N O R M A, S.A.R.L.

Sociedade de Estudos para o
Desenvolvimento de Empresas

V8
1966

A INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL NA EMPRESA

Documento nº.8

Í N D I C E

Capítulo II

ESTUDO ELEMENTAR DE ALGUNS MODELOS E TÉCNICAS UTILIZADAS NA INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL (Continuação)

ESTUDO ELEMENTAR DE ALGUNS MODELOS E TÉCNICAS UTILIZADAS NA INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL (Continuação)

8. TEORIA DOS JOGOS

8.1. GENERALIDADES

As situações concorrenciais caracterizam-se pelo facto de dois ou mais indivíduos tomarem decisões em situações que envolvem conflito de interesses. Ora na vida diária surgem numerosas situações de concorrência em domínios como o económico, social, político, militar, etc..

A teoria dos jogos de estratégia ou, simplesmente, teoria dos jogos é o ramo das matemáticas que permite abordar o estudo de tais situações.

Vejamos. Um jogo é um conjunto de regras que governa o comportamento de dado número de indivíduos ou grupos de indivíduos, denominados jogadores. Essas regras devem especificar:

1) as alternativas entre as quais os jogadores fazem a escolha em cada fase da partida (realização do jogo);

2) a informação disponível para cada jogador quando faz uma escolha;

3) o pagamento a cada jogador depois de terminada uma partida.

Entende-se por estratégia de um jogador a regra de decisão que ele utiliza para fazer a escolha entre as alternativas que se lhe oferecem.

Há vários critérios para fazer a classificação dos jogos. Assim, atendendo ao número de jogadores, há jogos de duas pessoas, três, n pessoas. Deve no entanto notar-se que, quando se fala num jogo de n pessoas, referimo-nos não necessàriamente às n pessoas que nele participam mas sim a que os participantes se dividem em n grupos de interesses opostos.

Num jogo, terminada uma partida, faz-se, em geral, a transferência entre os jogadores das quantias prèviamente fixadas pelas regras do jogo. Interpretam-se os ganhos e perdas de um jogador como pagamentos que lhe são feitos, positivos, no primeiro caso,negativos, no segundo. Os jogos dizem-se de soma nula ou de soma não nula (ou significativa), consoante é nula ou não a soma algébrica dos pagamentos.

Também se classificam os jogos de acordo com o número de alternativas que se oferecem a cada jogador. Se são em número finito, o jogo diz-se finito; com número infinito de alternativas, o jogo diz-se infinito.

8.2. JOGOS FINITOS DE DUAS PESSOAS COM SOMA NULA

Os jogos finitos de duas pessoas com soma nula revestem-se da maior importância não só porque os jogos de n pessoas com soma significativa se podem reduzir a jogos de n + 1 pessoas com soma nula (através da introdução de um jogador fictício) mas também porque a teoria dos jogos de n pessoas com soma nula se baseia na dos jogos do mesmo tipo entre duas pessoas.

Um jogo finito com duas pessoas A e B fica perfeitamente caracterizado por um par de matrizes. As linhas para cada matriz representam as alternativas que se oferecem a A; as colunas representam as alternativas que se oferecem a B; os elementos são os correspondentes pagamentos a A, para uma matriz, e a B para a outra matriz.

Num jogo finito com soma nula, o elemento situado na linha i e coluna j da matriz dos pagamentos de B é o simétrico do elemento homólogo da matriz dos pagamentos de A:

Matriz dos pagamentos de A

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\;\; \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriz dos pagamentos de B

$$\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \dots -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} \dots -a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\;\; \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} \dots -a_{mn} \end{bmatrix}$$

Na prática omite-se geralmente a matriz dos pagamentos de B. Uma estratégia só poderá ser elaborada depois da escolha de um critério que traduza a atitude do jogador.

Supondo que os jogadores A e B são inteligentes e prudentes, o jogador A escolherá a linha na qual o seu ganho mais pequeno é máximo e o jogador B escolherá entre todas as colunas aquela para a qual a sua maior perda é mínima. Por outras palavras, dada a matriz $\{a_{ij}\}$ dos pagamentos de A, este jogador escolhe a linha correspondente a

$$\max_i \left(\min_j \; a_{ij}\right) \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots m \\ j = 1, 2, \dots n \end{cases}$$

e o jogador B a coluna correspondente a

$$\min_j \left(\max_i \; a_{ij}\right) \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots m \\ j = 1, 2, \dots n \, . \end{cases}$$

Demonstra-se que, para toda a matriz $\{a_{ij}\}$, é

$$\boxed{1) \quad \min_j \left(\max_i \; a_{ij}\right) \geqq \max_i \left(\min_j \; a_{ij}\right) .}$$

Quando $\{a_{ij}\}$ é tal que

$$\boxed{2) \quad \min_j \left(\max_i \; a_{ij}\right) = \max_i \left(\min_j \; a_{ij}\right) = v}$$

diz-se que o jogo é estritamente determinado ou possui um <u>ponto de equilíbrio</u> e a <u>v</u> dá-se o nome de <u>valor</u> do jogo.

Considere-se, por exemplo, a matriz de pagamentos de A:

$$\begin{array}{cc} & j_0 = 1 \\ i_0 = 2 & \begin{bmatrix} 10 & -7 \\ 13 & 15 \end{bmatrix} \end{array}$$

Os mínimos das linhas são -7 e 13 e os máximos das colunas são 13 e 15. Portanto, o máximo dos mínimos das linhas (13) é igual ao mínimo dos máximos das colunas (13). Quer dizer que a atitude inteligente e prudente dos dois jogadores é convergente, sendo o par $(2,1)$ o par de alternativas que conduzem à maneira óptima de jogar.

Dá-se o nome de <u>estratégia pura</u> à decisão que consiste em escolher para todas as partidas uma alternativa i_o (ou j_o). A estratégia pura pode identificar-se pelo número que representa a alternativa escolhida. No nosso exemplo, a estratégia pura óptima para A é $i_o = 2$ e a estratégia pura óptima para B é $j_o = 1$.

Uma matriz de pagamentos pode possuir vários pontos de equilíbrio ou não possuir nenhum. Por exemplo, para a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

tem-se $\max\limits_{i} (\min\limits_{j} a_{ij}) = -1/2$ e $\min\limits_{j} (\max\limits_{i} a_{ij}) = 0$ e portanto não existe ponto de equilíbrio.

Ora quando a matriz de pagamentos não tem um ponto de equilíbrio único, cada um dos jogadores adopta uma <u>estratégia mista</u> ou <u>combinada</u> o que consiste em escolher para cada partida uma alternativa de acordo com certa distribuição de probabilidade. Por exemplo, um jogador com duas alternativas possíveis pode lançar uma moeda antes de cada partida para decidir qual das alternativas deve escolher.

Uma estratégia mista, para o jogador A com m possíveis alternativas, é representada pelo vector $X = (x_1\ x_2, \ldots x_m)$ onde $x_i \geqq 0$ representa a probabilidade com que cada alternativa i é escolhida. É claro que $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$.

Anàlogamente, uma estratégia mista para B é representada pelo vector $Y = (y_1, y_2, \ldots y_n)$, com $y_j \geqq 0$ e $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$.

Quando A segue a estratégia X e B a estratégia Y, o valor esperado dos pagamentos feitos pelo segundo jogador ao primeiro é $E(X,Y) = \sum_i \sum_j a_{ij}\, x_i\, y_j$. Se para algum X^* e algum Y^* se verifica a condição

$$3) \quad E(X, Y^*) \leqq E(X^*, Y^*) \leqq E(X^*, Y)$$

quaisquer que sejam X e Y, então X^* e Y^* são estratégias mistas óptimas para A e B, respectivamente; (X^*, Y^*) é uma solução do jogo e $v = E(X^*, Y^*)$ é o seu valor. Um ponto (X^*, Y^*) que satisfaz à condição 3) chama-se ponto de sela de $E(X, Y)$.

A primeira das desigualdades em 3) mostra que o jogador A, desde que B utilize a estratégia óptima Y^*, não conseguirá um ganho esperado superior a $E(X^*, Y^*)$; a segunda das desigualdades 3) indica que, empregando A a estratégia X^*, o jogador B pagará menos que em qualquer outra alternativa se utilizar a estratégia Y^*.

O teorema fundamental da teoria dos jogos exprime que $E(X, Y)$ tem sempre ponto de sela e demonstra-se que a resolução do jogo, isto é, a determinação das estratégias mistas óptimas se obtém resolvendo o sistema

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\ x_i \geqq v$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ y_j \leqq v$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

$$x_i \geqq 0 \qquad (i = 1,\ 2, \ldots m)$$

$$y_j \leqq 0 \qquad (j = 1,\ 2, \ldots n)$$

onde $\underline{v}$ (valor do jogo) é uma constante a determinar.

No caso simples de uma matriz de pagamentos de segunda ordem, demonstra-se que as estratégias óptimas (x_1, x_2) e $(y_1,\ y_2)$ são determinadas por

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12}} \qquad\qquad \frac{y_1}{y_2} = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{21}}$$

e o valor $\underline{v}$ do jogo é

$$v = \frac{a_{11}\ a_{22} - a_{12}\ a_{21}}{a_{11}+a_{22} - (a_{12}+a_{21})} \, .$$

Para a matriz de pagamentos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

vem

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{1}{3} \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{4} \\ x_2 = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{1}{3} \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{4} \\ y_2 = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

e

$$v = \frac{0 - 1/4}{1 + 1} = -\frac{1}{8} .$$

8.3. JOGOS CONTRA A NATUREZA

Este rápido resumo da teoria dos jogos permite-nos abordar, embora de forma elementar, os principais aspectos da teoria da decisão.

Quando uma pessoa tem de tomar uma decisão, encontra-se em posição semelhante à de um jogador; o adversário pode porém ser um jogador ou a natureza. Neste segundo caso, não se pode admitir que a natureza tome automàticamente o estado mais desfavorável perante a entidade que tem de tomar uma decisão, como se supôs na teoria dos jogos, e assim o critério de decisão do máximin, que consiste em tomar

$$\max_i \,(\min_j a_{ij}),$$

pode não ser justificável. Um exemplo:

Um vendedor de jornais vende um hebdomadário que ele compra à segunda-feira, devolvendo os exemplares não vendidos na segunda-feira seguinte.

Suponha-se que o vendedor ganha $\$50$ em cada hebdomadário vendido, perde $\$30$ em cada exemplar não vendido e sabe que não venderá mais de 50 em cada semana.

Admitamos que os estados da natureza (procuras) variam de 10 em 10 e as compras serão também feitas de 10 em 10. O quadro seguinte dá os ganhos do vendedor de jornais para cada estado da natureza e cada decisão. É pois um jogo contra a natureza.

Procura

		0	10	20	30	40	50
	0	$\boxed{0}$	0	0	0	0	0
	10	-3	5	5	5	5	5
Compra	20	-6	2	10	10	10	10
	30	-9	-1	7	15	15	15
	40	-12	-4	4	12	20	20
	50	-15	-7	1	9	17	25

Este jogo possui um ponto de equilíbrio, a que corresponde a decisão de o vendedor não comprar hebdomadários. Mas o vendedor de jornais precisa de ganhar a vida e portanto tem de se afastar desta solução.

No caso de um jogo contra a natureza há pois necessidade de adoptar outros critérios que permitam tomar uma decisão.

a) Critério de Laplace

Se os diferentes estados da natureza têm probabilidades desconhecidas, admite-se que estas são iguais.

Se o jogador escolhe a i-ésima linha, o seu ganho esperado é

$$\frac{1}{n}(a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in}).$$

O critério consiste em escolher

$$\max_i \left[\frac{1}{n}(a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in}) \right].$$

No exemplo citado ter-se-ia

Compra	Ganho esperado
0	0
10	3,6
20	6
30	6,8
40	6,6
50	5

e portanto o vendedor de jornais tomaria a decisão de comprar 30 hebdomatários.

b) Critério de Hurwicz

Definindo o número α $(0 \leq \alpha \leq 1)$ o optimismo do jogador e designando por M_i e m_i, respectivamente, o maior e o menor elemento da i-ésima linha, escolhe-se a linha que corresponde ao

$$\max_i \left[\alpha M_i + (1 - \alpha)\, m_i \right] .$$

O optimista perfeito escolherá $\alpha = 1$ e o pessimista perfeito tomará $\alpha = 0$. Neste último caso tem-se o critério do máximin.

No nosso exemplo, tomando $\alpha = 1/2$, tem-se

Compra	$\alpha M_i + (1-\alpha)\, m_i$
0	0
10	1
20	2
30	3
40	4
50	5

isto é, o vendedor compraria 50 hebdomadários.

c) <u>Critério de Savage</u>

Este critério consiste em tomar a <u>matriz das perdas</u> cujos elementos são $p_{ij} = \max\limits_{k} a_{kj} - a_{ij}$
e escolher a linha que corresponde ao

$$\min_{i} \left(\max_{j} p_{ij} \right) \quad \begin{cases} i = 1, 2, \ldots m \\ j = 1, 2, \ldots n \end{cases}$$

isto é, a linha para a qual a maior perda é mínima.

No nosso exemplo, obtém-se a matriz das perdas

$$\{p_{ij}\} = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 15 & 20 \\ 3 & 3 & 0 & 5 & 10 & 15 \\ 6 & 6 & 3 & 0 & 5 & 10 \\ 9 & 9 & 6 & 3 & 0 & 5 \\ 12 & 12 & 9 & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

e tem-se $\min\limits_{i} \left(\max\limits_{j} p_{ij} \right) = 9$ e, portanto, o vendedor deve escolher a linha 5, isto é, deve comprar 40 jornais.