N O R M A, S.A.R.L.

Sociedade de Estudos para o
Desenvolvimento de Empresas

VX
1966

A INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL NA EMPRESA

Documento nº. 6

Í N D I C E

Capítulo II

ESTUDO ELEMENTAR DE ALGUNS MODELOS E TÉCNICAS UTILIZADAS NA INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL (Continuação)

Pág.

Capítulo II

ESTUDO ELEMENTAR DE ALGUNS MODELOS E TÉCNICAS UTILIZADAS NA INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL (Continuação)

6. USURA, SUBSTITUIÇÃO E CONSERVAÇÃO DOS EQUIPAMENTOS

6.1 RENOVAÇÃO DE UM EQUIPAMENTO SUJEITO A DEPRECIAÇÃO

Seja A_o o preço de compra de um equipamento e $A_o\,\psi(t)$ o seu preço de venda após um certo tempo <u>t</u>, onde $\psi(o) = 1$ e $\psi(t)$ é monótona decrescente; designe $\Psi(t)$ o custo acumulado das reparações e da conservação, onde $\Psi(o) = 0$ e $\Psi(t)$ é monótona crescente.

O custo do equipamento para um período <u>t</u> é

$$1)\quad C(t) = A_o - A_o\,\psi(t) + \Psi(t)$$

e o custo médio de utilização é

$$2)\quad c(t) = \frac{C(t)}{t} = \frac{A_o - A_o\,\psi(t) + \Psi(t)}{t}.$$

O mínimo de c(t) obtém-se quando

$$c'(t) = \frac{tC'(t) - C(t)}{t^2} = 0,$$

donde

$$C'(t) = \frac{C(t)}{t} = c(t)$$

ou

$$3)\quad Ao\,[1 - \psi(t) + t\,\psi'(t)] + \Psi(t) - t\,\Psi'(t) = 0.$$

Como as funções $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ raramente são dadas por expressões analíticas, a optimização de c(t) faz-se, em geral, por cálculo numérico.

Este modelo simples pressupõe, implìcitamente, que a exploração cessa no momento t. Na realidade o que acontece é o equipamento usado ser substituído no fim do seu período de utilização quer por equipamento novo idêntico quer por equipamento mais moderno.

6.2 RENOVAÇÃO DE UM EQUIPAMENTO SUJEITO A DEPRECIAÇÃO, TENDO EM CONTA A TAXA DE JURO

Seja A_o o preço de compra de um equipamento que pode ser vendido por $A_o \psi(t)$ no fim de t anos. As despesas de manutenção e reparação são $D_1, D_2, \ldots D_t$ e supõem-se feitas no fim de cada ano.

Admitindo um horizonte económico ilimitado e supondo que o equipamento substituído é sempre o mesmo, o custo total actualizado, para um período de renovação de t anos, é

$$1)\quad C(t) = [A_o + \alpha D_1 + \alpha^2 D_2 + \ldots + \alpha^t D_t - A_o \alpha^t \psi(t)] \times$$
$$\times [1 + \alpha^t + \ldots + \alpha^{nt} + \ldots],$$

onde $\alpha = 1/1 + i$, sendo i a taxa de juro.

Também se pode escrever

$$2)\quad C(t) = B(t) \frac{1}{1-\alpha}$$

com

$$B(t) = A_o + \alpha D_1 + \alpha^2 D_2 + \ldots + \alpha^t D_t - A_o \alpha^t \psi(t).$$

O valor de t que minimiza C(t) é tal que

$$3)\quad C(t-1) > C(t) < C(t+1).$$

Se admitirmos $\psi(t) = 0$, o equipamento será substituído quando

$$4)\quad D_{t+1} \quad \frac{A_o + A_1\alpha + \ldots + A_t\,\alpha^t}{1 + \alpha^2 + \ldots + \alpha^t}$$

6.3 USURA ALEATÓRIA. SOBREVIVÊNCIA E TAXA DE AVARIA DE UM EQUIPAMENTO

Designando por T a variável aleatória que representa a duração de funcionamento ou duração de vida de um equipamento, a sua função de sobrevivência $v(t)$ é

$$1)\quad v(t) = \text{Prob } (T > t).$$

A função de sobrevivência pode obter-se do modo seguinte: sendo $n(o)$ o número de equipamentos idênticos postos em serviço no instante $\underline{0}$ e $n(t)$ o número de equipamentos sobreviventes, tem-se

$$2)\quad v(t) = \frac{n(t)}{n(o)}\ ,$$

A função de distribuição da variável aleatória T é

$$3)\quad I(t) = \text{Prob } (T \leqq t) = 1 - v(t).$$

A distribuição das durações de vida, isto é, a probabilidade de um equipamento ter uma avaria entre os instantes t-1 e t é

$$4)\quad \text{Prob } [(t-1) < T \leqq t] = \frac{n(t-1) - n(t)}{n(o)}\ .$$

A probabilidade de avaria é a probabilidade condicional de um equipamento que, tendo atingido o instante t-1 sem avaria, tenha uma avaria entre t-1 e t. Designando por $p_c(t)$ esta probabilidade condicional, vem

$$\text{Prob } [(t-1) < T \leqq t] = \text{Prob } [T > (t-1)] \cdot p_c(t)$$

ou

$$5)\quad p_c(t) = \frac{\text{Prob}\,[(t-1) < T \leqq t]}{\text{Prob}\,[T > (t-1)]}\,,$$

isto é,

$$6)\quad p_c(t) = \frac{n(t-1) - n(t)}{n(t-1)} = 1 - \frac{n(t)}{n(t-1)}\,.$$

No caso em que a função de sobrevivência é contínua (monótona decrescente), a probabilidade de uma duração de vida compreendida entre t e t + dt é

$$7)\quad \text{Prob}\,(t < T \leqq t + dt) = i(t)dt$$

onde $i(t)$ é a função de densidade da variável aleatória T $(i(t) = I'(t))$.

É claro que

$$8)\quad \int_0^t i(u)du = I(t) = 1-v(t)$$

ou

$$9)\quad i(t) = I'(t) = -v'(t).$$

Designando por $\lambda(t)dt$ a probabilidade condicional de que um equipamento, tendo atingido o instante $\underline{t}$ sem avaria, tenha uma avaria entre t e t + dt é

$$\lambda(t)dt = \frac{\text{Prob}\,(t < T \leqq t + dt)}{\text{Prob}\,(T > t)} = \frac{i(t)dt}{v(t)}$$

ou

$$\lambda(t)dt = -\frac{v'(t)}{v(t)}\,dt$$

donde

$$10)\quad \lambda(t) = -\frac{v'(t)}{v(t)}\,.$$

É a $\Lambda(t)$ que se dá o nome de <u>taxa de avaria</u>. Tal como a probabilidade de avaria no caso das variáveis discretas, a taxa de avaria dá uma medida do risco de avaria.

6.4 PROBABILIDADE DE CONSUMO

Admitamos que um equipamento é substituído logo que se produz uma avaria. Vamos achar a probabilidade de que haja $\underline{m}$ substituições do equipamento inicial no intervalo $[o,t]$. Chamaremos consumo ao número de equipamentos substituídos neste intervalo de tempo.

A probabilidade $p_o(t)$ de um consumo nulo ($m = 0$) é

$$p_o(t) = v(t) = \frac{n(t)}{n(o)} \quad .$$

Para calcular $p_1(t)$, notaremos que há uma e uma só avaria num instante $\underline{u}$ compreendido entre $\underline{0}$ e $\underline{t}$ e depois nenhuma avaria entre os instantes $\underline{u}$ e $\underline{t}$. Ora a probabilidade de que haja uma avaria entre u-1 e u é

$$f(u) = \frac{n(u-1) - n(u)}{n(o)}$$

e a probabilidade de que não exista depois nenhuma avaria entre os instantes u e t é

$$v(t-u) = \frac{n(t-u)}{n(o)} \, .$$

Tem-se então, pelo teorema das probabilidades compostas, a probabilidade

$$v(t-u)\, f(u) = \frac{n(t-u)}{n(o)} \cdot \frac{n(u-1) - n(u)}{n(o)}$$

de que se realizem os dois acontecimentos.

A probabilidade procurada é

$$1) \quad p_1(t) = \sum_{u=1}^{t} v(t-u)\ f(u).$$

A probabilidade $p_m(t)$ calcula-se por recorrência, por meio da fórmula

$$2) \quad p_m(t) = \sum_{u=1}^{t} p_{m-1}(t-u)\ f(u), \text{ com } p_m(o) = 0.$$

Quando a função de sobrevivência v(t) é contínua obtêm-se as fórmulas

$$3) \quad \begin{cases} p_o(t) = v(t) \\ p_1(t) = \int_o^t v(t-u)i(u)du \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_m(t) = \int_o^t p_{m-1}(t-u)i(u)du. \end{cases}$$

6.5 LEI DE APROVISIONAMENTO

Considere-se o problema de fazer um aprovisionamento de equipamentos em quantidade suficiente para que o número de equipamentos em serviço siga uma lei $\psi(t)$, chamada <u>função de utilização</u>, e que se fixa prèviamente.

Designando por N_o o número de equipamentos postos em serviço no instante t= o, r(u) o número de equipamentos substituídos até ao instante <u>u</u> e

$$\rho(u) = r(u) - r(u-1), \text{ com } u \geq 1,$$

o número de equipamentos substituídos no intervalo $[u-1, u]$, então o número de equipamentos em serviço no instante <u>t</u> será

$$1)\quad \psi(t) = N_o\, v(t) + \sum_{u=1}^{t} \rho(u)v(t-u).$$

A função r(t) é chamada <u>lei de aprovisionamento</u> e a função $\rho(t)$ <u>taxa de aprovisionamento</u>.

A função $\rho(t)$ pode calcular-se pelas seguintes fórmulas de recorrência

$$\rho(1) = \psi(1) - N_o v(1)$$

$$\rho(2) = \psi(2) - N_o v(2) - \rho(1)v(1)$$

$$2)\quad \rho(3) = \psi(3) - N_o v(3) - \rho(1)v(2) - \rho(2)v(1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\rho(t) = \psi(t) - N_o v(t) - \sum_{u=1}^{t-1} \rho(u)v(t-u).$$

Deduz-se também

$$3)\quad r(t) = \sum_{u=1}^{t} \rho(u)\ .$$

Notemos que o conhecimento da taxa de aprovisionamento $\rho(t)$ e da função de utilização $\psi(t)$ permite calcular a função de sobrevivência v(t). De facto, das fórmulas de recorrência precedentes, vem

$$v(o) = 1$$

$$v(1) = \frac{\psi(1) - \rho(1)}{N_o}$$

$$4)\quad v(2) = \frac{\psi(2) - \rho(1)v(1) - \rho(2)}{N_o}$$

....

$$v(t) = \frac{\psi(t) - \sum_{u=1}^{t} \rho(u)v(t-u)}{N_o} .$$

Quando a função de utilização $\psi(t)$ é constante e igual a N_o, a taxa de aprovisionamento ρ tende para um limite ρ^* $(t \rightarrow \infty)$ chamado taxa de conservação:

$$\rho^* = \lim_{t = \infty} \rho(t) = N_o / \bar{t}$$

onde $\bar{t}$ é a duração de vida média.

Quando a função de sobrevivência v(t) é contínua a fórmula 1) transforma-se em

$$5) \quad \psi(t) = N_o v(t) + \int_o^t r'(u) \,.\, v(t-u)du.$$

que é uma equação integral de Volterra.

A diferencial $r'(u)du$ dá o número de equipamentos substituídos entre u e u + du. A taxa de aprovisionamento é então

$$6) \quad \rho(t) = r'(t)$$

e a taxa de conservação é

$$7) \quad \rho^* = \lim_{t = \infty} r'(t) = N_o / \bar{t}$$

6.6 CONSERVAÇÃO PREVENTIVA

Quando surge uma avaria, os custos envolvidos são o custo de reparação a e as perdas A devidas à avaria (produção perdida pela paragem da máquina, etc.).

Designando por m a duração de vida média do equipamento, o custo médio de avaria por unidade de tempo é

$$1) \quad c_1 = \frac{a + A}{m}$$

onde

$$2) \quad m = \int_0^{\infty} t\ i(t)dt.$$

A conservação preventiva consiste em fixar um instante limite θ para a utilização do equipamento. Este deverá pois ser reparado (eventualmente substituído):

- no momento θ, se não se avariou antes. O custo da reparação é sòmente a porque se podem dispor as coisas por forma a não haver perdas devidas à avaria. A probabilidade deste acontecimento é Prob $(T > \theta)$;

- no momento da avaria quando $T < \theta$. O custo de reparação é então $a + A$. A probabilidade do acontecimento é Prob $(T \leqq \theta)$.

A duração de vida média é agora

$$m' = \int_0^{\theta} ti(t)dt + \theta . \text{Prob } (T > \theta).$$

ou

$$1) \quad m' = \int_0^{\theta} ti(t)dt + \theta\ v(\theta)$$

O custo médio da avaria é

$$2) \quad a \text{ Prob}(T > \theta) + (a+A) \text{ Prob}(T \leqq \theta) =$$

$$= a\ v(\theta) + (a+A) [1-v(\theta)] =$$

$$= a + A [1-v(\theta)] = a + AI(\theta)$$

onde

$$I(\theta) = \int_{0}^{\theta} i(t)dt.$$

O custo médio por unidade de tempo é pois

$$3) \quad c_2 = \frac{a + AI(\theta)}{m'} .$$

Comparando 1) com 3) conclui-se fàcilmente o seguinte:

a) $c_1/c_2 = 1$, as duas políticas são equivalentes;

b) $c_1/c_2 > 1$, é necessário fazer a manutenção preventiva;

c) $c_1/c_2 < 1$, não é necessário fazer a manutenção preventiva;

A razão c_1/c_2 é conhecida logo que for dada a razão a/A e a função de sobrevivência, que são características do equipamento, e o valor de $\underline{\theta}$ cuja escolha depende do utilizador.

Se $c_1/c_2 > 1$ para diversos valores de $\underline{\theta}$, deve fazer-se conservação preventiva e escolher para $\underline{\theta}$ o valor maximizante da razão c_1/c_2.

*

* *

Os modelos apresentados aplicam-se à numerosos problemas concretos. A título exemplificativo, considere-se o seguinte problema:

Um transportador estabeleceu, para uma camionete comprada por 180 contos, o seguinte quadro (em contos):

Anos	1	2	3	4	5	6	7
Custo de manutenção e reparação	18	21,5	24	27	48	84	120
Preço de venda	120	90	72	60	48	36	30

Supondo que a exploração termina no fim do período de utilização, em que data deve cessar a exploração?

Este problema pode resolver-se simplesmente, utilizando o modelo descrito em 6.1. Tem-se

$$A_o = 180$$

t	$A_o\psi(t)$
1	120
2	90
3	72
4	60
5	48
6	36
7	30

t	$\varphi(t)$
1	18
2	39,5
3	63,5
4	90,5
5	138,5
6	222,5
7	342,5

e vem

t	C(t)	C(t)/t
1	78	78
2	129,5	64,75
3	171,5	57,16
4	210,5	52,62
5	270,5	54,10
6	366,5	61,08
7	492,5	70,35

O mínimo de $C(t)/t$ corresponde a $t = 4$.