N O R M A, S.A.R.L.

Sociedade de Estudos para o
Desenvolvimento de Empresas

VV

1966

A INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL NA EMPRESA

Documento nº. 4

Í N D I C E

Capítulo II

ESTUDO ELEMENTAR DE ALGUNS MODELOS E TÉCNICAS UTILIZADAS NA INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL (continuação)

Pág.

Capítulo II

ESTUDO ELEMENTAR DE ALGUNS MODELOS E TÉCNICAS UTILIZADAS NA INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL (continuação)

4. TEORIA DAS FILAS DE ESPERA

A teoria das filas de espera agrega o conjunto de modelos matemáticos estocásticos construídos para o estudo dos fenómenos de espera que surgem correntemente na vida quotidiana. Nos "guichets" das gares, dos bancos e dos correios, nos relógios de ponto de um serviço, no tráfego, enfim, em numerosas situações, deparamos com um fenómeno que se pode caracterizar do modo seguinte:

Certas unidades chegam de uma maneira aleatória a um local onde lhes é prestado determinado serviço. Nesse local há uma ou várias estações onde as unidades são servidas segundo a sua ordem de chegada e durante um período de tempo aleatório. Se, no momento de chegada ao local de certa unidade, todas as estações estão ocupadas, ela terá de ingressar num fila de espera ou bicha, aguardando o momento de ser servida.

No quadro abaixo indicado apresentam-se diversos fenómenos de espera, especificando-se para cada caso, as unidades, a natureza do serviço e as estações:

Unidades	Natureza do serviço	Estações
Clientes	Venda de um artigo	Vendedores
Chamadas telefónicas	Conversação	Circuitos telefónicos
Aviões	Aterragem	Pistas
Barcos	Descarga	Cais
Máquinas para reparar	Reparação	Mecânicos
Minutas	Dactilografia	Dactilógrafos
Mensagens	Decifração	Decifradores
Encomendas	Produção	Oficinas

O problema económico que se põe a propósito dos fenómenos de espera consiste na optimização de certa função objectivo que geralmente anda associada aos custos envolvidos no fenómeno e à eficiência do serviço. Essa optimização traduz-se, por exemplo, na modificação do número de estações, na alteração do tempo médio de serviço em uma ou mais estações, na partição de uma fila ou na reunião de várias, etc..

Façamos as hipóteses seguintes:

1ª) A chegada de uma unidade é independente da de outra (independência das chegadas).

2ª) Nunca chegam duas unidades ou mais ao mesmo tempo.

3ª) A taxa média das chegadas não varia no tempo.

Nestas condições designando por $p_n(t)$ a probabilidade de que $\underline{n}$ chegadas se produzam durante um intervalo de tempo igual a $\underline{t}$, pode demonstrar-se que

$$1)\quad p_n(t) = e^{-\lambda t}\,\frac{(\lambda t)^n}{n!},$$

onde $\underline{\lambda}$ representa a <u>taxa média de chegadas</u> referida à unidade de tempo escolhida.

Reconhece-se que 1) é a função de frequências da distribuição de Poisson com valor esperado $E(n) = \lambda t$ e variância $\sigma_n^2 = \lambda t$.

A probabilidade do intervalo que separa duas chegadas consecutivas ser superior a um certo valor $\underline{\theta}$ é igual à probabilidade de não se observar nenhuma chegada no intervalo $\underline{\theta}$ e, portanto, é igual a $e^{-\lambda\theta}$.

Se designarmos por $F(\theta)$ a função de distribuição da lei de $\underline{\theta}$, tem-se

$$2)\quad F(\theta) = 1 - e^{-\lambda\theta}$$

e a função de frequências é

$$3)\quad f(\theta) = \lambda\, e^{-\lambda\theta}$$ (<u>lei exponencial</u>).

O valor esperado e a variância são $E(\theta) = 1/\lambda$ (<u>tempo médio entre as chegadas</u>) e $\sigma_\theta^2 = 1/\lambda^2$.

Qualquer das funções de densidade 1) e 3) caracteriza uma fila com <u>chegadas de Poisson</u> porque é possível deduzir uma da outra.

A duração do serviço pode ser constante, variável mas determinada ou ainda aleatória. Quando é aleatória, a sua lei de probabilidade apresenta-se frequentes vezes sob a forma exponencial. Designando por <u>s</u> uma variável aleatória que representa o tempo que a estação leva a completar o serviço, numa unidade, então a função de densidade de <u>s</u> é

$$4)\quad g(s) = \mu e^{-\mu s}$$

A <u>taxa média de serviço</u> para uma estação particular é μ. E é claro que $1/\mu$ é o <u>tempo médio de serviço</u>.

Vamos ver seguidamente como os elementos estudados anteriormente podem ser combinados para fornecerem informação referente ao <u>sistema de espera</u> (filas + estações). Seja

S o número de estações;

ν o número de unidades na fila de espera;

j o número de unidades que estão a ser servidas nas estações ($0 \leqq j \leqq S$);

n o número total de unidades no sistema ($n = \nu + j$);

$P_n(t)$ a probabilidade de que haja <u>n</u> unidades no sistema no instante <u>t</u>;

ρ o número de estações inocupadas

$\bar{n}$, $\bar{\nu}$, $\bar{j}$, $\bar{\rho}$ os valores esperados de n, ν, j e ρ;

$\bar{t}_f$ o tempo médio de espera na fila antes do serviço

4.1 <u>FILA DE ESPERA COM VÁRIAS ESTAÇÕES</u>

Neste caso, com $j < S$, não há fila de espera e toda a unidade que chega é imediatamente servida ($v=0$). Ao contrário, se $j=S$, pode formar-se uma fila de espera e $v \geqq 0$.

Supondo que as probabilidades $P_n(t)$ são independentes do tempo (regime permanente), faça-se $\psi = \lambda/\mu$. A quantidade ψ/S, chamada intensidade do tráfico por estação, terá de ser tal que $\psi/S < 1$, quer dizer $\psi < S$, senão a fila tornar-se-ia infinita (o número médio de chegadas seria superior ao das saídas).

a) Probabilidade P_n de um número de unidades n no sistema

1) $P_n = P_o \dfrac{\psi^n}{n!} \qquad 1 \leqq n < S$

2) $P_n = P_o \dfrac{\psi^n}{S!\ S^{n-s}} \qquad n \geqq S$

onde

3) $P_o = \dfrac{1}{\dfrac{\psi^s}{S!\ (1-\psi/S)} + 1 + \dfrac{\psi}{1} + \dfrac{\psi^2}{2!} + \ldots + \dfrac{\psi^{s-1}}{(S-1)!}}$.

Em particular, no caso de uma estação única, $S=1$, tem-se

4) $P_o = 1 - \psi$

5) $P_n = (1-\psi)\psi^n$.

Podem também utilizar-se, para o cálculo de P_n, as fórmulas de recorrência

6) $P_n = \dfrac{\psi}{n} P_{n-1} \qquad 1 \leqq n < S$

7) $P_n = \dfrac{\psi}{S} P_{n-1} \qquad n \geqq S$.

b) Número médio de unidades $\bar{n}$ no sistema

De $\bar{n} = \sum_{n=o}^{\infty} n\ P_n$ vem

$$8)\quad \bar{n} = \left[\psi + 2\,\frac{\psi^2}{2!} + \ldots + S\,\frac{\psi^S}{S!} + \frac{(S+1)\,\psi^{S+1}}{S!\,(S-\psi)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\psi^{S+2}}{S!\,(S-\psi)^2} \right] P_o \,.$$

Em particular, para $S=1$, vem

$$9)\quad \bar{n} = \frac{\psi}{1-\psi}$$

c) <u>Número médio de unidades na fila de espera</u>

Calculando o valor esperado da variável aleatória $\nu = n-S$, vem

$$\bar{\nu} = \sum_{n=S+1}^{\infty} (n-S)\, P_n$$

ou

$$10)\quad \bar{\nu} = \frac{\psi^{S+1}}{SS!\,(1-\psi/S)^2}\, P_o \,.$$

Em particular, com $S=1$, tem-se

$$\bar{\nu} = \frac{\psi^2}{1-\psi}$$

d) <u>Número médio $\bar{\rho}$ de estações inocupadas</u>

$$11)\quad \bar{\rho} = \sum_{n=o}^{S} (S-n)\, P_n = S-\psi \,.$$

Para $S=1$, vem

$$12)\quad \bar{\rho} = 1-\psi \,.$$

As médias $\bar{n}$, $\bar{\nu}$ e $\bar{\rho}$ estão ligadas pela relação

$$13) \quad \bar{n} = \bar{\nu} + S - \bar{\rho} = \bar{\nu} + \psi .$$

e) Probabilidade de espera

Designando por $\underline{P}$ a probabilidade de espera, é claro que $\underline{P}$ é a probabilidade de que $n \geq S$. Então,

$$P = \sum_{n=S}^{\infty} P_n ,$$

o que dá

$$14) \quad P = \frac{\psi^S}{S!\,(1-\psi/S)}\,P_o$$

f) Tempo médio de espera $\bar{t}_f$ na fila

Tem-se

$$\bar{\nu} = \lambda \bar{t}_f$$

e daqui vem

$$15) \quad \bar{t}_f = \frac{\bar{\nu}}{\lambda} = \frac{\psi^S}{SS!\quad(1-\psi/S)^2}\,P_o .$$

Para $S=1$, vem

$$16) \quad \bar{t}_f = \frac{\bar{\nu}}{\lambda}\;\frac{\psi}{1-\psi} = \frac{\bar{n}}{\mu} .$$

4.2 FILA DE ESPERA COM VÁRIAS ESTAÇÕES E NÚMERO LIMITADO DE UNIDADES

Supondo $S < m$, onde $\underline{m}$ designa o número de unidades no conjunto do fenómeno, este pode ser caracterizado do modo seguinte: se $1 \leq n \leq S$, há $S-n$ estações inocupadas, se $S < n \leq m$ há S unidades que estão a ser servidas e $n-S$ na fila de espera.

a) Probabilidade P_n de um número de unidades n no sistema

Prova-se que

$$1) \quad P_n = C_m^n \, \psi^n \, P_o \qquad 0 \leqq n \leqq S$$

$$2) \quad P_n = \frac{n!}{S! \, S^{n-S}} \, C_m^n \, \psi^n \, P_o \qquad S \leqq n \leqq m$$

com

$$\sum_{n=o}^{m} P_n = 1 \, .$$

Podem também utilizar-se fórmulas de recorrência. Escrevendo

$$3) \quad a_n = P_n / P_o \, ,$$

vem

$$a_o = 1$$

$$4) \quad a_n = \frac{m-n+1}{n} \, \psi \, a_{n-1} \qquad 1 \leqq n \leqq S - 1 \, .$$

$$5) \quad a_n = \frac{m-n+1}{S} \, \psi \, a_{n-1} \qquad S \leqq n \leqq m \, .$$

Da relação

$$P_o = 1 - \sum_{n=1}^{m} P_n$$

resulta

$$6) \quad P_o = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{m} a_n} \, .$$

No caso de uma estação única, as fórmulas a utilizar são:

$$7) \quad P_n = \frac{m!}{(m-n)!} \, \psi^n \, P_o$$

com

$$8) \quad P_o = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{m} \frac{m!\ \psi^n}{(m-n)!}} \ .$$

e

$$\sum_{n=o}^{m} P_n = 1 \ ,$$

ou ainda a fórmula de recorrência

$$9) \quad P_n = (m-n+1)\,\psi\, P_{n-1} \qquad 1 \leqq n \leqq m \ .$$

b) <u>Números médios de unidades na fila, de estações inocupadas e de unidades no sistema</u>

Os números $\bar{\nu}$, $\bar{\rho}$ e $\bar{n}$ são dados pelas fórmulas

$$10) \quad \bar{\nu} = \sum_{n=S+1}^{m} (n-S) \quad P_n$$

$$11) \quad \bar{\rho} = \sum_{n=o}^{S} (S-n)\ P_n$$

$$12) \quad \bar{n} = S + \bar{\nu} - \bar{\rho} \ .$$

No caso de uma estação única (S=1), tem-se

$$13) \quad \bar{\nu} = m - \frac{1+\psi}{\psi}\,(1-P_o)$$

$$14) \quad \bar{\rho} = P_o$$

$$15) \quad \bar{n} = m - \frac{1}{\psi}\,(1-P_o) \ .$$

c) <u>Probabilidade de espera e tempo médio de espera na fila</u>

Obtêm-se as fórmulas

16) $P = \sum_{n=S}^{m} P_n$

17) $\bar{t}_f = \dfrac{\bar{\nu}}{\mu(S-\bar{\rho})}$

e, no caso de uma estação única $(S=1)$,

18) $P = 1 - P_o$

19) $\bar{t}_f = \dfrac{1}{\mu}\left(\dfrac{m}{1-P_o} - \dfrac{1+\psi}{\psi}\right)$

Vejamos uma aplicação numérica de alguns dos resultados que acabámos de estabelecer.

<u>Exemplo</u>

As chegadas a uma cabine telefónica obedecem a uma lei de Poisson, com um tempo médio de 10 minutos entre uma chegada e a seguinte. A duração de uma conversação distribui-se exponencialmente com a média de 3 minutos.

a) Qual é a probabilidade de uma pessoa que chega à cabine ter de esperar?

b) A companhia dos telefones instalará uma segunda cabine quando uma chegada tenha de esperar pelo menos três minutos pelo telefone. Qual deverá ser o acréscimo de chegadas para justificar a instalação de uma segunda cabine?

Neste problema, tem-se

$\lambda = 0,1$ chegadas por minuto

$\mu = 0,33$ conversações por minuto

$\psi = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{0,1}{0,33} = 0,3$

$S=1$

Então

$$a)\quad P = \frac{\psi}{1-\psi} P_o = \frac{\psi}{1-\psi}(1-\psi) = \psi = 0{,}3$$

$$b)\quad \bar{t}_f = \frac{1}{\mu}\frac{\psi}{1-\psi} = \frac{1}{\mu}\frac{\lambda'}{\mu-\lambda'}$$

ou $$3 = \frac{\lambda'}{0{,}33\,(0{,}33-\lambda')}$$

donde $\lambda' = 0{,}16$ chegadas por minuto.

O fluxo de chegadas de $0{,}1\times 60 = 6$ por hora deve aumentar para $0{,}16\times 60 = 9{,}6 \approx 10$ por hora para que a companhia monte uma nova cabine.

Existem outros modelos matemáticos para o estudo de filas de espera múltiplas com prioridades de serviço, com distribuições das chegadas e dos serviços diferentes da lei de Poisson, etc..

Em muitos casos que surgem na prática não é possível ajustar funções de distribuição às distribuições empíricas das chegadas e dos serviços e é necessário recorrer aos métodos de Monte-Carlo para resolver esses problemas.