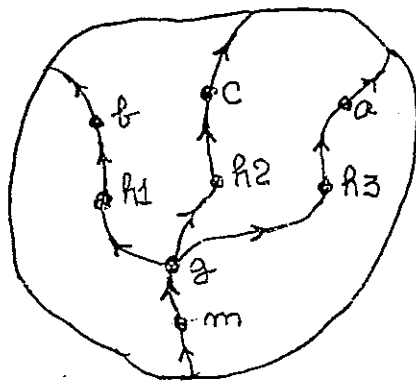
O valor acreado resultante das $N(k)$ circulacoes efectuadas no circuito (k) e' :

$$VLRc(k) = \sum_{p \in [1, N(k)]} Q(k,p) * VLRc(k)$$

onde $Q(k,p)$ representa a percentagem (em quantidade) recirculada no circuito (k) e na circulacao (p) , com $p \in [1, N(k)]$.

donde resulta : $VLRc[a] = VLR[a] + \sum_{k \in [1, CIR]} VLRc[k]$.

Finalmente recorda-se que os circuitos introduzidos nao afectam o valor quer de $VLR[a]$ quer de $VMV[a]$.



Os arcos $[q, h1]$, $[q, h2]$, $[q, h3]$ correspondem a uma mesma operação tecnologica .

So' e' possivel conhecer o valor acreado global mas nao se sabe reparti-lo por : $h1, h2, h3$.

Simbologia :

$q[h]$ representa a quantidade de "objecto" (h) produzido na transformacao $[q, h]$.

Fig: 4

$[q, (h(s) : s \in [1, S])]$ representa o conjunto dos arcos vinculados , partindo de (q) e terminando em $h(s)$.

A aplicacao (VLR) descreve-se pela expressao :

$$VLR[q, (h(s) : s \in [1, S])] = \sum_{s \in [1, S]} VLR[q, h(s)] , \text{ com } S > 1 .$$

Varias metodos podem ser avocados para resolver esta dificuldade intrinseca .

* Metodo dos precos :

Os precos num mercado paradigmatico servem de coeficientes de reparticao dos $VLR[h(s)]$.
O metodo e' essencialmente subjectivo .

* Metodo do Extremo condicionado .

Uma funcao dos (VMV) sera' a funcional extremanda (a minimisar) .
O espaco de aplicacao sera' o conjunto universal .
As restricoes resultantes dos processos tecnologicos e outras vao condicionar a busca do conjunto extremo.

Porém :

- . A funcional podera' nao ser linear ,
- . As restricoes serao tambem , em geral , nao lineares .
- . O espaco podera' nao ser um convexo e ate' ser multiplamente connectado .

Esta solucao , embora elegante formalmente , tera' uma dimensao que ultrapassara' as possibilidades actuais de calculo .

G) BIBLIOGRAFIA .

- 1 N.BOURBAKI, Actualites Scientifiques et Industrielles, 1957.
Hermann , Paris :
- 1.a Theorie des Ensembles , Structures (Chap. 4) .
- 1.b Algebre , Structures algebriques (Chap. 1) .
- 1.c " , Algebre Lineaire (Chap. 2) .
- 1.d " , Algebre Multilineaire (Chap. 3) .
- 1.e " , Topologie Generale (Chap. 1 .. 9) .
- 1.f " , Integration (Chap. 1 e 5) .
- 2 B.RUSSEL, Introduction to Mathematical Philosophy ,
George Allen & Unwin Ltd. , 1930 .
- 3 S.C.KLEENE, Introduction to Metha-Mathematics ,
North-Holland Publ. Co. , 1967 .
- 4 S.FLUGGE, Handbuch der Physics , Band I , II .
Springer - Verlag , 1956 .
- 5 I.S.SOKOLNIKOFF , Tensor Analysis , 2 edition ,
Wiley , 1964 .
- 6 J.A.SCHOUTEN, Tensor Analysis for Physicists , 2 edit. ,
Oxford , 1954 .
- 7 J.M.GUELAND , G.E.CHILOV , Les Distributions ,
Dunod , 1962 .
- 8 A.J.McCONNEL, Application of the Absolute Diferential
Calculus ,
Blackie & Son ltd , 1943 .
- 9 WHTTAKER and WATSON , Modern Analysis , 4 edit. ,
Cambrige , 1940 .
- 10 P.R.HALMOS , Measure Theory , 6 Edit. ,
D.Nostrand Co. Ltd. 1959 .
- 11 L.A.ZADEH , Fuzzy Sets ,
Inform. and Control, 8, 338 - 353 , 1965 .
- 12 H.B.CALEN , THERMODYNAMICS ,
Ed. WILEY , 1960 .
- 13 A.G.PORTELA, Introducao aos Conjuntos Vagos ,
Tecnica . 432, Fev 1976 e 438 Fev. 1977.
- 14 " Axiomatica da Termoestatica ,
Conf. Nacional de Fisica , 1978 .
- 15 " Possibilidade versus Probabilidade .
Conf.
- 16 C.BERGE Graphes et hypergraphes . Dunod .