N O R M A, S.A.R.L.

Sociedade de Estudos para
o Desenvolvimento de Empresas

VP

1966

A INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL NA EMPRESA

Documento nº.5

Í N D I C E

Capítulo II

ESTUDO ELEMENTAR DE ALGUNS MODELOS E TÉCNICAS UTILIZADAS NA INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL (Continuação)

CAPITULO II

ESTUDO ELEMENTAR DE ALGUNS MODELOS E TÉCNICAS UTILIZADAS NA INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL (Continuação)

5. MODELOS DE GESTÃO DE "STOCKS"

Como se disse no Capítulo I, nº. 5.2.1., "stocks" são recursos inactivos. Gerir um "stock" é, essencialmente, prever as datas e os volumes dos reaprovisionamentos. O período é um intervalo de tempo que separa dois reaprovisionamentos sucessivos.

Os principais elementos que intervêm numa gestão de "stocks" são:

- a procura de artigos r que pode ser determinada (por exemplo, proporcional ao tempo) ou aleatória;

- o prazo de reaprovisionamento τ que pode ser determinado, aleatório ou depender do volume da encomenda de reaprovisionamento;

- os diferentes níveis do "stock": nível máximo, capacidade limite de "stockagem", nível mínimo, nível de alerta, nível de reaprovisionamento;

- os custos:

  o custo de "stockagem" c_s por artigo e unidade de tempo;

  o custo de lançamento c_e, representando as despesas administrativas da operação de reaprovisionamento;

  o custo de penúria c_p, que aparece nos modelos de gestão que admitem rotura do "stock";

- o volume das encomendas de reaprovisionamento n, que pode ser constante ou variável consoante a regra de gestão adoptada;

- as datas de reaprovisionamento t e os períodos de gestão T também constantes ou variáveis consoante a regra de gestão adoptada.

Um "stock" sofre um certo número de flutuações devidas, por um lado, às entradas (reaprovisionamentos) e, por outro, às saídas (procura). As flutuações podem ser representadas por um gráfico como o que se apresenta na fig. 12

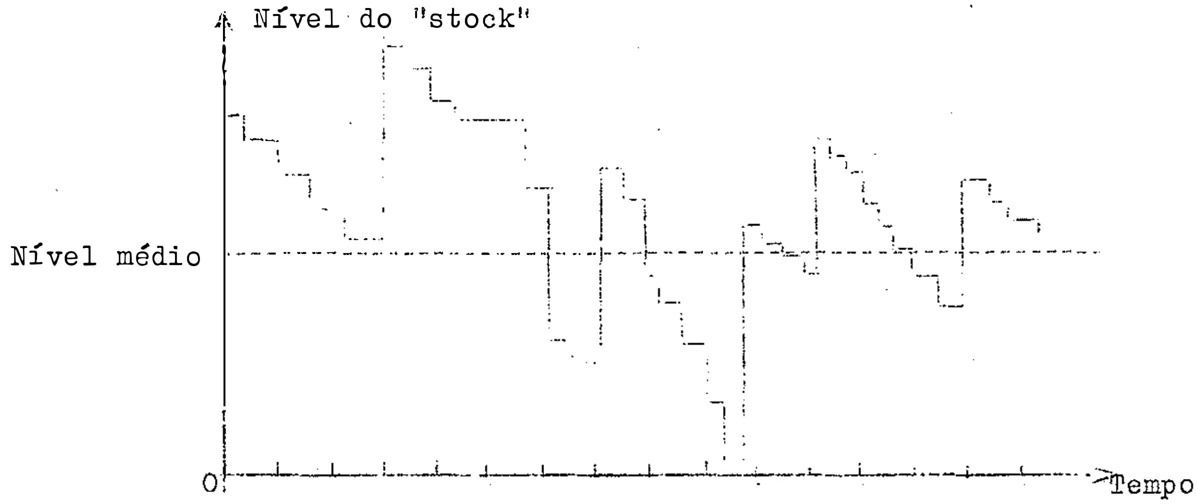

Fig. 12

Para descrever a evolução do nível de um "stock" durante um período θ é cómodo substituir a função em escada decrescente que representa essa evolução por uma recta ou uma curva que se ajuste satisfatòriamente (fig. 13).

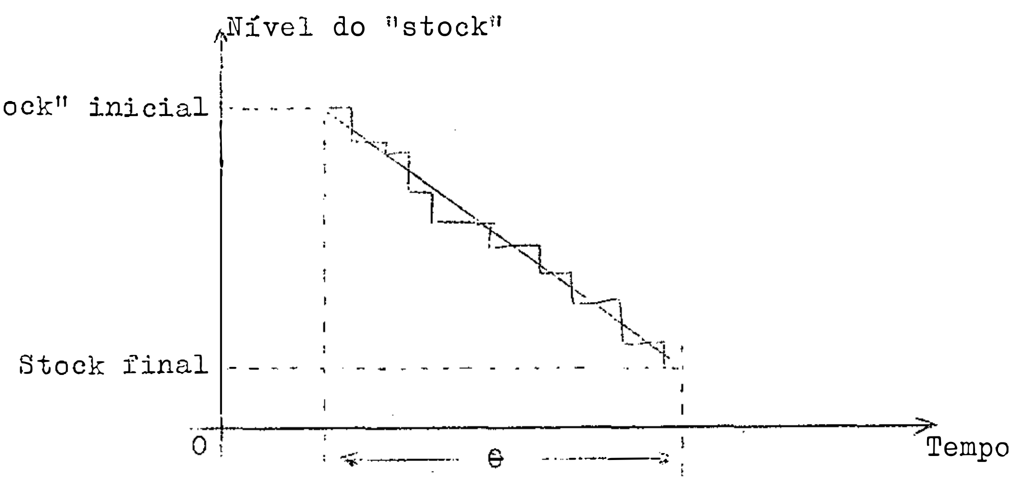

Fig. 13

Existem numerosas <u>regras de gestão</u> de um "stock". Vamo-nos referir apenas a algumas das mais importantes.

1) <u>Gestão a período fixo</u>

a) A procura é constante e o reaprovisionamento faz-se instantâneamente e por quantidades constantes <u>n</u> (fig. 14).

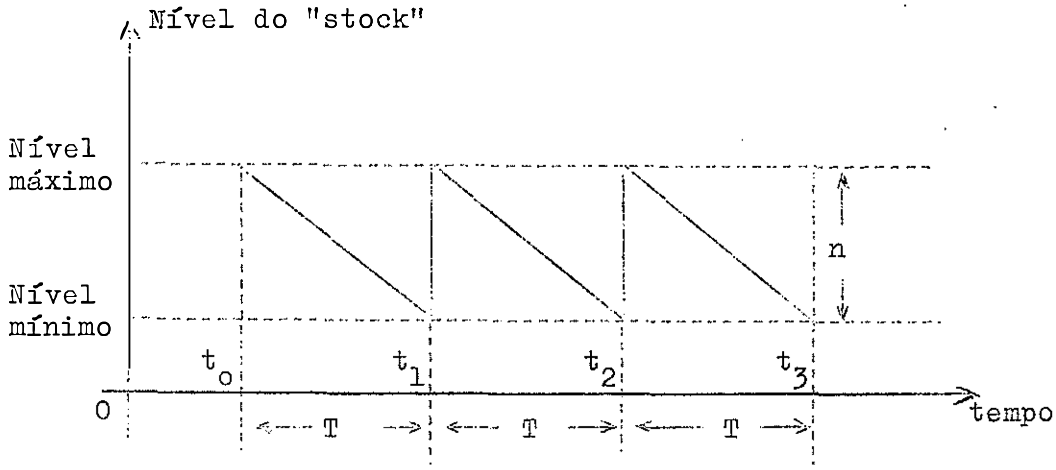

Fig. 14

b) A procura é variável (determinada ou aleatória). O reaprovisionamento faz-se por quantidades variáveis n_i, por forma a levar o stock ao seu nível máximo no fim de cada período, e exige um prazo de reaprovisionamento constante τ . As quantidades n_i têm de ser calculadas nos instantes t_i por extrapolação da recta ou da curva de consumo. A regra está representada na fig. 15.

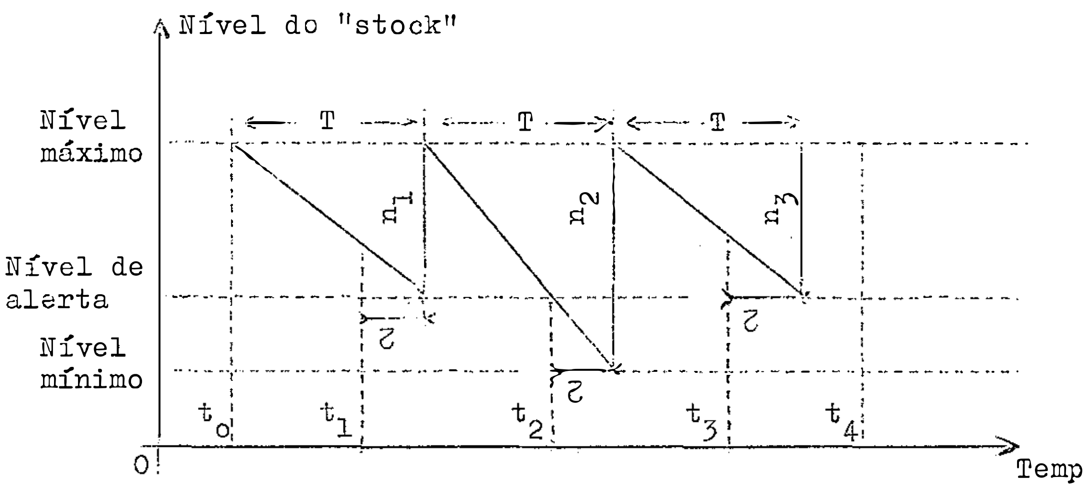

Fig. 15

Pode haver rotura do "stock". O nível de alerta é aquele abaixo do qual a rotura do "stock" se pode produzir com probabilidade elevada.

2) Gestão a período variável

a) A procura é variável (aleatória ou determinada). O reaprovisionamento faz-se por quantidades fixas, por forma a levar o "stock" ao nível máximo no fim de cada período, e exige um prazo de reaprovisionamento constante τ . As datas t_i em que se devem fazer as encomendas devem ser determinadas por extrapolação da recta ou curva de consumo (fig. 16).

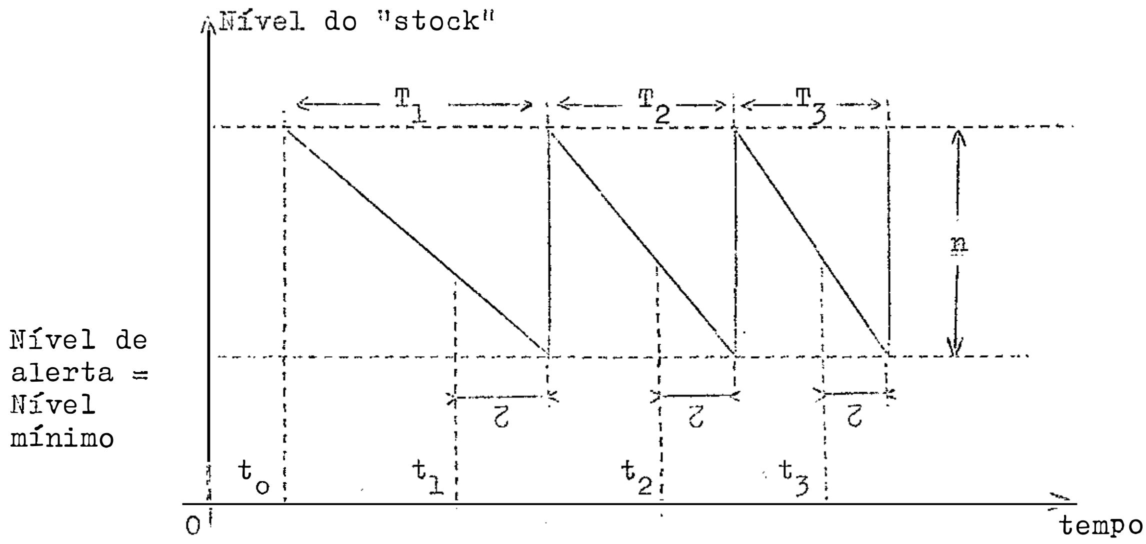

Fig. 16

b) A procura é variável (aleatória ou determinada). O reaprovisionamento faz-se por quantidades fixas e exige um prazo constante τ.

As encomendas fazem-se no momento em que o "stock" atinge o chamado nível de reaprovisionamento que se situa acima do nível de alerta (fig. 17).

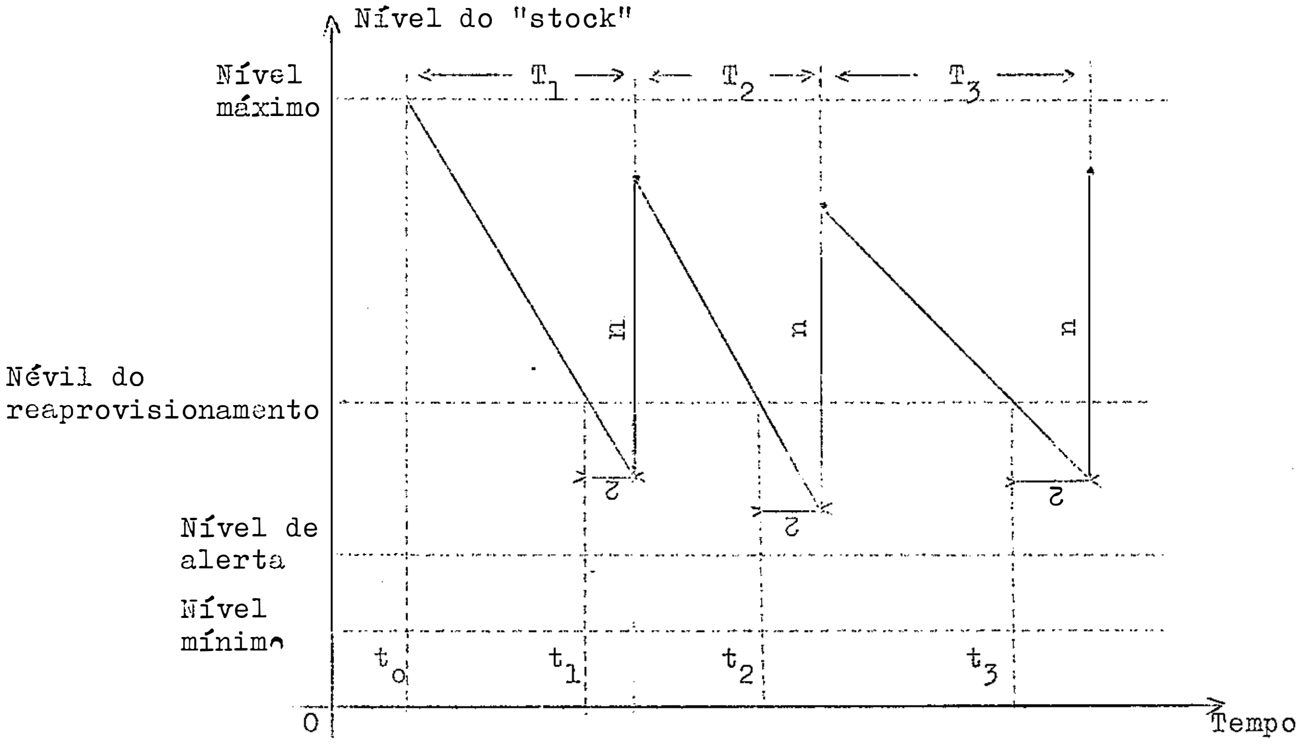

Fig. 17

Vamos estudar, seguidamente, alguns modelos clássicos, mas deve frizar-se que, na prática, é muitas vezes necessário construir um modelo especial "ad-hoc" para a resolução de um problema de gestão de "stock". É esta aliás uma das características da investigação operacional, já sublinhada anteriormente: Havendo problemas concretos que não podem ser resolvidos de maneira satisfatória com a utilização de modelos existentes, o investigador não vai simplificar o problema com o objectivo de lhe aplicar um desses modelos mas sim construir um novo modelo que lhe permita levar em conta as particularidades mais relevantes do fenómeno sob observação.

5.1. MODELOS DETERMINISTAS

Modelo 1. Gestão com período fixo e procura constante

Considere-se o custo de lançamento c_e de uma encomenda independente do número de artigos. Designe $\underline{N}$ a procura total para um certo intervalo de tempo $\underline{\theta}$.

Pretende-se saber quais são as quantidades $\underline{n}$ a reaprovisionar periòdicamente por forma a minimizar o custo total de lançamento e de "stockagem" de $\underline{N}$ unidades, não sendo de admitir nenhuma penúria.

A fig. 18 dá o problema esquematizado.

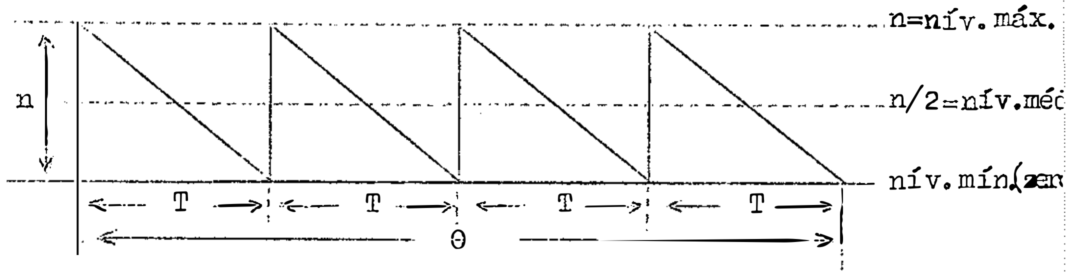

Fig. 18

O nível médio do "stock" durante um período T é n/2. O custo de "stockagem" durante este intervalo é $\frac{1}{2}\, n\, T\, c_s$. Logo, o custo total para uma encomenda é

$$c_e + \frac{1}{2}\, n\, T\, c_s .$$

Por outro lado, tem-se

$$n = h\, T,$$

sendo $\underline{h}$ a procura por unidade de tempo, e

$$\frac{N}{n} = \frac{\theta}{T} .$$

O custo total para o intervalo de tempo θ é

$$C\,(n) = (c_e + \frac{1}{2}\, n\, T\, c_s)\ \frac{N}{n} = \frac{Nc_e}{n} + \frac{\theta c_s}{2}\, n.$$

Esta função será mínima quando

$$\frac{dC}{dn} = -\frac{Nc_e}{n^2} + \frac{\theta c_s}{2} = 0$$

donde $$n_o = \sqrt{2\,\frac{N}{\theta} \cdot \frac{c_e}{c_s}} .$$

que é o valor óptimo a atribuir a $\underline{n}$.

Deduz-se também o período óptimo de gestão

$$T_o = \sqrt{2 \frac{\theta}{N} \frac{c_e}{c_s}}.$$

O custo total é

$$C(n_o) = \sqrt{2N\theta\, c_e\, c_s}.$$

Uma aplicação numérica:

A "stockagem" de um artigo de grande consumo (200 000 unidades por ano) custa $01,2 por dia e por artigo.

Qual é a grandeza da encomenda mais económica e o período de gestão, sabendo que o custo de lançamento de uma encomenda é de 4 320$00?

Neste problema tem-se

$$N = 200\ 000$$

$$\theta = 360$$

$$c_e = 4\ 320 \text{ esc.}$$

$$c_s = 0{,}012 \text{ esc.}$$

donde

$$n_o = \sqrt{2 \cdot \frac{200\ 000}{360} \cdot \frac{4\ 320}{0{,}012}} = \sqrt{4 \cdot 10^8} =$$

$$= 20\ 000 \text{ unidades}$$

$$T_o = \frac{\theta}{N} n_o = \frac{360}{200\ 000} \cdot 20\ 000 = 36 \text{ dias}$$

$$C(n_o) = \sqrt{2N\theta\, c_s\, c_e} = \sqrt{2 \times 200\ 000 \times 360 \times 4\ 320 \times 0{,}012} =$$

$$= 86\ 400 \text{ esc.}$$

Modelo 2. Gestão com período fixo e procura constante com possibilidade de rotura.

Se no Modelo 1 se admite uma possibilidade de rotura com o custo de penúria ou de rotura, c_p, por unidade de tempo, o modelo matemático da gestão do "stock" modifica-se e poderá ser representado geomètricamente pela fig. 19.

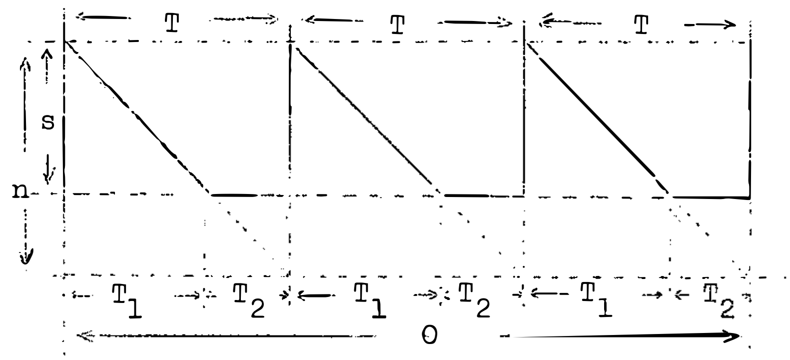

Fig. 19

Tem-se:

- custo de "stockagem" de uma encomenda: $\frac{1}{2}s\ T_1\ c_s$
- custo de lançamento de uma encomenda: c_e
- custo de rotura por encomenda: $\frac{1}{2}\ (n - s)\ T_2\ c_p$.

O custo total no intervalo de tempo θ será agora

$$C\ (n,s) = \left[\frac{1}{2}\ s\ T_1\ c_s + c_e + \frac{1}{2}\ (n - s)\ T_2\ c_p\right] \frac{N}{n}$$

e, como

$$\frac{N}{n} = \frac{\theta}{T}$$

$$T_1 = \frac{s}{n}\ T\ ,\ T_2 = \frac{n-s}{n}\ T,$$

vem

$$C\ (n,s) = s^2\ \frac{\theta c_s}{2n} + \frac{N}{n}\ c_e + \frac{(n-s)^2\ \theta}{2n}\ c_p\ .$$

Esta função de duas variáveis é mínima para

$$n_o = \sqrt{\frac{2N}{\theta}\ \frac{c_e}{c_s}}\ \sqrt{\frac{c_s + c_p}{c_p}}$$

$$s_o = n_o\ \frac{c_p}{c_s + c_p}\ .$$

À quantidade $\rho = c_p/c_s + c_p$ dá-se o nome de <u>taxa de penúria</u> ou <u>taxa de rotura</u>.

Deduz-se também

$$T_o = \sqrt{\frac{2\theta}{N}\ \frac{c_e}{c_s}}\ \sqrt{\frac{c_s + c_p}{c_p}}$$

$$C\ (n_o, s_o) = \sqrt{2N\theta\ c_s\ c_e}\ \sqrt{\frac{c_p}{c_s + c_p}}\ .$$

No exemplo numérico anterior, admitindo uma rotura do "stock" com um custo de \$04,8 por dia e por unidade, vem

$$\rho = \frac{0{,}048}{0{,}012 + 0{,}048} = \frac{0{,}048}{0{,}06} = 0{,}8,$$

donde

$$n_o = 20\ 000\ \sqrt{\frac{1}{0{,}8}} = 22\ 500 \text{ unidades}$$

$$s_o = 22\ 500 \times 0{,}8 = 18\ 000$$

$$T_o = 36 \times \sqrt{\frac{1}{0{,}8}} = 40{,}5 \text{ dias}$$

$$C\ (n_o,\ s_o) = 86\ 400 \times 0{,}88 = 76\ 032 \text{ esc.}$$

5.2. MODELOS ESTOCÁSTICOS

Apresentaremos apenas um exemplo de modelo estocástico para a gestão de um "stock".

Modelo 3. Gestão com período fixo e procura aleatória com possibilidade de rotura.

Suponhamos agora que a procura r para um intervalo de tempo T é aleatória, sendo $p(r)$ a probabilidade de uma procura igual a r. A penúria de um artigo implica uma perda c_p por unidade de tempo.

Designemos por s o número de unidades a colocar em "stock". Existem duas possibilidades que se excluem mùtuamente:

1ª) $r \leqq s$ (Fig. 20)

2ª) $r > s$ (Fig. 21)

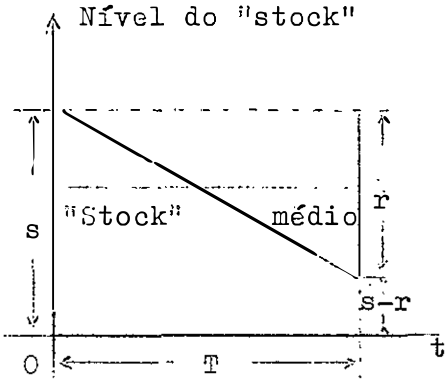

Fig. 20

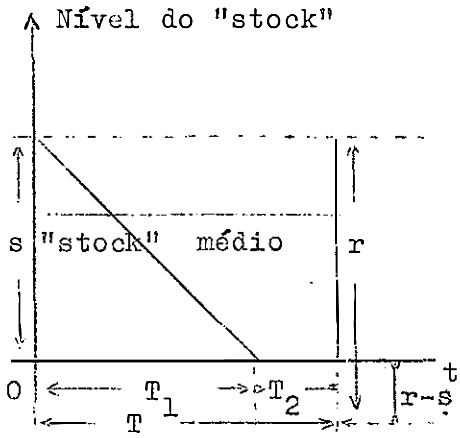

Fig. 21

Quando $r \leqq s$, o "stock" médio é $s - \frac{r}{2}$ e as correspondentes despesas de "stockagem" são $Tc_s\ (s - \frac{r}{2})$. A probabilidade deste caso é evidentemente $p(r)$.

Quando $r > s$, ou $r \geqq s+1$, o "stock" médio é $\frac{s}{2}$ e anula-se ao fim do período $T_1 = \frac{Ts}{r}$. Por outro lado, a procura média $\frac{r-s}{2}$ no período $T_2 = \frac{T(r-s)}{r}$ não pode ser satisfeita. Neste caso, os custos associados são:

- custo de "stockagem": $c_s\ T_1\ \frac{s}{2} = c_s\ T\ \frac{s^2}{2r}$

- custo de rotura: $c_p\ T_2\ \frac{r-s}{2} = c_p\ T\ \frac{(r-s)^2}{2r}$.

A estes custos está associada a probabilidade $p(r)$.

O valor esperado do custo total de "stockagem" para o período T é

$$E\ (\ C\ ) = Tc_s \sum_{r=o}^{s} (s-\frac{r}{2})\ p(r) + Tc_s \sum_{r=s+1}^{\infty} \frac{s^2}{2r}\ p(r) +$$

$$+ Tc_p \sum_{r=s+1} \frac{(r-s)^2}{2r}\ p(r).$$

Demonstra-se que o mínimo de $E(\ C\ )$ é atingido para um valor s_o tal que

$$L\ (s_o - 1) < \rho < L\ (s_o)$$

onde

$$\rho = \frac{c_p}{c_s + c_p}$$

e

$$L\ (s) = p\ (r \leqq s) + (s + 1/2) \sum_{r=s+1}^{\infty} \frac{p(r)}{r},$$

sendo

$$p\ (r \leqq s) = p\ (o) + p\ (1) + \ldots + p\ (s).$$