N O R M A, S.A.R.L.

Sociedade de Estudos para o
Desenvolvimento de Empresas

VY

1966

A INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL NA EMPRESA

Documento nº 3

Í N D I C E

Capítulo II

ESTUDO ELEMENTAR DE ALGUNS MODELOS E TECNICAS UTILIZADAS NA INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL (Continuação)

Capítulo II

ESTUDO ELEMENTAR DE ALGUNS MODELOS E TÉCNICAS UTILIZADAS NA INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL (Continuação)

3. PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

Maximizar a utilização eficiente dos recursos ou minimizar o esforço exercido ou o custo envolvido na consecução deste objectivo é um dos problemas mais frequentes que se põe à investigação operacional.

Dado que na maior parte dos problemas que são objecto de estudo da investigação operacional se pretende obter a utilidade máxima dos esforços desenvolvidos, resulta que grande número de modelos operacionais envolvem a construção de uma <u>função objectivo</u> - ou <u>função critério</u> - que tem de se optimizar (maximizar ou minimizar).

Na optimização de funções não sujeitas a restrições utilizam-se com vantagem as técnicas clássicas do Cálculo Diferencial. Na optimização de funções submetidas a restrições (equações, inequações, etc.), as técnicas clássicas revelam-se, na maior parte dos casos, ineficazes devido à complicação de surgir quase sempre a necessidade de pesquisar extremos na fronteira de um domínio.

Modernamente, dá-se o nome de <u>programação matemática</u> ao problema que consiste em extremar a <u>função objectifo</u> $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ sujeita às <u>m</u> <u>restrições</u> $g_i(x_1, x_2, \dots x_n) \left\{ \leq, =, \geq \right\} b_i \ (i = 1,2,\dots m)$. Os valores de <u>m</u> e <u>n</u> não precisam de estar relacionados, isto é, <u>m</u> pode ser maior do que, menor do que, ou igual a <u>n</u>. Frequentemente, algumas ou todas as variáveis obedecem à restrição de serem não negativas.

Embora em certos problemas de programação matemática possam ser utilizadas, com vantagem, técnicas clássicas como, por exemplo, a dos multiplicadores de Lagrange, a maior parte dos casos que surgem na prática exige métodos especiais de cálculo. Não há um algoritmo geral para resolver um problema de programação matemática, embora existam teoremas de existência.

Sobretudo desde 1947, quando George Dantzig apresentou o algoritmo do simplex para resolver problemas de programação linear, tem havido um grande interesse dos investigadores pela descoberta de técnicas que permitam resolver com eficiência certos tipos de programação matemática. Daremos a seguir uma visão geral dos aspectos fundamentais ligados a esta matéria.

3.1 PROGRAMAÇÃO LINEAR

Um problema de programação matemática diz-se linear - ou de programação linear - quando a função objectivo $f\ (x_1, x_2, \dots x_n)$ é linear e as restrições também são lineares, isto é,

$$f\ (x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j\ x_j$$

e

$$g_i(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j \left\{ \leq, =, \geq \right\} b_i \quad (i=1,2,\dots m),$$

onde os a_{ij}, b_i e c_j são constantes. Geralmente, nos problemas práticos, exige-se que $x_j \geq 0$ $(j=1,2,\dots n)$ e, com mais estas restrições, o problema fica posto numa forma mais conveniente para os cálculos. Portanto, um problema de programação linear reduz-se a maximizar (ou minimizar)

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\ x_j$$

sujeita às restrições

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j \left\{ \leq = \geq \right\} b_i \quad (i=1,2,\dots m)$$

e

$$x_j \geq 0 \quad (j=1,2,\dots n).$$

Embora o problema de programação linear esteja caracterizado em termos gerais, é conveniente indicar alguns problemas tipos concretos cujo estudo pode ser abordado utilizando este modelo matemático.

O problema da dieta óptima pode formular-se do modo seguinte: Considerem-se m nutrientes, designe-se por b_i $(i=1,2,\dots m)$ o número mínimo de unidades do nutriente i contido em qualquer dieta admissível (por exemplo, tantas calorias por mês), seja n o número de alimentos, c_j $(j=1,2,\dots n)$ o custo de uma unidade do alimento j, a_{ij} o número de unidades do nutriente i por unidade do elemento j (por exemplo, tantas calorias por quilo) e finalmente x_j a quantidade do elemento j a consumir mensalmente. O problema consiste em determinar as quantidades x_j que minimizam o custo da dieta $\sum_{1}^{n} c_j \, x_j$ satisfazendo os requisitos mínimos dos diversos nutrientes

$\sum_{1}^{n} a_{ij} \, x_j \geqq b_i$ $(i=1,2,\dots m)$, com $x_j \geqq 0$ $(j=1,2,\dots n)$.

O problema do transporte, numa das suas formas mais simples, põe-se nos seguintes termos: determinadas quantidades a_i $(i=1,2,\dots m)$ de um produto homogéneo encontram-se disponíveis em m origens (armazéns, fábricas, estações de caminho de ferro, portos, etc.) e, designando por b_j $(j=1,2,\dots n)$ as quantidades requeridas em n locais de destino (fábricas, mercados consumidores, estações de caminho de ferro, portos, etc.), por c_{ij} o custo de transporte da origem i para o destino j e por x_{ij} a quantidade a transportar da origem i para o destino j, pretende-se minimizar o custo de transporte

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \, x_{ij}$$

com as restrições

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

$x_{ij} \geqq 0$ para todos os índices i e j.

O problema de afectação pode considerar-se um caso particular do problema de transporte. Sejam m indivíduos a afectar a n tarefas e suponham-se conhecidos os números c_{ij} $(i=1,2,\dots m;\ j=1,2,\dots n)$

que dão o custo de afectação do i-ésimo indivíduo à j-ésima tarefa. Pretende-se afectar os indivíduos às tarefas por forma a minimizar o custo total. Designando por x_{ij} uma variável que toma o valor <u>0</u> quando o i-ésimo indivíduo não é afectado à j-ésima tarefa e toma o valor <u>1</u> quando o i-ésimo indivíduo é afectado à j-ésima tarefa, o problema formula-se matemàticamente nos termos seguintes:

$$\text{minimizar} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

com as restrições

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=1$$

$$x_{ij}^2 = x_{ij} \quad (1)$$

O <u>problema do caixeiro-viajante</u> é um outro problema importante de programação linear. Um caixeiro-viajante parte de casa e tem de visitar cada uma e <u>n-1</u> localidades antes de regressar a casa, optimizando a sequência de localizadas visitadas. Por exemplo, ele deve escolher o itinerário que minimiza a distância total a percorrer ou o tempo total da deslocação. Em termos matemáticos trata-se de

$$\text{minimizar} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_{ij}$$

com as restrições

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1 \quad (j=1,2,\ldots n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1 \quad (i=1,2,\ldots n)$$

$$x_{i_1 i_2} + x_{i_2 i_3} + \ldots + x_{i_{r-1} i_r} + x_{i_r i_1} \leqq r-1$$

$$x_{ij}^2 = x_{ij}$$
$$x_{ii} = 0$$

(1) A restrição $x_{ij}^2 = x_{ij}$ equivale a escrever $x_{ij} = 1$ ou $x_{ij} = 0$.

onde os a_{ij} são números dados e $(i_1, i_2, \ldots i_r)$ é uma permutação dos números naturais $1, \ldots r(r=2, \ldots (n-1))$.

Formulado de outra maneira, o problema do caxeiro-viajante consiste em achar uma permutação $(1, i_2, i_3, \ldots i_n)$ dos números naturais $1, \ldots n$ tal que, dados os números a_{ij}, a quantidade

$$a_{1i_2} + a_{i_2 i_3} + \ldots + a_{i_n 1}$$

seja mínima.

Poderiam acrescentar-se muitos outros problemas-tipo porque as aplicações da programação linear são numerosas. Embora não seja possível apresentar uma classificação rigorosa dos tipos de operações a que se aplica a programação linear, pode dizer-se que as aplicações se distribuem, em geral, por três categorias: problema de planeamento da produção e controle de "stocks", problemas de relações interindustriais e problemas de dieta óptima.

Existem vários métodos para resolver um problema de programação linear mas o que se encontra mais difundido é o algoritmo do simplex.

Mostra-se sem dificuldade que todo o problema de programação linear, mediante a introdução de convenientes variáveis auxiliares, pode reduzir-se à seguinte forma básica:

$$\text{Maximizar } z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

com as restrições

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$\text{-------------------------------}$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m$$

$$x_1 \geq 0, \ldots x_n \geq 0.$$

Considerando a matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} & \vdots & b_m \end{bmatrix} = \left[P_1 \; P_2 \ldots P_n \; \vdots \; P_o \right],$$

$$\text{com } P_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad (j = 1,2,\ldots n) \text{ e } P_o = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

obtém-se uma reformulação do problema: determinar um vector $\underline{X}$, de componentes não negativos, $x_i \geqq 0$ $(i = 1,2,\ldots n)$, de forma a

$$\text{maximizar} \quad z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

$$\text{sujeita a} \quad x_1 P_1 + x_2 P_2 + \ldots + x_n P_n = P_o.$$

A um vector $\underline{X}$, de componentes não negativas, que satisfaça as restrições dá-se o nome de solução admissível. Se, além de satisfazer as restrições, o vector $\underline{X}$ maximiza z, então toma o nome de solução admissível óptima. Solução admissível que não tenha mais de $\underline{m}$ valores x_i positivos é solução admissível básica; tendo exactamente $\underline{m}$ componentes positivas, é solução básica não degenerada.

O método do simplex consiste precisamente em construir uma solução admissível inicial e depois uma solução admissível óptima, por meio de um processo iterativo. Vamos descrevê-lo ràpidamente:

1. Admitindo que todo o subconjunto de $\underline{m}$ dos vectores $P_o, P_1, \ldots P_n$ é linearmente independente (caso não degenerado), suponha-se conhecida uma solução admissível básica
   $X = (x_1, \ldots x_m, 0 \ldots 0)$, isto é

$$1) \quad \sum_{i=1}^{m} x_i P_i = P_o,$$

   com $x_i > 0$ $(i=1,2,\ldots m)$.

Por outro lado

$$2)\ P_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}\ P_i \qquad (j = 1,\ldots n)$$

onde os coeficientes x_{ij} não são todos nulos. Faça-se também

$$3)\ z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i\ x_{ij}.$$

2. Sendo θ uma constante por ora indeterminada, de 1) e 2) vem

$$4)\ P_o = \sum_{i=1}^{m} x_i\ P_i - \theta\ P_s + \theta\ P_s$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (x_i - \theta\ x_{is})\ P_i + \theta\ P_s$$

e, fazendo $\theta = x_r/x_{rs}$, desaparece do segundo membro desta relação o vector P_r e introduz-se P_s. Desde que $x_i - \theta\ x_{is} \geqq 0$ $(i = 1,2,\ldots m)$ e $\theta \geqq 0$, os coeficientes em 4) constituem uma solução admissível a que corresponde o valor da função objectivo

$$z' = \sum_{i=1}^{m} c_i\ (x_i - \theta\ x_{is}) + \theta\ c_s = z + \theta\ (c_s - z_s).$$

Se $\theta > o$ e $c_s > z_s$, é possível aumentar $\underline{z}$ com a substituição de P_r por P_s. Em resumo, a escolha de $\underline{r}$ e $\underline{s}$ deve satisfazer as seguintes condições:

$$5)\ \theta = x_r/x_{rs} > 0, \quad x_i - \theta\ x_{is} \geqq o, \quad c_s - z_s > 0.$$

3. Mostra-se sem grande dificuldade que

a) O vector $\underline{P_s}$ a introduzir é o que corresponde à maior das diferenças $c_j - z_j$ $(j = m + 1,\ldots n)$.

b) O vector P_r a retirar corresponde ao inteiro $\underline{r}$ tal que $x_r/x_{rs} = \min\limits_i x_i/x_{is}$ (entre os $\underline{i}$ tais que $x_{is} > o$).

Deve tomar-se $\theta = x_r/x_{rs}$.

c) A nova solução básica $X' = (x_1', \ldots x_{r-1}', 0, x'_{r+1}, \ldots x_m', 0, \ldots x_s', \ldots 0)$

obtém-se, tomando

$$x_i' = x_i - \theta\, x_{is} = x_i - \frac{x_r}{x_{rs}}\, x_{is} \quad (i = 1, \ldots r-1, r+1, \ldots m)$$

$$x_s' = \theta = \frac{x_r}{x_{rs}} .$$

d) Os coeficientes x_{ij}' referentes à expressão de P_j como composição de

$$P_1, \ldots P_s \ldots P_m - P_j = x_{1j}' P_1 + \ldots + x_{sj}' P_s + \ldots + x_{mj}' P_m -$$

obtêm-se pelas fórmulas

$$x_{ij}' = x_{ij} - \frac{x_{rj}}{x_{rs}}\, x_{is} \quad (i = 1, \ldots r-1, r+1, \ldots m)$$

$$x_{sj}' = \frac{x_{rj}}{x_{rs}} .$$

4. À solução $\underline{X}'$ corresponde um aumento do valor de z:

$$z' = z + \theta\,(c_s - z_s) = z + \frac{x_r}{x_{rs}}\,(c_s - z_s) > z.$$

A partir de $\underline{X}'$ pode seguir-se raciocínio idêntico ao que se fez a partir de $\underline{X}$ até que se atinja um dos seguintes casos:

a) Todos os $x_{is} \leqq 0$. Neste caso o valor máximo de z é infinito porque θ pode tornar-se arbitràriamente grande sem que nenhum dos valores $x_i - \theta x_{is}$ se torne negativo.

b) Todos os $c_j - z_j \leqq 0$, o que obriga a suspender o processo: já não é possível aumentar z.

Exemplifiquemos este algoritmo do simplex por meio de um exemplo muito simples:

$$\text{Maximizar} \quad z = 2x_1 + 5x_2$$

com as restrições

$$0 \leqq x_1 \leqq 4$$

$$0 \leqq x_2 \leqq 3$$

$$x_1 + x_2 \leqq 6.$$

Introduzindo variáveis auxiliares x_3, x_4 e x_5, o problema pode reduzir-se à forma seguinte:

$$\text{Maximizar} \quad z = 2x_1 + 5x_2$$

com as restrições

$$x_1 + x_3 = 4$$

$$x_2 + x_4 = 3$$

$$x_1 + x_2 + x_5 = 6$$

$$x_1 \geqq 0 \quad , \; x_2 \geqq 0.$$

Como fàcilmente se reconhece,

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_o \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right],$$

podendo escrever-se as restrições sob a forma

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Uma solução básica não degenerada terá três componentes positivas e duas nulas. Verifica-se fàcilmente que $(0, 0, 4, 3, 6)$ é solução básica não degenerada e tem de se escrever P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 em termos de P_3, P_4 e P_5 (vectores-base):

$$P_1 = 1.P_3 + 0P_4 + 1.P_5$$

$$P_2 = 0.P_3 + 1P_4 + 1.P_5$$

$$P_3 = 1.P_3 + 0.P_4 + 0.P_5$$

$$P_4 = 0.P_3 + 1.P_4 + 0.P_5$$

$$P_5 = 0.P_3 + 0.P_4 + 1.P_5$$

De acordo com a notação da fórmula 2), tem-se:

$$x_{31} = 1,\ x_{41} = 0,\ x_{51} = 1$$

$$x_{32} = 0,\ x_{42} = 1,\ x_{52} = 1$$

$$x_{33} = 1,\ x_{43} = 0,\ x_{53} = 0$$

$$x_{34} = 0,\ x_{44} = 1,\ x_{54} = 0$$

$$x_{35} = 0,\ x_{45} = 0,\ x_{55} = 1.$$

Com estes elementos e utilizando a definição 3) construa-se o quadro seguinte (quadro do simplex):

Base		P_o	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
	c_j		2	5	0	0	0
P_3	0	4	1	0	1	0	0
P_4	0	3	0	$\boxed{1}$	0	1	0
P_5	0	6	1	1	0	0	1
z_j		0	0	0	0	0	0
$c_j - z_j$			2	5	0	0	0

O valor $z = 0$, correspondente à solução básica tomada, está assinalado no local de z_o.

Como o maior valor de $c_j - z_j$ é $c_2 - z_2 = 5$ o vector a introduzir na nova base é P_2 e a θ atribui-se o menor dos valores

$$\frac{x_3}{x_{32}} = \frac{4}{0} = \infty \ , \quad \frac{x_4}{x_{42}} = \frac{3}{1} = 3, \quad \frac{x_5}{x_{52}} = \frac{6}{1} = 6 \ .$$

Portanto $\theta = 3$ e o vector P_4 sai da base. De acordo com as fórmulas das alíneas c) e d) do nº.3 (com r=4 e s=2), obtém-se o novo quadro: (1)

Base		P_o	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
	c_j		2	5	0	0	0
P_3	0	4	1	0	1	0	0
P_2	5	3	0	1	0	1	0
P_5	0	3	$\boxed{1}$	0	0	-1	1
z_j		15	0	5	0	5	0
$c_j - z_j$			2	0	0		0

Observando este quadro, vê-se que o vector a entrar na base é P_1 e o vector a saír é o que corresponde ao menor dos valores

$$\frac{x_3'}{x_{31}'} = \frac{4}{1} = 4, \quad \frac{x_2'}{x_{21}'} = \frac{3}{0} = \infty \ , \quad \frac{x_5'}{x_{51}'} = \frac{3}{1} = 3$$

---

(1) - Ao elemento x_{rs} (neste exemplo, x_{42}) dá-se o nome de <u>elemento redutor</u> e assinala-se no quadro com um pequeno quadrado.

Portanto $\theta' = 3$, o vector a sair é P_5 e vem o novo quadro:

Base		P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
	c_j		2	5	0	0	0
P_3	0	1	0	0	1	1	-1
P_2	5	3	0	1	0	1	0
P_1	2	3	1	0	0	-1	1
z_j		21	2	5	0	3	2
$c_j - z_j$			0	0	0	-3	-2

O algoritmo do simplex terminou porque todas as diferenças $c_j - z_j$ são agora nulas ou negativas. A solução admissível óptima é (3, 3, 1, 0, 0) a que corr esponde $z = 21$.

Neste exemplo, é possível e fácil apresentar uma interpretação geométrica curiosa. As restrições

$$0 \leqq x_1 \leqq 4$$
$$0 \leqq x_2 \leqq 3$$
$$x_1 + x_2 \leqq 6$$

dão o domínio do plano representado a tracejado na figura 8. Fazendo $2x_1 + 5x_2 = k$, esta equação representa uma recta variável de coeficiente angular -2/5. Por exemplo, na fig. 8 está representada a recta $2x_1+5x_2=10$.

Ora, para $k = 21$, a recta passa por $C(3,3)$, que é o maximizante da função $2x_1 + 5x_2$.

A solução básica inicial (0, 0, 4, 3, 6) corresponde à origem $\underline{O}$; a solução (0, 3, 3, 0, 3) corresponde ao pon-

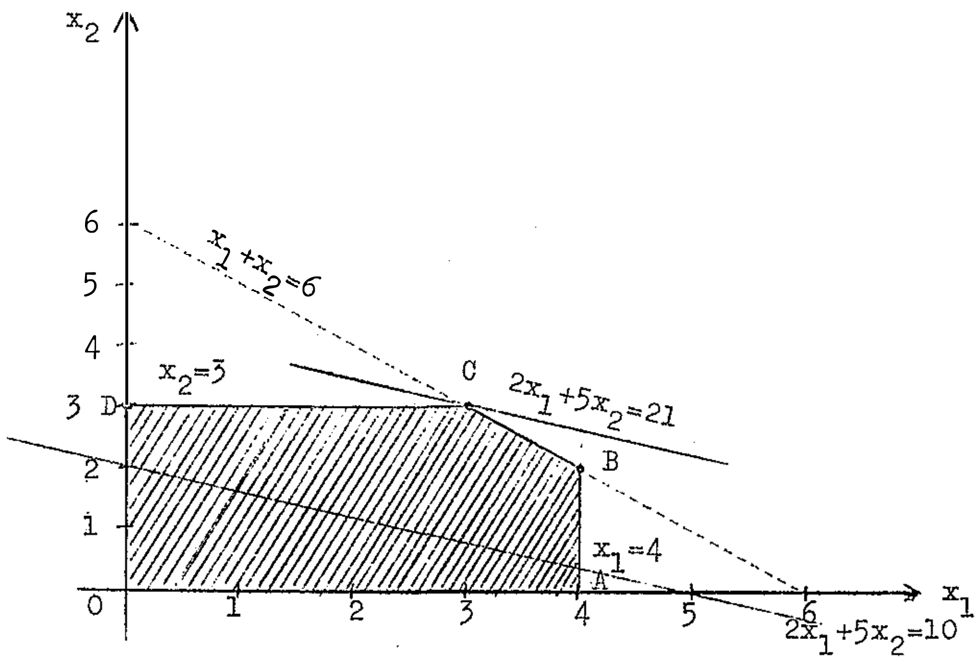

Fig. 8

to D e, finalmente, a solução óptima (3, 3, 1, 0, 0) corresponde ao ponto C.

O método do simplex consistiu pois em partir do ponto O para o ponto C através de D.

Existem muitos outros métodos para resolver um problema de programação linear mas a sua descrição não cabe nos objectivos deste curso. No entanto, dada a importância do problema do transporte e a frequência com que aparece na prática, vamo-nos referir sucintamente a um dos métodos de resolução desse problema especial de programação linear.

Considere-se então o problema de minimizar

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

com as restrições

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

$$x_{ij} \geqq 0$$

Em virtude da condição $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, as $m + n$ restrições $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = a_i$ e $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$ não são independentes mas é fácil fazer aparecer $m + n - 1$ equações independentes que são:

1 equação: $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

(m-1) equações: $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots m - 1)$

(n-1) equações: $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \ldots n - 1).$

Uma solução admissível básica não degenerada tem pois <u>$m + n - 1$</u> componentes positivas.

Um problema de transporte pode ser sempre definido pela matriz dos custos unitários de transporte $\left\{c_{ij}\right\}$. Considere-se, por exemplo, a seguinte matriz dos custos de transporte ampliada com uma linha e coluna suplementares, representando, respectivamente, os destinos e as origens:

Origens

	7	8	5	4
	3	7	2	3
	9	5	10	3
Destinos	2	2	6	

Para obter uma solução admissível básica, pode utilizar-se o <u>método da diferença máxima</u> que consiste em tomar em cada linha e em cada coluna o custo mínimo, fazendo depois a diferença entre este custo e o custo imediatamente superior na mesma linha ou na mesma coluna:

7	8	5	4	(2)
3	7	2	3	(1)
9	5	10	3	(4)
2	2	6		
(4)	(2)	(3)		

Estas diferenças estão aqui indicadas entre parêntesis. Seguidamente, toma-se o máximo das diferenças, neste caso 4, e atribui-se à casa que contém o custo mínimo da linha ou da coluna correspondente (por exemplo, a coluna 1) o mínimo entre as quantidades na origem e no destino. Neste exemplo, toma-se min (2,3) = 2 para a casa (2,1).

Depois suprime-se a coluna ou a linha saturada (neste caso a primeira coluna) e recomeçam-se as operações no quadro seguinte:

8	5	4	(3)
7	2	1	(5)
5	10	3	(5)
2	6		
(2)	(3)		

Pode então atribuir-se à casa (2,3) o valor 1 e suprime-se a linha 2, obtendo-se

8	5	4	(3)
5	10	3	(5)
2	5		
(3)	(5)		

Daqui, atribuindo à casa (3,2) o valor 2, vem

5	4	(0)
10	1	(0)
5		
(5)		

e a operação prossegue com a atribuição de 4 à casa (1,3). Finalmente, com

10	1	(0)
1		
(0)		

,

inscreve-se <u>1</u> na casa (3,3). Em resumo, a solução básica é

		4
2		1
	2	1

ou $x_{11}=0$, $x_{12}=0$, $x_{13}=4$, $x_{21}=2$, $x_{22}=0$, $x_{23}=1$, $x_{31}=0$,
$x_{32}=2$ e $x_{33}=1$

a que corresponde o custo

$$5\times4 + 3\times2 + 2\times1 + 5\times2 + 10\times1 = 48.$$

A partir desta solução básica, temos de procurar uma nova solução a que corresponda um custo inferior.

Suponhamos que se afecta uma unidade à casa (1,1). Então é necessário retirar uma unidade da casa (1,3), juntar uma na casa(2,3) e retirar uma da casa (2,1):

+1		4 -1
2 -1		1 +1
	2	1

Esta troca circular provoca no custo total a variação

$$\delta_{11} = 7 - 5 - 3 + 2 = 1.$$

Anàlogamente, para as outras casas calcula-se fàcilmente

$$\delta_{12} = 8 - 5 - 5 + 10 = 8$$
$$\delta_{22} = 7 - 2 - 5 + 10 = 10$$
$$\delta_{31} = - 3 + 2 + 9 - 10 = - 2$$

Para diminuir o custo é preciso tomar uma nova solução básica que corresponda a um $\delta_{ij} < 0$. Tomando o mais negativo, aqui $\delta_{31} = - 2$, a nova solução básica obtém-se do quadro que serviu para calcular δ_{31}

		4
2 -1		1 +1
+1	2	1 -1

considerando, nas casas onde se inserem -1, a que tem uma menor quantidade (casa (3,3) - 1)É esta a quantidade a deslocar das casas marcadas com -1 para obter a nova solução básica

		4
1		2
1	2	

O custo total de transporte diminui pois 2×1 unidades, passando a 46.

A solução obtida é óptima porque, como se pode verificar, todos os δ_{ij} são agora positivos:

$$\delta_{11} = 1 \; ; \; \delta_{12} = 6 \; ; \; \delta_{22} = 8 \; ; \; \delta_{33} = 2.$$

3.2. PROGRAMAÇÃO LINEAR PARAMÉTRICA

Até agora supôs-se que, num problema de programação linear, são conhecidas todas as constantes que figuram na função objectivo e nas restrições. Ora, na prática, acontece frequentemente que se encontram grandes dificuldades em achar os valores dessas constantes. Nestas circunstâncias a programação linear paramétrica é um modelo matemático aplicável.

Consideremos, em primeiro lugar, o problema de programação linear com um parâmetro:

Seja $\delta \leq \lambda \leq \varphi$, onde δ designa um número arbitràriamente pequeno e φ um número arbitràriamente grande. Põe-se então o problema de, para cada λ do intervalo $[\delta, \varphi]$,

$$\text{maximizar} \quad \sum_{j=1}^{n} (c_j + \lambda c_j')$$

com as restrições

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

$$x_j \geqq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots n)$$

onde c_j, c'_j, a_{ij} e b_i são constantes dadas.

Utilizando o método do simplex, é possível achar sistemàticamente as soluções correspondentes aos diversos valores do parâmetro λ.

A generalização do problema de programação linear com um parâmetro ao caso da parametrização da função objectivo com n parâmetros constitui o problema de programação linear com n parâmetros:

$$\text{maximizar} \sum_{j=1}^{n} (c_j + \lambda_1 c_j^{(1)} + \ldots + \lambda_n c_j^{(n)})\, x_j$$

com as restrições

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots m)$$

$$x_j \geqq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots n).$$

Este problema é muito mais complexo e não há um processo sistemático de achar as soluções correspondentes aos diversos valores dos parâmetros.

A parametrização dos coeficientes do segundo membro das restrições dá origem a um novo problema de programação linear paramétrica:

Com $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$,

$$\text{maximizar} \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j$$

com as restrições

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i + \theta\, b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

$$x_j \geqq 0 \qquad\qquad (j = 1, 2, \ldots m)$$

Este problema pode ser reduzido através da sua formulação dual a um problema do primeiro tipo.

Finalmente, o caso geral de um problema de programação linear paramétrica envolve a parametrização dos coeficientes c_j, a_{ij} e b_i. O problema é extremamente complexo e, só em casos muito especiais, é possível achar todas as soluções.

Considere-se seguidamente um problema muito simples de programação linear com um parâmetro:

$$\text{maximizar} \quad (t + 1)\, x_1 + (t-1)\, x_2$$

com as restrições

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 3 \\ x_1 - 2x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 1 \\ -2x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 2\,. \end{aligned}$$

O primeiro quadro do algoritmo do simplex é

Base	c_j	P_o	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
			t+1	t-1	0	0	0
P_3	0	3	1	1	1	0	0
P_4	0	1	$\boxed{1}$	-2	0	1	0
P_5	0	2	-2	1	0	0	1
z_j		0	0	0	0	0	0
$c_j - z_j$			t+1	t-1	0	0	0

A função objectivo será máxima para a solução básica (0,0,3,1,2) se

$$t + 1 \leqq 0$$

$$t - 1 \leqq 0$$

o que acontece para $t \leqq -1$. Portanto, para $t \leqq -1$, a função $z = (t+1)\,x_1 + (t-1)\,x_2$ é máxima para a solução (0,0,3,1,2) e tem o valor $z = 0$.

Como $t + 1 > t - 1$, logo que $t + 1 > 0$ $(t > -1)$ introduza-se na base o vector P_1 e retire-se P_4 (por corresponder ao menor valor de θ). O novo quadro do simplex é

Base		P_o	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
	c_j		t+1	t-1	0	0	0
P_3	0	2	0	$\boxed{3}$	1	-1	0
P_1	t+1	1	1	-2	0	1	0
P_5	0	4	0	-3	0	2	1
z_j		t+1	t+1	-2t-2	0	t+1	0
c_j-z_j			0	3t+1	0	-t-1	0

A função será máxima para (1,0,2,0,4), com o valor $z = t + 1$, quando

$$3t + 1 \leqq 0$$

$$-t - 1 \leqq 0$$

o que se dará para $-1 \leqq t \leqq -1/3$.

Para $t > -1/3$ é $3t + 1 > 0$ e, introduzindo na base o vector P_2 e retirando P_3, vem o novo quadro:

Base		P_o	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
	c_j		t+1	t-1	0	0	0
P_2	t-1	2/3	0	1	1/3	-1/3	0
P_1	t+1	7/3	1	0	2/3	1/3	0
P_5	0	6	0	0	1	1	1
z_j		3t+5/3	t+1	t-1	t+1/3	2/3	0
c_j-z_j			0	0	-t-1/3	-2/3	0

Agora, como para $t > -\frac{1}{3}$, é $-t - \frac{1}{3} < 0$, o algoritmo do simplex chegou ao fim. Então, para $t \geqq -1/3$, a solução óptima é $(7/3, 2/3, 0, 0, 6)$ que dá $z = 3t + 5/3$.

3.3. PROGRAMAÇÃO LINEAR DISCRETA

O problema de afectação e o do caixeiro viajante, citados em 3.1, constituem exemplos de problemas de programação linear discreta. De facto, neste tipo de problemas, exige-se que as soluções sejam formadas por inteiros não negativos e, nos casos indicados, as variáveis x_{ij} ou tomam o valor 0 ou tomam o valor 1 .

As técnicas que se utilizam para a resolução de problemas de programação linear discreta baseiam-se, na sua maior parte, na extensão e modificação do método do simplex, ou na utilização de equações funcionais.

Notando que qualquer inteiro $x \leqq k$ (inteiro não negativo) se pode escrever na forma $x = y_1 + y_2 + \ldots + y_k$, com $y_j = 0$ ou 1, qualquer problema de programação linear discreta se pode formular do modo seguinte:

$$\text{maximizar} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

com as restrições

$$\sum a_{ij}\, x_j = b_i$$

$$x_j^2 = x_j.$$

Substituindo esta última condição por $0 \leqq x_j \leqq 1$ passamos do problema discreto para o problema contínuo.

As técnicas de resolução utilizam geralmente a proposição óbvia de que o conjunto $C' = \left\{ x_j : \sum c_j\, x_j = \text{máx.};\ AX = B;\ x_j^2 = x_j \right\}$ é um subconjunto de $C = \left\{ x_j : \sum c_j\, x_j = \text{máx.};\ AX = B;\ 0 \leqq x_j \leqq 1 \right\}$.

Para uma classe geral de problemas discretos, englobando o problema do transporte e o da afectação, os dois conjuntos C e C' coincidem.

Não iremos estudar métodos gerais para a resolução destes problemas mas notemos que existem métodos expeditos para resolver os problemas de afectação e do caixeiro-viajante e que são fáceis de apreender.

Como se disse no nº. 3.1, o <u>problema de afectação</u> é um caso particular do problema do transporte e portanto pode ser resolvido pelo método do transporte. Existe no entanto um algoritmo mais eficiente descoberto por Kuhn e que é conhecido por <u>método húngaro</u>. Vamos expô-lo sobre um exemplo numérico.

Considerem-se 5 operários e 5 tarefas. A toda a afectação (x_i, y_j) é associado um valor $c_{ij} \geqq 0$. Sabendo que a matriz dos custos é

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	12	8	7	15	4
x_2	7	9	17	14	10
x_3	9	6	12	6	7
x_4	7	6	14	6	10
x_5	9	6	12	10	6

afectar os 5 operários às 5 tarefas por forma a minimizar o custo total de afectação.

Há 5! = 120 possíveis afectações (x_i, y_j). Um processo de resolução do problema consistiria em ensaiar as 120 afectações e procurar a que minimizasse o custo total de afectação. Mas este método seria muito trabalhoso e é possível seguir um processo mais sistemático. Evidencia-se que não se altera a solução óptima de um problema de afectação diminuindo ou aumentando de uma mesma quantidade λ todos os elementos de uma mesma linha (coluna) da matriz dos custos.

O método húngaro divide-se em seis fases:

Fase 1 - Obtenção de zeros

A todos os elementos de uma mesma coluna subtrai-se o mais pequeno elemento da coluna; quer dizer, forma-se a matriz $\{c_{ij}^{(1)}\}$ com $c_{ij}^{(1)} = c_{ij} - \min_i . c_{ij}$.

No nosso caso, obtém-se

$$\{c_{ij}^{(1)}\} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 5 & 2 & 0 & 9 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 10 & 8 & 6 \\ \hline 2 & 0 & 5 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 7 & 0 & 6 \\ \hline 2 & 0 & 5 & 4 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Fase 2 - Pesquisa de uma solução óptima

Com os zeros de $\{c_{ij}^{(1)}\}$, procuremos formar uma solução para a qual o novo custo total tenha um valor nulo; quer dizer, uma afectação onde todos os $c_{ij}^{(1)}$ da solução sejam nulos. Se isto for possível, encontrou-se a solução óptima, senão passa-se à Fase 3.

Para procurar a solução nula, considere-se primeiro uma das linhas que tenha o menor número de zeros, enquadre--se um dos zeros dessa linha e cortem-se os zeros que se encontrem sobre a mesma linha e a mesma coluna do zero enquadrado. Procede-se da mesma maneira para todas as restantes linhas até que não se possam enquadrar mais zeros.

No nosso exemplo obtém-se uma afectação incompleta com todos os zeros enquadrados:

5	2	$\boxed{0}$	9	$\cancel{0}$
$\boxed{0}$	3	10	8	6
2	$\cancel{0}$	5	$\boxed{0}$	3
$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	7	$\cancel{0}$	6
2	$\boxed{0}$	5	4	2

É preciso passar à fase seguinte.

Fase 3-Obtenção de um conjunto mínimo de linhas e colunas contendo todos os zeros

Operemos do modo seguinte:

a) marquemos com uma cruz (X) todas as linhas que não contêm nenhum zero enquadrado;

b) marquemos com uma cruz (X) toda a coluna que tenha um zero cortado sobre uma ou várias linhas marcadas;

c) marquemos toda a linha que tenha um zero enquadrado numa coluna marcada;

d) repitamos b) e c) até que não seja possível obter novas linhas ou colunas marcadas.

No nosso exemplo,

5	2	$\boxed{0}$	9	$\cancel{0}$	
$\boxed{0}$	3	10	8	6	X
2	$\cancel{0}$	5	$\boxed{0}$	3	X
$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	7	$\cancel{0}$	6	X
2	$\boxed{0}$	5	4	2	X
X	X		X		

Fase 4 - Conclusão da fase 3

Passemos um traço sobre toda a linha não marcada e um traço sobre toda a coluna marcada. Encontramos assim as linhas e (ou) colunas em número mínimo que contêm todos os zeros enquadrados ou cortados.

No caso exposto vem

5	2	$\boxed{0}$	9	$\cancel{0}$	
$\boxed{0}$	3	10	8	6	X
2	$\cancel{0}$	5	$\boxed{0}$	3	X
$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	7	$\cancel{0}$	6	X
2	$\boxed{0}$	5	4	2	X
X	X		X		

Fase 5 - Deslocamento de certos zeros

Tomemos o número mais pequeno da matriz parcial cujos elementos não são atravessados por nenhum traço. Subtraiamos este número aos elementos das colunas não atravessadas por um traço e adicionemo-lo aos das linhas atravessadas por um traço.

Neste exemplo, vê-se que o número 2 deve ser subtraído às colunas 3 e 5 e adicionado à linha 1. Obtém-se

$$\left\{c_{ij}^{(2)}\right\} = $$

7	4	0	11	0
0	3	8	8	4
2	0	3	0	1
0	0	5	0	4
2	0	3	4	0

Fase 6 - Obtenção da solução óptima ou partida para novo ciclo

No novo quadro $\left\{c_{ij}^{(2)}\right\}$ obtido na fase 5 procuremos uma solução óptima, segundo o método da Fase 2. Se não se chega a uma solução óptima, continuam-se as operações 3, 4 e 5, e assim sucessivamente.

A solução óptima final pode não ser única. No exemplo dado, a partir do quadro $\left\{c_{ij}^{(2)}\right\}$, obtém-se a solução óptima

7	4	$\boxed{0}$	11	$\cancel{0}$
$\boxed{0}$	3	8	8	4
2	$\boxed{0}$	3	$\cancel{0}$	1
$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	5	$\boxed{0}$	4
2	$\cancel{0}$	3	4	$\boxed{0}$

que dá

$$c_{13}^{(2)} + c_{21}^{(2)} + c_{32}^{(2)} + c_{44}^{(2)} + c_{55}^{(2)} =$$

$$= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

e, voltando ao problema inicial,

$$\min.\ z = c_{13} + c_{21} + c_{32} + c_{44} + c_{55} =$$

$$= 7 + 7 + 6 + 6 + 6 = 32.$$

Quando se trata de um problema de afectação de soma máxima basta considerar a matriz dos elementos $c'_{ij} = C - c_{ij}$, sendo C um majorante de todos os c_{ij}, e procurar a afectação de soma mínima para a matriz $\{c'_{ij}\}$.

O problema do caixeiro-viajante a que alguns autores dão também o nome de problema do itinerário aparece em vários fenómenos de organização.

Dadas as cidades A, B,...N, e conhecendo as distâncias respectivas, ou ainda o custo de transporte de uma a outra, o problema consiste em achar o circuito mais económico partindo de A e regressando a A, passando por cada uma das cidades sem passar duas vezes pela mesma.

Formalmente, como se viu em 3.1, o problema consiste em achar uma permutação $(1, i_2, i_3,...i_n)$ dos números naturais $1,...n$ que minimize

$$z = c_{1i_2} + c_{i_2 i_3} + ... + c_{i_n 1}$$

onde os

$$c_{\alpha\beta} \quad (\alpha = 1, i_2, i_3...i_n \; ; \; \beta = i_2, i_3,...i_n, 1)$$

são números reais.

Se $c_{\alpha\beta} \neq c_{\beta\alpha}$ (problema não simétrico) há $(n - 1)!$ permutações possíveis; se $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}$ há $\frac{1}{2}(n - 1)!$ permutações possíveis.

Não existe actualmente nenhum método analítico que permita, no caso geral, obter a solução óptima do problema senão ensaiando todas as permutações possíveis, o que se torna pràticamente irrealizável para valores relativamente pequenos de n. Por exemplo, para 10 cidades, há (num problema simétrico) $\frac{1}{2}\,9! = 181440$ circuitos distintos e para 31 cidades mais de 10^{30} itinerários possíveis.

O problema do caixeiro-viajante é parecido com o problema de afectação porque, dada a matriz $\{c_{ij}\}$, a questão consiste em escolher um conjunto de $\underline{n}$ elementos, um e um só em cada linha, um e um só em cada coluna por forma a minimizar a soma dos elementos escolhidos; contudo, há duas restrições que tornam o problema do caixeiro-viajante mais difícil do que o de afectação: não se pode escolher um elemento na diagonal principal de $\{c_{ij}\}$ (o que se pode evitar fazendo $c_{ii} = \infty$) e a solução tem de ser cíclica(1).

Actualmente, o melhor processo para resolver o problema do caixeiro-viajante consiste em resolvê-lo como um problema de afectação, e, se a solução obtida não é cíclica, modificá-la por forma a obter a solução óptima ou uma solução próxima desta.

Considere-se, em primeiro lugar, o problema de achar o circuito de custo mínimo para um caixeiro-viajante que tem de visitar as cidades A, B, C e D sem passar duas vezes na mesma cidade, sabendo que a matriz $\{c_{ij}\}$ é

	A	B	C	D
A	∞	15	8	17
B	13	∞	21	11
C	12	10	∞	30
D	13	21	23	∞

Resolvendo-o como um problema de afectação, vem imediatamente a solução óptima pois $\{c_{ij}^{(1)}\}$ é

∞	7	$\boxed{0}$	9
2	∞	10	$\boxed{0}$
2	$\boxed{0}$	∞	20
$\boxed{0}$	8	10	∞

(1) - Por exemplo, a solução $x_{12} = x_{21} = x_{34} = x_{43} = 1$ para um problema de afectação 4 × 4 não é solução do problema do caixeiro-via-

e, portanto, o circuito óptimo é A C B D A, a que corresponde o custo 8 + 10 + 11 + 13 = 42.

Considere-se seguidamente o problema de achar o circuito de custo mínimo quando a matriz $\{c_{ij}\}$ é

	A	B	C	D	E
A	∞	2	5	7	1
B	6	∞	3	8	2
C	8	7	∞	4	7
D	12	4	6	∞	5
E	1	3	2	8	∞

Começando por tratar o problema como um problema de afectação, obtém-se para matriz $\{c_{ij}^{(1)}\}$:

	A	B	C	D	E	
A	∞	1	4	6	$\boxed{0}$	X
B	4	∞	1	6	$\cancel{0}$	X
C	4	3	∞	$\boxed{0}$	3	
D	8	$\boxed{0}$	2	∞	1	
E	$\boxed{0}$	2	1	7	∞	
					X	

e para matriz $\{c_{ij}^{(2)}\}$:

	A	B	C	D	E
A	∞	$\cancel{0}$	3	5	$\boxed{0}$
B	3	∞	$\boxed{0}$	5	$\cancel{0}$
C	4	3	∞	$\boxed{0}$	3
D	8	$\boxed{0}$	2	∞	1
E	$\boxed{0}$	2	1	7	∞

e obtém-se a solução óptima para o problema de afectação. Contudo não é uma solução do problema do caixeiro-viajante porque nos diz que se deve ir de A para E e voltar a A.

Examinemos $\{c_{ij}^{(2)}\}$ para procurarmos as soluções mais próximas da óptima para o problema de afectação, tentando achar uma que seja cíclica. O elemento mais pequeno de $\{c_{ij}^{(2)}\}$ é 1 e vamos ver qual é o efeito de pôr tal elemento na solução.

Tirando a linha 4 e a coluna 5, vem a matriz

	A	B	C	D
A	∞	$\boxed{0}$	3	5
B	3	∞	$\boxed{0}$	5
C	4	3	∞	$\boxed{0}$
E	$\boxed{0}$	2	1	7

que tem solução óptima para o problema de afectação. Então uma solução mais próxima da óptima para o problema de afectação é

	A	B	C	D	E
A	∞	$\boxed{0}$	3	5	0
B	3	∞	$\boxed{0}$	5	0
C	4	3	∞	$\boxed{0}$	3
D	8	0	2	∞	$\boxed{1}$
E	$\boxed{0}$	2	1	7	∞

Fàcilmente se vê que é cíclica (A B C D E A) e o correspondente custo total é 2 + 3 + 4 + 5 + 1 = 15.

Outra solução vizinha da óptima obtém-se incluindo o elemento <u>1</u> que está na linha 5 e coluna 3. Tirando estas filas, vem a matriz

	A	B	D	E
A	∞	$\cancel{0}$	5	$\cancel{0}$
B	3	∞	5	$\boxed{0}$
C	4	3	$\boxed{0}$	3
D	8	$\boxed{0}$	∞	1

que não tem solução para o problema de afectação entre os zeros. E portanto a solução do problema de afectação em que intervier o elemento 1 da linha 5 e da coluna 3 dará um custo total superior a 15.

3.4. PROGRAMAÇÃO LINEAR ESTOCÁSTICA

Em virtude das dificuldades que o estudo da programação linear estocástica envolve daremos apenas um ligeiro apontamento sobre este assunto. Vejamos.

Se se pretende minimizar (1)

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j$$

com as restrições

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i \qquad (i = 1,\ldots m)$$

$$x_j \geq 0$$

sendo c_j, a_{ij} e b_i variáveis aleatórias, tem-se um problema de

(1) - Considera-se aqui a minimização para poder tratar simultâneamente dos dois tipos de programação estocástica.

programação linear estocástica. Nestas circunstâncias, o mínimo da função objectivo é também uma variável aleatória. E natural então tentar determinar a sua distribuição, tarefa que é complicada pelo facto de o conjunto de variáveis básicas que minimizam a função objectivo serem dependentes dos valores dos coeficientes.

Aos problemas de programação linear estocástica em que se pretende determinar a distribuição do valor óptimo da função objectivo ou os seus parâmetros dá-se o nome de problemas de distribuição.

Outras aplicações práticas conduzem a problemas de tipo diferente que são conhecidos por problemas de valor esperado.

Se os coeficientes nas restrições são variáveis aleatórias, é natural esperar que as equações não possam ser satisfeitas precisamente. Mas podemos incorporar qualquer diferença entre os dois membros na função objectivo, minimizando a soma desta com o valor esperado dessas diferenças.

3.5. PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR

No caso em que a função objectivo ou as restrições não são lineares a programação diz-se não linear.

Vamos agora referir-nos a um dos casos mais simples da programação não linear - a programação quadrática. Trata-se da minimização de uma expressão quadrática convexa ou da maximização de uma expressão quadrática côncava, supondo que as restrições são lineares.

Vejamos prèviamente algumas definições. Uma função $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ diz-se convexa se para qualquer par de pontos $(x_1', x_2', \ldots x_n')$ e $(x_1'', x_2'', \ldots x_n'')$ e $0 < t < 1$, vem

$$1) \quad f\left[t\, x_1' + (1-t)\, x_1'', \ldots t\, x_n' + (1-t)\, x_n''\right] \leq t\, f\, (x_1', \ldots x_n') + (1-t)\, f\, (x_1'', \ldots x_n'').$$

A função diz-se convexa em sentido restrito se, para aqueles valores de t, o sinal $\leqq$ pode ser substituído por $<$. Um função diz-se côncava, ou côncava em sentido restrito, respectivamente, se o sinal da desigualdade 1) é $\geqq$ ou $>$. É claro que, sendo $f\ (x_1, x_2, \ldots n)$ convexa, é $-f\ (x_1, x_2, \ldots n)$ côncava e assim o problema da minimização de uma função convexa equivale ao da maximização de uma função côncava.

Uma forma quadrática com n variáveis é dada por

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j \qquad (a_{ij} = a_{ji}).$$

A matriz $\{a_{ij}\}$ é a matriz da forma quadrática e é fácil verificar que $a_{ij} = \frac{1}{2} f''_{x_i x_j}$. Uma forma quadrática diz-se definida positiva (negativa) se é positiva (negativa) para todos os valores reais das variáveis não todos nulos; diz-se semidefinida positiva (negativa) se é não negativa (não positiva) para todos os valores reais das variáveis, isto é, pode anular-se para valores não simultâneamente nulos das variáveis.

Mostra-se que uma forma semidefinida positiva (definida positiva) é convexa (convexa em sentido restrito); anàlogamente, uma forma semidefinida negativa (definida negativa) é côncacava (côncava em sentido restrito).

Considere-se então o problema de minimizar a função quadrática convexa

$$f\ (x_1, x_2, \ldots x_n) = c_o + c_1\, x_1 + \ldots + c_n\, x_n +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j$$

sujeita às restrições lineares

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, x_i = b_i \qquad (i = 1,\ 2, \ldots m).$$

$$x_j \geqq 0 \quad (j = 1, \ldots n)$$

É fácil ver que $f(x_1,\ x_2, \ldots x_n)$ se pode escrever na forma

$$= c_o + (c_1\, x_1 + \ldots + c_n\, x_n) + \frac{1}{2}\,(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}).$$

O método de Beale, que descreveremos seguidamente, tem muitas semelhanças com o método do simplex para a programação linear. O processo para achar uma solução admissível básica é o mesmo porque as restrições são lineares. Vamos admitir, sem perca de generalidade, que se encontrou uma solução admissível básica (m variáveis básicas positivas e $n-m$ variáveis não básicas nulas). Como mais adiante introduziremos novas variáveis não básicas u_k, que não são x x, designaremos por z_k uma variável não básica.

O processo começa por incrementar uma das variáveis não básicas até que um dos três casos seguintes se dê:

1. A função f começa a crescer. Isto acontece se $\partial f/\partial z_k$ se torna nula e depois positiva, onde z_k é a variável não básica para a qual $\left|\partial f/\partial z_k\right|$, entre todas as $\partial f/\partial z \leqq 0$, tem o maior valor no ponto inicial. É claro que na direcção de z_k, f decresce mais ràpidamente e portanto a variação ao longo de z_k conduz mais ràpidamente ao min. f .

2. Uma das restrições é violada quando z_k cresce.

3. Quando z_k cresce, uma das variáveis básicas, que originalmente

tinha um valor positivo, torna-se negativa, violando a condição $x_j \geqq 0$. Esta condição é essencialmente a mesma que (2).

Consoante o caso, introduz-se um novo conjunto de variáveis não básicas, segundo um processo que descreveremos adiante. Prosseguindo deste modo, atinge-se um ponto onde nenhuma variação posterior do valor de uma variável não básica produz decrescimento do valor de f. Como <u>f é convexa, o máximo absoluto é atingido.</u>

Seja x_i uma variável básica e z_j uma variável não básica. Então, usando as restrições lineares, pode escrever-se

$$1)\quad x_i = \alpha_{io} + \sum_{j=1}^{n-m} \alpha_{ij} z_j \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

onde $z_j = x_{m+j}$. A função f também se pode exprimir em termos das variáveis não básicas substituindo as variáveis x_i de acordo com as expressões 1):

$$2)\quad f = \sum_{i=0}^{n-m} \sum_{j=0}^{n-m} \beta_{ij} z_i z_j$$

onde $z_o = 1$ e $z_1, \ldots z_m$ são as variáveis não básicas. Se $\partial f / \partial z_k < 0$ para qualquer <u>k</u> $(k = 1, \ldots n-m)$, então um pequeno aumento de z_k com $z_i = 0$ $(i \neq k)$ reduzirá f. É claro que é conveniente aumentar z_k até que (1) algum x_k se anule e decresça para valores negativos ou (2) $\partial f / \partial z_k$ se anule e passe a tomar valores positivos. No caso (1), o conjunto de variáveis não básicas é mudado, substituindo x_k por z_k, e exprime-se f em termos das novas variáveis não básicas; no caso (2), como $\partial f / \partial z_k$ é uma função linear dos z_j, introduz-se $u_k = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial z_k}$ como variável não básica. Esta u_k é semelhante a qualquer outra variável não básica, excepto que u_k pode tomar valores positivos e negativos (por esse facto é u_k uma <u>variável livre</u>).

Enfim, as fases do algoritmo são as seguintes:

Fase 1 - Acha-se uma solução admissível básica.

Fase 2 - Exprime-se f em termos das variáveis não básicas.

Fase 3 - Calcula-se $\partial f/\partial z_k$ $(k = 1,\dots n-m)$ e escolhe-se z_k por forma que $\left|\partial f/\partial z_k\right|$ é o maior entre todos os k para para os quais $\partial f/\partial z_k < 0$.

Fase 4 - Demos três condições para o acréscimo de z_k que vamos agora aplicar. Resolve-se em ordem a z_k a equação $\partial f/\partial z_k = 0$, que é linear em z_k e portanto conduz a um só valor de z_k, mantendo nulas as outras variáveis não básicas. Resolve-se também em ordem a z_k cada uma das equações

$$3)\quad x_i = \alpha_{io} + \sum_{j=1}^{n-m} \alpha_{ij}\, z_j,$$

onde $z_j = 0$ $(j \neq k)$ e $x_i = 0$.

Comparam-se os diferentes valores de z_k obtidos destes cálculos. Seja z_{k_o} o menor de todos. Segue-se a Fase 5a se z_{k_o} não se obtém das equações 3); caso contrário segue-se a Fase 5b.

Fase 5a - Põe-se $u_k = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z_k}$ e resolve-se em ordem a z_k (esta expressão é linear em z_k). Substitui-se depois z_k por essa expressão. Note-se que nesta fase $u_k = 0$ porque $\partial f/\partial z_k = 0$.

Fase 5b - Tendo-se determinado z_{k_o} como o menor dos valores correspondentes a uma certa equação em 3), substitui-se z_k em f pelo x_i nessa equação e obtém-se uma nova expressão para f nas variáveis não básicas. Note-se que, nesta fase, z_k é básica e igual a $-\alpha_{io}/\alpha_{ik}$.

Fase 6 - Calcula-se $\partial f/\partial z_k$, onde z_k é qualquer variável não básica. Calcula-se $|\partial f/\partial z_k|$ para todos os z_k tais que $\partial f/\partial z_k < 0$ ou $z_k = u_k$.

Distinguem-se dois casos:

Caso 1: Se $\partial f/\partial z_k$ é máximo para $z_k = u_k$, então u_k deve decrescer ou crescer consoante $\partial f/\partial u_k$ é positiva ou negativa e segue-se a fase 5 usando a nova solução admissível com o mínimo valor de z_k acabado de calcular.

Caso 2: Se z_k não é u_k, então retoma-se a fase 4. O algoritmo termina quando a variação de qualquer variável não básica já não produz uma diminuição do valor de f.

Exemplo:

$$\text{minimizar } f = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 + 5$$

com as restrições

$$x_1 + x_2 \leqq 2$$

$$x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0.$$

Tomando a variável auxiliar $x_3 \geqq 0$, a desigualdade transforma-se na equação $x_1 + x_2 + x_3 = 2$. Uma solução básica imediata é $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 2$. Tem-se

$$x_3 = 2 - x_1 - x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 - 4 \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{\substack{x_1 = 0\\ x_2 = 0\\ x_3 = 2}} = -4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 - 2 \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{\substack{x_1 = 0\\ x_2 = 0\\ x_3 = 2}} = -2$$

e portanto devemos aumentar a variável não básica x_1.

Tomando $x_3 = 2 - x_1 - x_2$, vem $0 = 2 - x_1$ ou $x_1 = 2$; de $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$ vem também $x_1 = 2$. Como os valores são iguais, tome-se, por exemplo, a equação $x_3 = 2 - x_1 - x_2$ e resolvamo-la em ordem a x_1, nova variável básica,

$$x_1 = 2 - x_2 - x_3$$

e façamos a substituição em f. Vem

$$f = 2x_2^{\,2} + x_3^{\,2} + 2x_2\, x_3 - 2x_2 + 1.$$

Tem-se agora

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 4x_2 + 2x_3 - 2 \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{\substack{x_2 = 0\\ x_3 = 0}} = -2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 2x_3 + 2x_2 \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)_{\substack{x_2 = 0\\ x_3 = 0}} = 0$$

e portanto devemos aumentar x_2. Como de

$$x_1 = 2 - x_2 - x_3$$

vem

$$0 = 2 - x_2 - 0,$$

ou

$$x_2 = 2,$$

e de

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$$

vem $$4x_2 + 0 - 2 = 0,$$

ou

$$x_2 = \frac{1}{2},$$

a variável x_2 só poderá aumentar até 1/2. Fazendo

$$u_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 + x_3 - 1,$$

vem

$$x_2 = \frac{u_1}{2} - \frac{x_3}{2} + \frac{1}{2}$$

e $$f = \frac{u_1^2}{2} + \frac{x_3^2}{2} + x_3 + \frac{1}{2} .$$

Agora

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_3 + 1 \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)_{\substack{x_3 = 0 \\ u_1 = 0}} = 1 > 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = u_1 \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)_{\substack{x_3 = 0 \\ u_1 = 0}} = 0$$

e portanto nenhuma variação em x_3 ou u_1 produz decrescimento em f e alcançámos o mínimo.

Portanto $x_3 = 0$, $x_2 = 1/2$, $x_1 = 3/2$ e o mínimo é $f = 1/2$.

3.6. PROGRAMAÇÃO DINÂMICA

A programação dinâmica é uma técnica matemática moderna que permite resolver alguns problemas de decisão correntes em investigação operacional.

Nos processos de decisão em estádios múltiplos, isto é, processos em que tem de se fazer uma sucessão de escolhas - cada uma destas entre duas ou mais possibilidades - pode acontecer que a política óptima - política mais desejável de acordo com um critério predeterminado - seja obtida considerando, separadamente, os efeitos de cada decisão; em certos casos, porém, a política óptima não pode conseguir-se desta maneira. Um exemplo simples aclarará esta ideia:

Admitamos que se pretende determinar o caminho entre as linhas verticiais OA e CB (Fig. 9) tal que a soma dos números que figuram ao longo do caminho seja mínima.

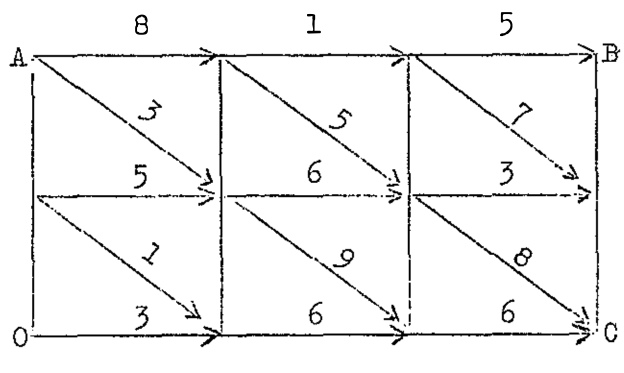

Fig. 9

Estamos perante um problema de decisão com três estádios. Fazendo corresponder ao vértice no canto inferior esquerdo a origem de um sistema de eixos coordenados rectangulares e supondo que a política óptima se obtinha considerando separadamente os efeitos de cada decisão, é evidente que se partiria de $(0,1)$ para $(1,0)$ (decisão óptima no primeiro estádio) e depois para $(2,0)$ e $(3,0)$, atingindo-se a soma 13.

Ora vê-se fàcilmente que esta não é a solução do problema. O caminho mínimo é (0,2) - (1,1) - (2,1) - 3,1), com soma igual a 12.

A solução correcta deste problema - e a de outros problemas de decisão em estádios múltiplos em que a política óptima não pode obter-se considerando separadamente os efeitos de cada decisão - pode atingir-se por meio dos métodos da programação dinâmica. No entanto, deve frizar-se que nem todos os processos de decisão em estádios múltiplos podem ser resolvidos pela programação dinâmica assim como nem todos os problemas de programação dinâmica são processos de decisão em estádios múltiplos.

Toda a teoria da programação dinâmica assenta no princípio da optimização de Bellman que se enuncia nos seguintes termos: Uma política óptima possui a propriedade de, qualquer que seja o estado inicial e a decisão inicial, as restantes decisões deverem constituir uma política óptima em relação ao estado resultante da primeira decisão.

Se designarmos por:

$f_n\ (x)$ - o resultado de um processo com o n estádios que parte do estado x quando se adopta uma política óptima;

P - o conjunto de políticas admissíveis;

$r_n\ (x,p)$ - o resultado do primeiro estádio de um processo n-dimensional que parte do estado x quando se toma uma decisão $p \in P$;

$x'\ (n,x,p)$ - o novo estado resultante da decisão p;

então

$$1)\ f_n\ (x) = \max_{p\ P} \left\{ r_n\ (x,p) + f_{n-1} \left[x'\ (n,x,p) \right] \right\},$$

equação funcional que traduz o princípio da optimização.

A resolução deste novo tipo de equações funcionais envolve problemas complexos que constituem hoje campo fecundo de investigação.

Vamos ver, por exemplo, como é que o problema do caminho mínimo pode ser resolvido por meio da programação dinâmica.

Designemos por f (i,j) a soma mínima, partindo do ponto (i,j) e utilizando um caminho óptimo para a linha CB. Neste caso, o princípio da optimização traduz-se do modo seguinte:

$$2)\ f\ (i,j) = \min \begin{bmatrix} n\ (i,j;\ i+1,j) + f\ (i+1,j) \\ n\ (i,j;\ i+1,j-1) + f(i+1,j-1) \end{bmatrix}$$

onde n (i,j; k,l) é o número no segmento de recta que une (i,j) com (k,l) e n (i,j; k,l) = ∞ para i,j,k ou l < 0. Esta última condição torna desnecessário tratar do eixo dos ~~xx~~ onde não é possível tomar uma decisão "para baixo".

Vê-se fàcilmente que f (3,j) = 0 e este facto permite calcular imediatamente f (2,j), utilizando 2). Com efeito,

$$f\ (2,0) = \min \begin{bmatrix} 6 + 0 \\ \infty + 0 \end{bmatrix} = 6$$

$$f\ (2,1) = \min \begin{bmatrix} 3 + 0 \\ 8 + 0 \end{bmatrix} = 3$$

$$f\ (2,2) = \min \begin{bmatrix} 5 + 0 \\ 7 + 0 \end{bmatrix} = 5.$$

Em seguida, usam-se os valores de f (2,j) para calcular f (1,j), empregando a mesma equação funcional:

$$f\ (1,0) = \min \begin{bmatrix} 6 + 6 \\ \infty \end{bmatrix} = 12$$

$$f\ (1,1) = \min \begin{bmatrix} 6 + 3 \\ 9 + 6 \end{bmatrix} = 9$$

$$f\ (1,2) = \min \begin{bmatrix} 1 + 5 \\ 5 + 3 \end{bmatrix} = 6.$$

Finalmente,

$$f\ (0,0) = \min \begin{bmatrix} 3 + 12 \\ \infty \end{bmatrix} = 15$$

$$f\ (0,1) = \min \begin{bmatrix} 5 + 9 \\ 1 + 12 \end{bmatrix} = 13$$

$$f\ (0,2) = \min \begin{bmatrix} 8 + 6 \\ 3 + 9 \end{bmatrix} = 12.$$

Está pois justificado que o caminho mínimo começa em (0,2) e tem a soma 12.

Considere-se em seguida o problema muito frequente em investigação operacional de maximizar

$$3)\ f\ (x_1,\ x_2,\ldots x_n) = \sum_{i=1}^{n} g_i\ (x_i)$$

sujeita às restrições

$$4)\quad \sum_{i=1}^{n} x_i = x$$

$$5)\quad x_i \geqq 0.$$

Em certas condições, a análise clássica pode ser utilizada para resolver o problema. Usando a técnica dos multiplicadores de Lagrange, forma-se a função auxiliar

$$F\ (x_1,\ x_2,\ldots x_n) = \sum_{i=1}^{n} g_i\ (x_i) - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i$$

e, igualando a zero as derivadas parciais, obtêm-se as equações

$$6) \quad g'(x_i) - \lambda = 0 \qquad (i = 1,\ldots n)$$

que dão

$$x_i = h_i(\lambda) \qquad (i = 1,\ldots n)$$

A determinação de λ faz-se por meio da restrição

$$\sum_{i=1}^{n} h_i(\lambda) = x.$$

Infelizmente, os problemas que surgem na prática raramente podem ser tratados pelos métodos clássicos. As principais dificuldades que se encontram quando se aplicam estes métodos são as seguintes:

a) Extremos relativos

Sabe-se que o anulamento das derivadas num ponto interior é apenas uma condição necessária para a existência de um extremo relativo. O estudo das condições suficientes, geralmente fácil para as funções de uma variável, torna-se deveras complicado para funções de muitas variáveis.

Se, por exemplo, cada uma das equações em 6) tem duas raízes, como não se sabe a priori que raíz corresponde ao máximo absoluto, deverão considerar-se todas as combinações de valores (2^n casos).

b) Restrições

É vulgar encontrar nas aplicações certos tipos de restrições, como por exemplo $a_i \leqq x_i \leqq b_i$, que muitas vezes implicam a existência de extremos na fronteira e sabemos bem quanto é difícil a determinação de extremos na fronteira para funções de muitas variáveis.

c) Optimização sobre conjuntos discretos

Os instrumentos clássicos para a resolução de problemas de optimização pressupõem a variação contínua das variáveis independentes.

Embora por meio de artifícios se possa introduzir, em certos casos, a variação contínua, a optimização sobre conjuntos discretos de valores exige novos instrumentos.

d) Linearidade

Quando a função objectivo e as restrições são lineares, a existência de derivadas não tem qualquer utilidade porque os extremos estão na fronteira.

Neste caso (programação linear) existem já técnicas que permitem resolver o problema.

e) Funções não deriváveis

A não existência de derivada em certos pontos prejudica a utilização da análise clássica na pesquisa dos extremos.

f) Estabilidade

Considerem-se duas funções $g(x)$ e $h(x)$ representadas geomètricamente nas figs. 10 e 11. Suponhamos que $h(x)$ é uma função empírica. A significação da fig. 11 é óbvia: se $h(x)$ é determinada experimentalmente

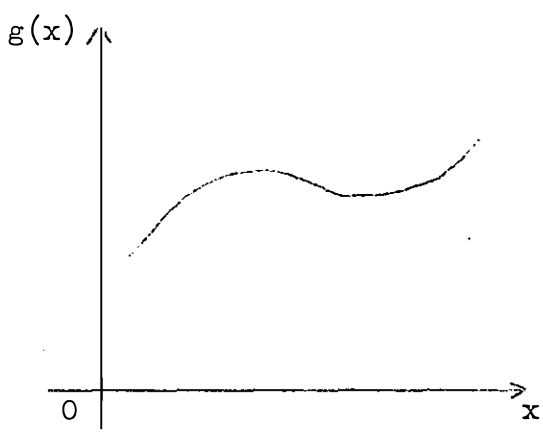

Fig. 10

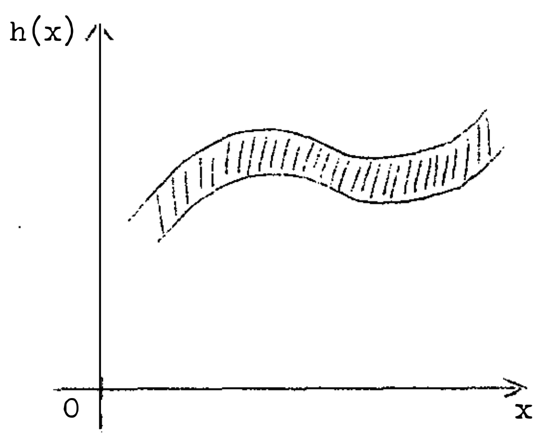

Fig. 11

por meio de medições, é evidente que o seu valor para cada x não é um número $h(x)$ mas sim uma distribuição de valores. Consequentemente, embora se possa atribuir um valor a $h(x)$ com elevada probabilidade de ser correcto, é pouco justificável atribuir-lhe uma certa direcção num ponto particular. Assim, será prudente pôr de parte todas as técnicas de optimização que requeiram diferenciação. Deveremos sim utilizar um método em que o erro final não seja mais importante do que os erros nos dados iniciais. Este princípio é o que se entende por estabilidade, a qual é hoje um dos objectos de estudo da análise numérica.

A programação dinâmica deve o seu aparecimento, em grande parte, à necessidade de se vencer as dificuldades supracitadas nos problemas de optimização. Não se pode dizer que esse objectivo tenha sido completamente alcançado mas os resultados até hoje obtidos são de molde a considerar a programação dinâmica como uma técnica válida e fecunda para a resolução de numerosos problemas.

Vejamos, para finalizar, como se pode utilizar a programação dinâmica para maximizar 3) sujeita às restrições 4) e 5).

Em vez de considerarmos n e x fixos, tomemo-los variáveis. Como o máximo de $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ na região designada depende de x e n, introduzamos a sucessão de funções $f_n(x)$ definidas para $n = 1, 2, \ldots, x \geqq 0$:

$$f_n(x) = \max_{\{x_i\}} f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

onde $x_i \geqq 0$ e $\sum_1^n x_i = x$.

É evidente que

$$f_n(0) = \sum_{i=1}^{n} g_i(0), \quad n = 1,2,\ldots$$

e

7) $f_1(x) = g_1(x)$ para $x \geqq 0$.

Vejamos agora como obter a relação de recorrência que liga $f_n(x)$ e $f_{n-1}(x)$.

Tome-se a "decisão inicial" de atribuir o valor x_n^* $(0 \leqq x_n^* \leqq x)$ a x_n. É claro que as variáveis $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ terão de satisfazer à relação.

$$8) \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} = x - x_n^*$$

e, de acordo com o princípio da optimização de Bellman, as restantes decisões (os valores a atribuir a $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$) deverão constituir uma política óptima, isto é, teremos de determinar os valores de $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ que maximizam

$$g_1\,(x_1) + g_2\,(x_2) + \ldots + g_{n-1}\,(x_{n-1})$$

sujeita à restrição 8). Por definição, o máximo será $f_{n-1}(x-x_n^*)$ e portanto a atribuição do valor x_n^* a x_n dará

$$g_n\,(x_n^*) + f_{n-1}\,(x-x_n^*).$$

É evidente que a escolha óptima de x_n^* deve recaír sobre o valor de x_n que maximiza a função

$$g_n\,(x_n) + f_{n-1}\,(x-x_n)$$

e assim

$$9.) \quad f_n\,(x) = \max_{0 \leqq x_n \leqq x} \left[g_n\,(x_n) + f_{n-1}\,(x-x_n) \right],$$

que é a equação funcional pretendida.

Partindo de $f_1(x)$, determinada por 7), utiliza-se 9) para calcular $f_2(x)$, $f_3(x)$,... Em cada passo determina-se não só $f_k(x)$

mas também $x_k(x)$, isto é, o valor de x_k que maximiza

$g_k(x_k) + f_{k-1}(x-x_k)$.

A solução consiste pois na sucessão de funções $f_n(x)$ e $x_n(x)$ para $x \geqq 0$ e $n = 1, 2, \ldots$. Utilizam-se presentemente métodos de cálculo numérico que podem se programados para um computador electrónico.

O exemplo apresentado serve ainda para evidenciar que em vez de se resolver o problema da maximização para um valor particular de $\underline{x}$ e um valor particular de $\underline{n}$, resolveu-se o problema geral envolvendo valores arbitrários de $\underline{x}$ e $\underline{n}$. Por outro lado, o problema da maximização de uma função de $\underline{n}$ variáveis foi reduzido a uma sucessão de $\underline{n}$ maximizações de funções de uma variável.