N O R M A, S.A.R.L.

Sociedade de Estudos para o
Desenvolvimento de Empresas

VP
1966

A INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL
NA EMPRESA

Documento nº.7

Í N D I C E

Capítulo II

ESTUDO ELEMENTAR DE ALGUNS MODELOS E TÉCNICAS UTILIZADAS NA INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL (Continuação)

Capítulo II

ESTUDO ELEMENTAR DE ALGUNS MODELOS E TÉCNICAS UTILIZADAS NA INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL (Continuação)

7. TEORIA DOS GRÁFICOS

7.1. GENERALIDADES

A origem da teoria dos gráficos reside na tendência humana para representar por esquemas as ligações entre os elementos de um sistema. Encontram-se esquematizações nos mais diversos domínios: física, química, geografia, economia, psicologia, etc., e as propriedades comuns de tais esquemas, apesar da diversidade das disciplinas em que se utilizam, levaram à criação de uma teoria abstracta e formalizada que constitui hoje um dos ramos mais operacionais da teoria dos conjuntos.

Considere-se um conjunto de pontos $\underline{X}$, finito ou infinito numerável, e estabeleça-se uma correspondência que faça associar a cada elemento $\underline{x}$ de $\underline{X}$ um subconjunto de $\underline{X}$. Designando essa correspondência por $\underline{\Gamma}$ dá-se o nome de gráfico ao par (X,Γ) constituido pelo conjunto $\underline{X}$ e pela correspondência $\underline{\Gamma}$.

Por exemplo, considerou-se o conjunto $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ e a correspondência $\underline{\Gamma}$ definida do modo seguinte:

$$a \xrightarrow{\Gamma} \{b, e, d\}$$

$$b \xrightarrow{\Gamma} \{a, c\}$$

$$c \xrightarrow{\Gamma} \{e\}$$

$$d \xrightarrow{\Gamma} \{d, e, g, f\}$$

$$e \xrightarrow{\Gamma} \{d, e\}$$

$$f \xrightarrow{\Gamma} \{f, g, c\} .$$

Representando os elementos de X por pontos do plano, cada par de pontos (x, y) tais que $x \xrightarrow{\Gamma} y$ une-se por meio de uma linha contínua munida de uma flecha orientada de x para y. Todo o elemento de X é designado por *ponto* ou *vértice* do gráfico, enquanto que um par (x, y), com $x \xrightarrow{\Gamma} y$, toma o nome de *arco* do gráfico.

No exemplo apresentado, obtém-se a *representação sagitária do gráfico* (Fig. 22).

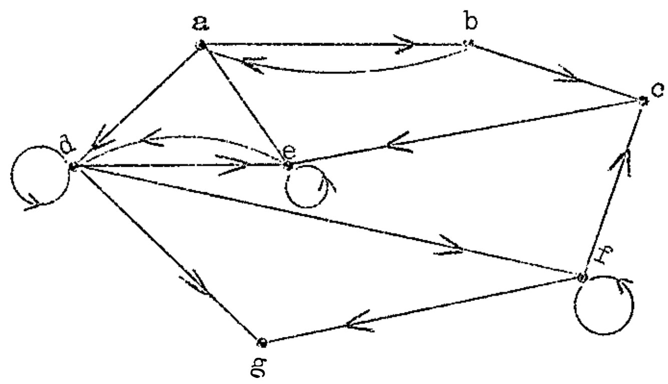

Fig. 22

Neste caso, o conjunto X é constituído pelos vértices a, b, c, d, e e f; os arcos são (a,b), (b,a), (a,e), (d,d), (d,e), (e,d), (e,e), (d,g), (d,f), (f,f), (f,g), (f,c), (b,c) e (c,e).

Como dissemos, pode apresentar-se gràficamente grande número de situações correntes. Por exemplo:

- as relações de parentesco de um grupo de indivíduos;
- a circulação de informação num sistema;
- as regras de certos jogos, como o xadrez e as damas;
- uma rede de estradas ou de ruas;
- a hierarquia dos indivíduos numa organização;
- uma rede eléctrica;
- a evolução das populações num fenómeno demográfico;

- as operações de montagem ou desmontagem de um conjunto tecnológico;
  etc..

Dá-se o nome de caminho a uma sucessão de arcos tal que a extremidade final de cada arco coincide com a extremidade inicial do arco do seguinte. Observando a fig. 22, vê-se fàcilmente que a, d, g é um caminho.

Dá-se o nome de circuito a um caminho cujas extremidades são coincidentes. Em particular, dá-se o nome de lacete a um circuito constituído apenas por um arco. Ainda no exemplo da fig. 22, a, b, a constitui um circuito e (d,d), (e,e) e (f,f) são lacetes.

7.2. PESQUISA DO CAMINHO CRÍTICO

Considere-se um gráfico (X, Γ) sem circuitos e associemos a cada arco $u = (x, y)$ um número $l(u) \geqq 0$, chamado valor de u.

Um problema de grande interesse prático consiste em procurar um caminho μ de valor mínimo ou máximo (caminho crítico) entre dois vértices x_o e x_n do gráfico (X, Γ). Por outras palavras, pretende-se achar μ por forma a minimizar ou maximizar

$$1) \quad \sum_{u \in \mu} l(u).$$

Na prática, $l(u)$ pode ser um custo de transporte, um tempo, uma distância.

A resolução do problema baseia-se na programação dinâmica. Para indicarmos o algoritmo que conduz à optimização de 1), considere-se o exemplo da construção de um prédio, tarefa que se decompõe numa série de operações elementares ou actividades:

- compra do terreno;
- obtenção da licença de construção;
- construção dos alicerces

.....

- telhado

.....

- serralharia
- pinturas

.....

Certas operações só podem ser começadas depois de outras estarem terminadas e diversas operações podem ser executadas simultâneamente. Admitimos que se conhece para cada uma delas a sua duração, assim como as relações de ordem que as ligam.

Chamamos <u>acontecimento</u> ao começo ou ao fim de uma operação. Por exemplo, a "obtenção de uma licença para construir" é uma operação e a "licença obtida" é um acontecimento. Regra geral, pode dizer-se que os acontecimentos não consomem tempo ou recursos, ao contrário do que acontece com as operações.

Por razões de simplicidade, suporemos que a construção do prédio envolve apenas 8 acontecimentos. Representando estes por círculos, tendo em conta a ordem pela qual os acontecimentos se sucedem e os tempos de duração das operações, obtém-se o gráfico do projecto. Suponhamos que o gráfico é o da fig. 23.

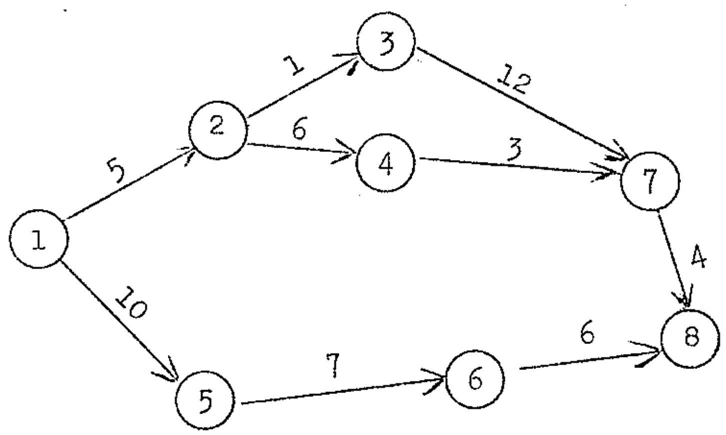

Fig. 23

Uma operação que liga dois acontecimentos (vértices) consecutivos é representada por um arco cuja orientação indica a relação de precedência dos acontecimentos que liga. No gráfico da fig. 23 há 9 operações e 8 acontecimentos.

As durações das operações (<u>tempos operatórios</u>) indicam-se sobre os arcos correspondentes; são, neste caso, os valores dos arcos.

Considere-se então o problema de determinar o prazo para a execução do conjunto total das operações, abaixo do qual é impossível que todas as operações estejam terminadas.

O prazo total deve ser superior ou igual à soma dos tempos operatórios tomados sobre o caminho mais desfavorável (caminho crítico), isto é, o caminho que une o acontecimento inicial 1 ao acontecimento final 8 por forma que a soma dos tempos operatórios afectados aos arcos correspondentes seja máxima.

O algoritmo é o seguinte:

1) Atribuir ao vértice inicial a cota (no nosso caso, a data) <u>0</u>.

2) Cotar um vértice j sòmente quando se encontrarem cotadas as extremidades iniciais de todos os arcos que terminam em j.

3) A cota c_j do vértice <u>j</u> obtém-se do modo seguinte:

$$c_j = \text{máx.} \left[c_i + l\,(i, j) \right]$$

onde (i, j), designa o arco de extremo inicial <u>i</u> e extremo final <u>j</u>, $l(i, j)$ é o valor de (i, j) e o máximo é tomado para todos os arcos (i, j) cujo extremo final é o vértice <u>j</u>.

Este algoritmo exemplifica-se fàcilmente no nosso caso (fig.24). Atribuindo a 1 a cota 0, como há apenas um arco (1,2) que termina em 2, cota-se este vértice com o valor $0 + 5 = 5$; anàlogamente, o vértice 3 cota-se com o número $5 + 1 = 6$.

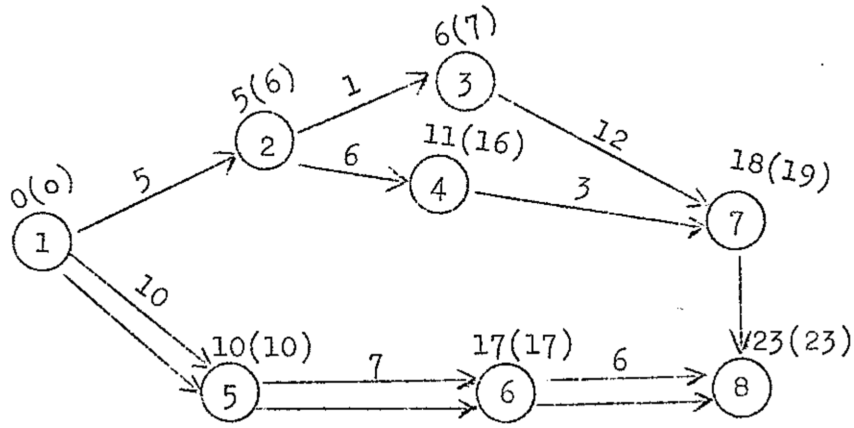

Fig. 24

Para cotar o vértice 7 há que cotar prèviamente 4. Ora este cota-se com o valor $5 + 6 = 11$. Como em 7 terminam os arcos (3,7) e (4,7), tem de se cotar este vértice com o maior número $6 + 12 = 18$ e $11 + 3 = 14$.

Os vértices 5 e 6 cotam-se, respectivamente, com os valores 10 e 17. Para cotar 8 há que tomar o maior dos números $17 + 6 = 23$ e $18 + 4 = 22$. Verifica-se pois que o prazo para a realização do projecto é de 23 unidades de tempo. O caminho correspondente a 23 (caminho crítico) determina-se fàcilmente, calculando para cada acontecimento a <u>data limite de realização</u>, data além da qual todo o projecto se atrazará.

As datas limites de realização são calculadas exactamente de maneira oposta à que foi utilizada no cálculo das datas de realização dos acontecimentos:

1) Parte-se do acontecimento final para o inicial.

2) Para calcular a data limite para um acontecimento, deve subtraír-se da data limite do sucessor o correspondente tempo operatório. Se se obtém mais de um valor, deve tomar-se o mínimo.

No caso da fig. 24 indicam-se entre parêntesis as datas limites de realização para cada um dos acontecimentos. Tem-se então:

Acontecimentos	Data de realização (t_i)	Data limite de realização (t_i^*)
* 1	0	0
2	5	6
3	6	7
4	11	16
* 5	10	10
* 6	17	17
7	18	19
* 8	23	23

São críticos os acontecimentos para os quais $t_i = t_i^*$: estão assinalados com um asterístico. O caminho crítico é pois 1, 5, 6, 8 e encontra-se assinalado na figura 24 a traço duplo. As operações críticas são (1,5), (5,6) e (6,8) e devem começar nas datas de realização dos acontecimentos origens dos arcos. Se o começo de uma operação crítica é retardado, então todo o projecto se atrazará. Por exemplo, se a operação (5,6) começa na data 12, o projecto só estará terminado na data 25.

As operações críticas são as operações do projecto sobre as quais o planificador deve fazer incidir a sua atenção porque do seu andamento vai depender a data de realização do conjunto das operações. As operações não críticas toleram certos atrazos na sua execução. O intervalo $[t_i, t_i^*]$ é chamado <u>intervalo de flutuação</u>: é o intervalo no qual se poderá compreender a data de realização do acontecimento <u>i</u> sem modificar o tempo total de execução do projecto.

Os princípios expostos estão na base do método P.E.R.T. (Program Evaluation and Review Technique) que adquiriu grande voga nos últimos anos como instrumento que permite a uma autoridade executiva definir e coordenar o que deve ser feito para atingir com sucesso os objectivos de um projecto processado no tempo.

Na prática, as durações das operações são em geral aleatórias. Quando se conhecem as distribuições dos tempos operatórios, não há dificuldade em determinar a duração média (valor esperado) e a variância de cada operação (i, j).

Quando se ignoram as distribuições dos tempos operatórios t_{ij}, supõe-se, por razões de comodidade de cálculos, que estes tempos se distribuem de acordo com a lei β . Então,

$$\overline{t}_{ij} = \frac{1}{6} (a_{ij} + m_{ij} + b_{ij})$$

$$6^2_{ij} = \frac{1}{6} \ (b_{ij} - a_{ij})^2$$

onde

a_{ij} - tempo optimista

m_{ij} - tempo mais provável

b_{ij} - tempo pessimista.

O método que depois se segue para a determinação do caminho crítico é análogo ao descrito anteriormente.