António Gouveia Portela

Seminário sobre a **FORMA**

ELEMENTOS PARA ORIENTAR UMA DISCUSSÃO

CENTRO DE CIÊNCIAS DA COMPLEXIDADE

MAIO DE 1997

Departamento de Informática

CENTRO DE CIÊNCIAS
DA
COMPLEXIDADE

CICLO DE SEMINÁRIOS SOBRE A FORMA

Introdução ao tema pelo Prof. Gouveia Portela (UTL)

terças-feiras às 10h00 na sala 3.1.5 (Bloco C3 da FCUL)

coordenação do Prof. Helder Coelho

No fim do século XX a trindade económica de referência terra-trabalho- capital está a ser substituída (por informação- tecnologia-comunicação) o que corresponde de facto à emergência de uma economia cada vez mais apoiada na informação. No entanto, embora enraizada de modo crescente na sociedade, esta constatação não foi acompanhada pela total clarificação sobre o verdadeiro significado de informação, o seu valor e natureza.

1º TEMA: LINGUAGEM (6 e 20 de Maio de 1997)

Comentador: Prof. Isabel Faria (FLUL)

Relator: Luís Isabelinha (FCUL)

2º TEMA: PARTIÇÃO (27 de Maio e 3 de Junho de 1997)

Comentador: Prof. António Amorim Barbosa (FCUL)

Relator: Mário Santos (FCUL)

3º TEMA: COMPLEXIDADE (17 e 24 de Junho de 1997)

Comentador: Prof. Sousa Ramos (ISTUTL)

Relator: Ricardo Barbosa (FCUL)

Apoio da Fundação Calouste Gulbenkian

António Gouveia Portela

Seminário sobre a **FORMA**

ELEMENTOS PARA ORIENTAR UMA DISCUSSÃO

CENTRO DE CIÊNCIAS DA COMPLEXIDADE

MAIO DE 1997

Departamento de Informática

CENTRO DE CIÊNCIAS
DA
COMPLEXIDADE

CICLO DE SEMINÁRIOS SOBRE A FORMA

Introdução ao tema pelo Prof. Gouveia Portela (UTL)

terças-feiras às 10h00 na sala 3.1.5 (Bloco C3 da FCUL)

coordenação do Prof. Helder Coelho

No fim do século XX a trindade económica de referência terra-trabalho- capital está a ser substituída (por informação- tecnologia-comunicação) o que corresponde de facto à emergência de uma economia cada vez mais apoiada na informação. No entanto, embora enraizada de modo crescente na sociedade, esta constatação não foi acompanhada pela total clarificação sobre o verdadeiro significado de informação, o seu valor e natureza.

1º TEMA: LINGUAGEM (6 e 20 de Maio de 1997)

Comentador: Prof. Isabel Faria (FLUL)

Relator: Luis Isabelinha (FCUL)

2º TEMA: PARTIÇÃO (27 de Maio e 3 de Junho de 1997)

Comentador: Prof. António Amorim Barbosa (FCUL)

Relator: Mário Santos (FCUL)

3º TEMA: COMPLEXIDADE (17 e 24 de Junho de 1997)

Comentador: Prof. Sousa Ramos (ISTUTL)

Relator: Ricardo Barbosa (FCUL)

Apoio da Fundação Calouste Gulbenkian

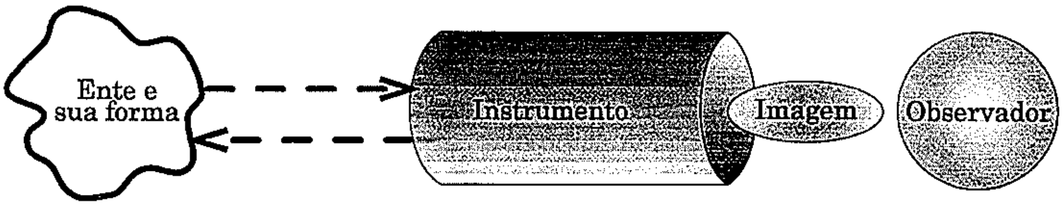
ÍNDICE

A — LINGUAGENS

A1 — OBSERVAÇÃO E ATRIBUTOS DE FORMAS

A1.1 — SIMBOLOGIA E SEMÂNTICA

A1.1.1 — Definições em meta-linguagem (glossário)



'Ente'

Coisa qualquer real ou não.

'Forma'

Um 'ente' tem 'forma'. Uma 'forma' pode ser descrita em várias linguagens.

'Observação'

Uma interacção, em geral não simétrica entre dois 'entes'. Pode assimilar-se a uma correspondência, partindo dum 1° 'ente' para chegar a um 2° 'ente'.

'Objecto'

É o 1° 'ente', o que está em 'observação' .

'Instrumento'

É o 2° 'ente' que, numa observação, determina a 'natureza' da interacção com o 'objecto' e que configura uma relação que tem por 1° membro o que resulta da interacção com o 'objecto' e 2° membro a 'imagem' do 'objecto' ou simplesmente 'imagem'. O 'instrumento' pode ser real ou virtual, com ou sem vida e são inumeráveis. A 'natureza' da interacção vai permitir ao 'instrumento' observar no 'objecto' as 'formas' que quer ou foi construido para querer. A segunda função do 'instrumento' é preparar as 'formas' observadas e descrevê-las numa linguagem adequada .

'Observador'

O destinatário da 'imagem'. É pressuposto fundamental que o 'observador' entenda a 'linguagem' em que a 'imagem' vem descrita.

'Atributo'

As 'formas' têm 'atributos' ou propriedades que se revelam por meio dos 'instrumentos'. Os 'atributos' dum 'objecto' estão em correspondência com as 'imagens' produzidas pelos 'instrumentos', reais ou virtuais. Os 'atributos' são classificados de modo a corresponderem a conceitos científicos e se susceptíveis de 'observação experimental', a classes instrumentais reais. Formalmente, os 'atributos' configuram relações cujos domínios são conjuntos de 'formas' de 'objectos' e tomam valores em conjuntos munidos de alguma estrutura. São correntes as estruturas: grupos (aditivos em geral), anéis, corpos, reticulados, etc. O 'atributo' e a correspondente 'imagem' dependem não só do 'objecto' em observação mas também do 'instrumento'. O número de 'imagens' dum dado objecto é ilimitado porque o número de 'instrumentos' também o é.

'Classes instrumentais e de atributos'

A ciência tem tido o cuidado de distinguir entre o conceito abstracto de 'atributo' e o de 'imagem' produzida por um dado 'instrumento'. A 'observação' experimental entende-se como uma realização prática, tendo por finalidade obter uma boa aproximação do valor dum dado 'atributo'. Daqui resultou a necessidade de criar uma taxonomia de 'instrumentos' em correspondência com a taxonomia dos 'atributos.

'Lista de Índices'

- ? ?? não especificados ou genéricos
- >, >> relações de ordem
- +, * conectivas, aditiva e multiplicativa
- i,j,k identificadores de "formas"
- p,q,r identificadores de 'atributos' de "formas"
- u,v,w identificadores de conjuntos estruturados

A1.1.2 — Conjuntos estruturados usados em Imagens

O_v Conjunto com alguma estrutura, exemplos de tipos:

$O_1 = \{U_0: >\}$ $O_2 = \{U_0: +,>\}$ $O_3 = \{U_0: +,*,>\}$,

onde U_0 é o conjunto 'universal', e.g.:

- Com n elementos e n em [2..N] e N numerável.
- Intervalos dos reais, etc..

O_{vw} Elemento de índice w de O_v.

ML_b Múltiplo ordenado de elementos de tipo O_v, podendo ou não serem todos do mesmo tipo v. O índice b define o múltiplo.

$ML_b(x)$ Simboliza o elemento de ordem x de ML_b. Se $x \neq y$ então $ML_b(x)$ e $ML_b(y)$ são, em geral, de tipos diferentes.

A1.1.3 — Objectos, Instrumentos de Observação e Imagens.

OBJ O que se 'observa'. Todo objecto tem 'forma'.

INS 'Instrumento' de observação.

IMG 'Imagem' da 'forma' do 'objecto', OBJ, obtida com o 'instrumento', INS.

ATR 'Atributos' ou propriedades das 'formas' dos 'objectos'.

A1.1.4 — Formas

U_FRM Conjunto Universal das 'formas'

UFRM? Um subconjunto de U_FRM

$FRM_{k?}$ Uma 'forma' genérica de $UFRM_k$

FRM_{kR} A 'forma' dum dado 'objecto' escolhida para "forma" referencial

FRM_{kx} Uma qualquer "forma" que o 'objecto' possa ter

FRM_{ke} 'Enformação' realizada sobre um 'objecto' cuja 'forma' inicial era FRM_{kr} e a final é FRM_{kx}

A1.1.5 — Funcionais de Formas ou Atributos

U_ATR O conjunto universal das funcionais cujos domínios são as 'formas' de U_FRM e que tomam valores em conjuntos munidos de uma estrutura.

UATR? Um sub-conjunto de U_ATR.

ATR_{pq} Uma funcional genérica de $UATR_p$, onde ATR_{pq} pertence a $UATR_p$ e q simboliza a funcional, (v. **A1.2**).

ML_{vp} Múltiplo ordenado de elementos de O_v e onde p está em correspondência com a funcional ATR_p, (v. **A1.3**).

A1.1.6 — Proximidades

PRX Proximidade, uma funcional que tem por domínio um subconjunto de U_A e que toma valores num conjunto O_v, em geral dos tipos O_2, O_3, (v. **A1.1.2**).

A1.1.7 — Comentários à simbologia e interpretação

A1.1.7.1 Sendo FRM_{ij} a 'forma' j do conjunto $UFRM_i$ e ATR_{pq} um 'atributo' do conjunto de atributos $UATR_p$ que têm por domínio $UFRM_i$ então será: $ATR_{pq}(FRM_{ij}) = O_{vw}$, onde O_v é, por exemplo, um reticulado.

O_{vw} será a 'imagem' $IMG_{pq:ij}$ da 'forma' FRM_{ij}, correspondente ao 'atributo' ATR_{pq}. As funcionais de "formas", membros de U_A, podem ser interpretadas como 'imagens' ou 'atributos' dessas "formas". Como um 'atributo' ou 'imagem' dependem não só do 'objecto' em observação mas também do 'instrumento' que o 'observador' utiliza, o número de 'imagens' é ilimitado porque o número de 'instrumentos' tambem o é.

A1.1.7.2 Em cada situação de 'observação' há que definir dois conjuntos universais, o das 'formas' dos 'objectos' em observação, $UFRM_i$ e o dos 'atributos' a observar, $UATR_p$. O número N de atributos é, em geral, finito e então será N finito o Cardinal($UATR_p$). A cada 'objecto' j, vão corresponder N 'atributos' ou 'imagens', $IMG_{pq:ij}$, que, em conjunto, podem ser representadas por um N-múltiplo ordenado $ML_b(x)$ e x em 1..N. A cada x, ordem do índice em ML_b, corresponde um p, índice de 'atributo' em ATR_p e a cada p corresponde um v, índice de O, onde O_v é o conjunto do tipo O onde ATR_p toma valores. Os vv são diferentes, em geral, mas, por motivos de processamento da informação procura-se 'acamar' os vv menos estruturados em espaços mais estruturados, e.g.: os inteiros nos reais, reticulados com conjuntos universais finitos em inteiros, etc.. O principal inconveniente é conferir a esses vv, assim traduzidos, propriedades que na realidade não têm. A principal vantagem de os vv serem todos iguais, é facilitar a definição duma métrica no espaço-produto.

A1.1.7.3 As proximidades PRX, podem descrever também um afastamento ou até uma distância. Para o efeito será necessário dotar duma métrica o domínio de PRX, porque este domínio é uma multiplicidade ou seja um produto cartesiano munido de uma relação de ordem estrita, mas desprovido de métrica. A legitimidade experimental ou semântica deverá ser acautelada para evitar conferir propriedades ao modelo formal que não são 'reais'.

A1.2 — DEFINIÇÕES DE TIPOS

A1.2.1 — Funcional 'Descriminante'

São dados :

- um conjunto universal de 'formas', $UFRM_k$, cujo cardinal é maior ou igual a 2 .
- vários conjuntos tipo O_v.
- um conjunto universal mas finito de 'atributos', $UATR_p$, cujo cardinal é N e N>=2, dominio é $UFRM_k$ e toma valores em conjuntos do tipo O_v.
- uma correspondência R(p)>>v.

Def 1 **Funcional 'descriminante'**
A funcional ATR_{pq}, membro do conjunto $UATR_p$, diz-se uma funcional *descriminante* do conjunto de 'formas', $UFRM_k$, se em $UFRM_k$ existir, pelo menos, um par de "formas", FRM_{k1} e FRM_{k2}, para as quais $ATR_{pq}(FRM_{k1})$ e $ATR_{pq}(FRM_{k2})$ não são iguais.

Def 2 **Conjunto de funcionais 'descriminantes'**
O sub-conjunto de U_ATR, $UATR_p$, cujos membros são todos *funcionais 'descriminantes'* de $UFRM_k$.

Def 3 **Conjunto 'imagem'**
Conjunto 'imagem' é qualquer sub-conjunto de $UATR_p$ de *funcionais 'descriminantes'* de $UFRM_k$, com N membros e N finito. ML_b será o múltiplo correspondente.

Def 4 **Conjunto 'imagem' 'totalmente' descriminante**
Se os múltiplos ML_a e ML_b forem diferentes para qualquer par de elementos de $UFRM_k$, FRM_{k1} e FRM_{k2}, então $UATR_p$ é um conjunto de 'atributos' 'totalmente' descriminante de $UFRM_k$.

A1.2.2 — 'Formas' idênticas e equivalentes e erros

Seja $UATR_p$ um conjunto finito e 'totalmente' descriminante de $UFRM_k$, onde N é o Cardinal($UATR_p$) e N>=1. A 'identidade' ou 'equivalência de "formas" são conceitos definidos por meio dos 'atributos' de $UATR_p$. No conceito de 'equivalência', recorre-se ainda ao de 'proximidade', PRX, uma funcional que tem por domínio as imagens dos 'atributos' das "formas" e toma valores num conjunto do tipo O?.

Def 5 **Formas 'Idênticas'**
As "formas" FRM_{k1} e FRM_{k2} de $UFRM_k$, dizem-se 'idênticas' ou melhor 'ATR_p-idênticas', se for: $ATR_{pq}(FRM_{k1}) = ATR_{pq}(FRM_{k2})$, para todo o q em 1..N.

Def 6 **Formas 'Equivalentes'**
As "formas" FRM_{k1} e FRM_{k2}, de $UFRM_k$, dizem-se 'equivalentes', ou melhor 'ATR_{pq}-equivalentes', se for $PRX(ATR_{pq}(FRM_{k1}),ATR_{pq}(FRM_{k2}))<PR_{vq}$, para todo o i em 1..N. PR_{vq} é um elemento de O_v em correspondência com o atributo q.

Def 7 **'Erros' nas Formas**
Dadas duas "formas" FRM_{k1} e FRM_{k2} então o seu 'erro' ou 'afastamento' ou 'distância' será dado pelo múltiplo: $ERR_{pq}:k1k2=ATR_{pq}(FRM_{k1})-ATR_{pq}(FRM_{k2})$, com q em 1..N, e onde – é a relação inversa de +. Admite-se que o espaço é munido de uma conectiva aditiva, +, e que se pode aplicar a respectiva inversa, –.

Def 8 **Formas 'Iguais'**
As "formas" FRM_{k1} e FRM_{k2} de $UFRM_k$, dizem-se 'iguais' se for: ATR??(FRM_{k1})= ATR??(FRM_{k2}), para todo o ATR?? em U_ATR.

A1.2.3 — 'Processamentos' e 'Erros'

As "formas", quando processadas, por exemplo transmitidas, são mais ou menos 'deformadas', o que se pode por em evidência comparando as N $ATR_{pq}:k?$-Imagens dessa 'forma' $FRM_{k?}$, antes e depois da 'deformação'.

Def 9 **Processador 'Identidade'**
Sejam FRM_{kA} e FRM_{kD}, as "formas" antes e depois dum dado 'objecto' ser processado pelo processador P. Se essas "formas" forem '$ATR_{pq,k?}$-Idênticas', para toda a "forma" em $UFRM_k$ e todo o q em 1..N, então o processador P diz-se $ATR_{pq,k?}$-Idêntico.

Def 10 **Processador 'Equivalente'**
De modo semelhante se define processador $A_{pq,k}$-Equivalente. Veja-se **Def 6** e **Def 7** anteriores.

Def 11 Partição com 'Fronteiras'

Sejam :

UFRMk um conjunto universal munido de uma proximidade PRX. Em geral, PRX é uma distância.

FRM_H

FRM_F dois sub-conjuntos não vazios de UFRMk e disjuntos e cuja união reconstrói UFRMk.

PRT uma partição de FRM_H com N partes e N finito.

Sp, Sq duas partes distintas de PRT.

Epi

Eqj elementos quaisquer respectivamente de Sp e Sq.

Se, para todo e qualquer par de elementos (Epi, Eqj), for PRX(Epi, Eqj)>Ox, então diz-se que foi efectuada em UFRMk, uma partição de 'fronteira espessa'.

A1.2.4 — Comentàrios às definições Def 1 a Def 11

A1.2.4.1 A 'escolha' da 'imagem' resulta da finalidade da 'observação' ou da 'experiência' (conjunto de observações). A 'escolha' é de natureza semântica e normalmente persegue-se um objectivo minimalista, isto é, procurar o menor número de 'atributos' capaz de caracterizar a 'forma' para o 'fim' em vista.

A1.2.4.2 Interpretação da funcional 'erro', ERR.

- ERR pode entender-se como a 'deformação' a efectuar sobre FRMk1 para atingir a 'forma' FRMk2.
- ERR, pq, 12=0, para todo o q, corresponde à 'identidade'.
- A 'equivalência' já consente 'erros', ERR, pq, 12>0, mas os valores desses 'erros' estão condicionados pelos parâmetros da funcional PRX usada.
- A ATRpq, k-Identidade de P só tem de ser verificada no domínio UFRMk e para q em 1..N. Fora dos domínios acima, o processador P pode não ser Idêntico.

A1.2.4.3 Um processador cuja funcional descritora for do tipo 'Equivalente' corresponde a uma função da forma Ovq=ATRpq(UFRMk) ou simplesmente O=Tq(k). A função inversa de Tq vai induzir em UFRMk, uma 'partição' e uma topologia não trivial. Assim, 'formas' diferentes e/ou 'imagens' duma mesma 'forma' diferentes serão consideradas 'equivalentes'. [Todas as chaves que abrem uma dada fechadura são definidas como 'equivalentes' e não são necessariamente 'iguais' ou 'idênticas']. Cada 'parte' da partição constitui um conjunto de 'formas' 'equivalentes'. A representação duma 'parte' será feita por um dos seus elementos que passa a designar-se 'elemento paradigma' e em geral é escolhido no centróide da 'parte' se tal conceito for possível.

A1.2.4.4 Uma partição dum conjunto tem duas propriedades importantes, a união das partes reconstrói o conjunto particionado e a conjunção de qualquer par de partes da partição é vazia. Pode ter interesse criar 'fronteiras espessas' para 'separar' as partes da partição e quando possível de aplicação, um dos métodos consiste em:

- definir uma proximidade, PRXz, veja-se uma distância, no conjunto universal UFRMk. Isto implica eventualmente dotar UFRMk de uma métrica.
- escolher em cada parte P da partição um sub-conjunto, Sp, e a escolha dos Sp dever obedecer à condição seguinte: para qualquer par de partes distintas (P, Q) da partição de UFRMk e qualquer par de elementos (Epi, Eqj), colhidos respectivamente em Sp e Sq, seja PRXz(Epi, Eqj)>Prz, onde Prz é um valor dado.

A reunião de todos os Sp, FRM_H, não reconstrói o conjunto universal UFRMk. O conjunto diferença, FRM_F, representa a 'fronteira espessa' criada. A 'espessura' da fronteira define-se pela relação: Card(FRM_F) / Card(UFRMk) ou por qualquer outro modo que seja semanticamente 'equivalente'.

A1.2.4.5 Semanticamente, o conceito de 'igualdade' não tem muito interesse prático, mas formalmente representa um estado limite tanto para a 'identidade' como para a 'equivalência'.

A1.3 — RECUPERAÇÃO

A1.3.1 — 'Recuperação', 'Equivalência' e 'construção'

Um 'recuperador' consta de dois operadores sucessivos:

- um 'identificador equivalente', IE, que relaciona qualquer das 'formas' pertencentes a uma parte da partição, conjunto 'equivalente', com o respectivo 'elemento paradigma', ou no caso da 'forma' não pertencer ao conjunto FRM_H, então é porque pertence ao conjunto FRM_F e emite um 'sinal' de aviso.
- um 'construtor' de elementos 'paradigmáticos', CP, dotado da capacidade de 'emitir', 'construir', todos os N elementos paradigmas ou um sinal de aviso.

Um 'recuperador' RC, pode descrever-se como a composição dum 'identificador equivalente' IE, e dum 'construtor' CP, como em RC = CP(IE(FRMkj)).

A1.3.2 — 'Fronteiras espessas' dos domínios da partição

Muitos 'atributos' de 'formas' correspondem ao conjunto Sp incluído na parte p da N-partição de FRM_H, [todas as chaves que abrem uma dada fechadura p]. A função do operador IE é tentar 'identificar' Sp e fornecer ao 'construtor', se a identificação for bem sucedida, o símbolo do 'elemento paradigma', Ep, de Sp, ou, no caso de ter falhado, o sinal de 'aviso'. Porque o 'construtor' CP foi dotado da capacidade de 'gerar' todos os N paradigmas da N-partição se a 'forma' pertencer a FRM_H, CP emitirá o referido 'paradigma', Ep, identificado por IE ou um 'aviso' se IE não identificou. Estes 'recuperadores' ou 'repetidores' colocados espaçadamente permitem transmitir a longa distância uma 'mensagem' sem deturpação.

A1.3.3 — Cardinalicidade e linguagens

Todas as linguagens são construídas com símbolos (ou ideogramas) que pertencem a um conjunto universal. As 'mensagens' descritas na 'linguagem' usada pelo autor têm de ser 'traduzidas' na 'linguagem' dos operadores encarregados da sua transmissão. Enquanto as línguas vivas usam simbologias com conjuntos universais de símbolos de cardinais elevados, já os operadores das transmissões preferem uma linguagem com cardinais baixos porque quanto mais baixo menos elementos 'paradigmas' terão de ser memorizados pelo 'recuperador' mas, em contrapartida, mais símbolos têm as palavras e frases.

O cardinal das linguagens é muito variável:

2 nos computadores e coadjuvados por q-múltiplos com q igual a 8,16, 32, 64, etc.

2 em linguagens booleanas, e.g. sistemas digitais, repetidores, inteligência artificial, com arborescências de muitos patamares.

4 ou 5 nos biotas.

>= 2 muito variável nas linguagens 'vagas', *fuzzy*, desde 2, quando degenera em booleana, até a intervalos dos reais.

Inumeráveis nas restantes linguagens formais.

A1.3.4 — Forma referencial e Enformação

O conceito 'nil forma' está associado ao de um 'objecto' sem 'forma'. Todos os instrumentos reais e virtuais criados não conseguiam observá-lo e para todos os efeitos o 'objecto' não existe. Para evitar uma longa discussão semântica sobre 'existência' de 'forma', recorre-se ao velho método de avaliar todos os atributos em relação a uma forma dita 'referencial'. Exemplificando:

- A folha de papel lisa tem a 'forma referencial' e a escrita nela efectuada corresponde à 'forma' que foi 'enformada' na folha. Para recuperar a referida 'forma' basta confrontar a folha escrita com uma folha lisa.
- Uma 'forma: X' foi 'enformada' na 'forma: seno', forma esta tomada como referência, obtendo-se uma 'forma: X-deformada'. A 'forma: X' pode ser recuperada confrontando a 'forma: X-deformada' com a 'forma: seno'.

A1.3.5 — Funções Lineares Homogéneas

Interessam porque são muito úteis para descrever 'entes' que, até uma certa finura de partição se apresentam num estado homogéneo no espaço e lentamente variável no tempo.

Def12 Atributos Lineares Homogéneos de grau 1, ALH_1

Um 'atributo' ATR_{pq} diz-se ALH_{pq} se ATR_{pq} for uma função linear-homogénea de grau 1. Assim, se $FRM_{k2} \oplus FRM_{k1}$ for vazia, então será:

$$ATR_{pq}(FRM_{k2} \oplus FRM_{k1}) = ATR_{pq}(FRM_{k2}) + ATR_{pq}(k1),$$

onde,

$+, \times$ são as conectivas aditiva e multiplicativa do contradomínio de ATR_{pq},

$\oplus, \otimes$ são a união e intersecção de 'formas', as conectivas de $UFRM_k$,

FRM_{k1}, FRM_{k2} membros genéricos de $UFRM_k$ e

ATR_{pq} membro genérico de $UATR_p$.

A1.4 — EXEMPLOS

A1.4.1 — Classes de Equivalência, Descriminação

A1.4.1.1 Preposição do Exemplo

Sejam dados :

- Um conjunto universal de 'formas' $UFRM_k$. $UFRM_k$::{FRM_{k1},FRM_{k2},...,FRM_{k5}}. Card($UFRM_k$)=5. Em linguagem semântica, trata-se dum conjunto de 5 chaves e das respectivas 'formas'.
- Um conjunto universal de 'atributos', $UATR_p$. $UATR_p$::{ATR_{px},ATR_{py},ATR_{pz}}, card($UATR_p$)=3. Recorda-se que os ATR? configuram 'relações' que têm por contra-domínios conjuntos estruturados O?. Neste caso os conjuntos estruturados são respectivamente:
  - ATR_{px} em O_u::[{0,1}, >>], booleano.
  - ATR_{py} em O_v::[{0,1,2}, >>], triádico.
  - ATR_{pz} em O_w::[{0,1,..15}, >>], intervalo dos inteiros.

Têm a seguinte interpretação e/ou descrição:

ATR_{px} uma "fechadura" que permite distinguir, no universo das "chaves", os que a abrem (1) ou não (0).

ATR_{py} um "processo químico" que permite distinguir entre materiais ferrosos (2), latões (1) e não (ferrosos ou latões) (0).

ATR_{pz} um instrumento de medir "comprimentos" que permite atribuir um número inteiro de milímetros no intervalo [0,..15] milímetros.

A1.4.1.2 Partições do conjunto UFRMk

As relações inversas dos ATR vão induzir em UFRMk as partições seguintes:

```
ATRpx {FRMk2, FRMk5}                Ou = (0)
      {FRMk1, FRMk3, FRMk4}         Ou = (1)
ATRpy {FRMk4, FRMk5}                Ov = (0)
      {FRMk1, FRMk3}                Ov = (1)
      {FRMk2}                       Ov = (2)
ATRpz {FRMk5}                       Ow = (0)
      {FRMk1}                       Ow = (6)
      {FRMk2}                       Ow = (7)
      {FRMk3, FRMk4}                Ow = (9)
```

A conjunção das partições, ATRpx×ATRpy, vai permitir particionar UFRMk nas seguintes partes:

	ATRpx	ATRpy
FRMk1	Ou = (1)	Ov = (1)
FRMk2	Ou = (0)	Ov = (2)
FRMk3	Ou = (1)	Ov = (1)
FRMk4	Ou = (1)	Ov = (0)
FRMk5	Ou = (0)	Ov = (0)

A conjunção ATRpx×ATRpy é uma funcional 'descriminante' melhor do que tanto ATRpx como ATRpy, mas não é ainda 'totalmente descriminante' de UFRMk.

A funcional ATRpx× ATRpy× ATRpz é 'totalmente descriminante'.

	ATRpx	ATRpy	ATRpz	Triplos
FRMk1	Ou = (1)	Ov = (1)	Ow = (6)	1,1,6
FRMk2	Ou = (0)	Ov = (2)	Ow = (7)	0,2,7
FRMk3	Ou = (1)	Ov = (1)	Ow = (9)	1,1,9
FRMk4	Ou = (1)	Ov = (0)	Ow = (9)	1,0,9
FRMk5	Ou = (0)	Ov = (0)	Ow = (0)	0,0,0

Verificar que não há dois triplos iguais.

UFRMk	UATRpx		UATRpy			UATRpz								
	(0)	(1)	(0)	(1)	(2)	(0)	(1)	...	(6)	(7)	(8)	(9)	...	(15)
1		■		■					■					
2	■				■					■				
3		■		■								■		
4		■	■									■		
5	■		■			■								
	Ou		Ov			Ow								

1	(1,1)
2	(0,2)
3	(1,1)
4	(1,0)
5	(0,0)

1	(1,1,6)
2	(0,2,7)
3	(1,1,9)
4	(1,0,9)
5	(0,0,0)

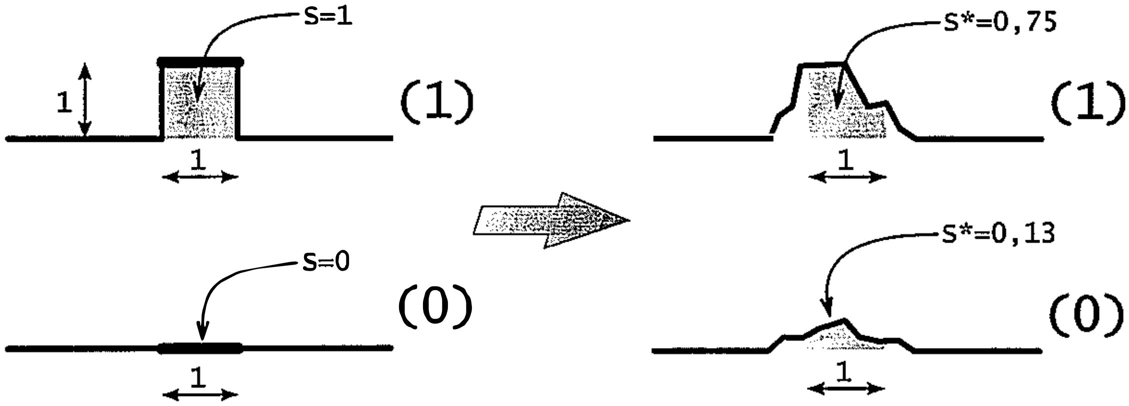
A1.4.2 — Identificação

A1.4.2.1 Preposição do Exemplo. Nos problemas reais de 'identificação' é desejável que o conjunto de atributos seja uma funcional 'totalmente descriminante' dum dado conjunto de 'entes', mas tendo em atenção que a 'imagem' dum mesmo 'ente' não é invariante. Na verdade não há pessoa cujo peso, assinatura, fotografia e vestuário não variem com o tempo e espaço, contudo convinha que essa pessoa fosse 'identificada' adequadamente.

A1.4.2.2 Aplicação às variaveis booleanas {0,1}. Os dois sinais do conjunto {0,1} são traduzidos numa certa linguagem fazendo corresponder ao (1) a função unitária, 1*1 e ao (0) a função 1*0. Porque estes sinais são corrompidos na transmissão e tomam formas diversas utiliza-se o integral da função, a 'área', como o 'atributo' que será usado para reconhecer os dois tipos de sinal.

São escolhidas as correspondências seguintes: (1) se área>0.7 e (0) se área<0.3 e será considerado 'não identificado' se 0.7<= área >=0.3. Assim, (1) e (0) estão separados por um fronteira 'espessa', uma 'terra de ninguém'. Deste modo foi criada uma partição do intervalo dos reais [0, 1] em 3 partes: [0, 0.3) [0.3, 0.7] e (0.7, 1].

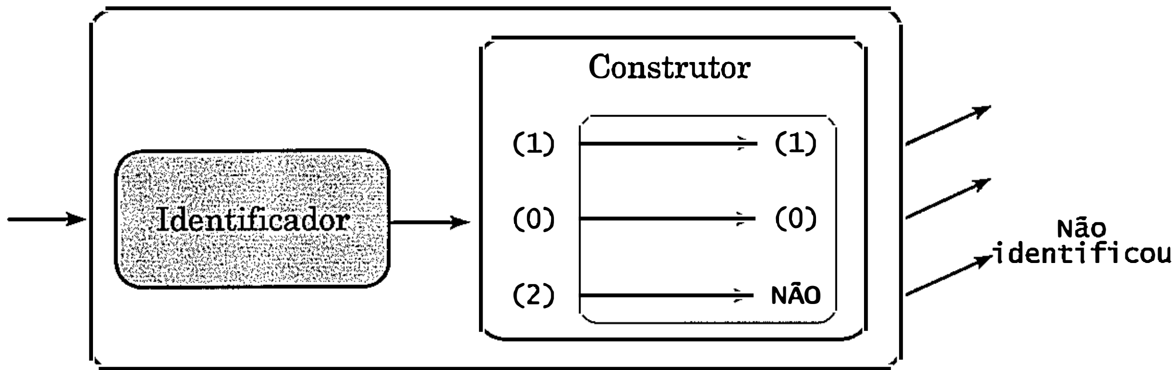
Seria mais elegante usar um reticulado triádico, {0,1,2} atribuindo: (2) ao 'não reconhecimento', o (0) a 1*0 e o (1) a 1*1.



A1.4.3 — Recuperação, Identificação + Construção

Um 'recuperador' consta dum 'identificador' seguido dum 'construtor'. Usando o identificador do exemplo anterior, este vai emitir 3 imagens: (0)::[0, 0.3), (2)::[0.3, 0.7] e (1)::(0.7, 1], num reticulado triádico. O 'construtor' é dotado da capacidade de 'emitir' 3 sinais 'paradigmas': 1*0 se (0), 1*1 se (1) e 1*-1 se (2). Deste modo o 'recuperador' 'emite' sinais correctos, ou recuperados, a partir de sinais corrompidos ou declara que não conseguiu 'identificar' sinal 1*-1.

Nas aplicações práticas nem sempre se prevê a emissão do sinal (2) por serem raros e prefere-se a contagem de *bits* no fim duma frase como forma de verificar a existência de erros de transmissão.



A1.4.5 — Identificação de figuras

Sejam dados :

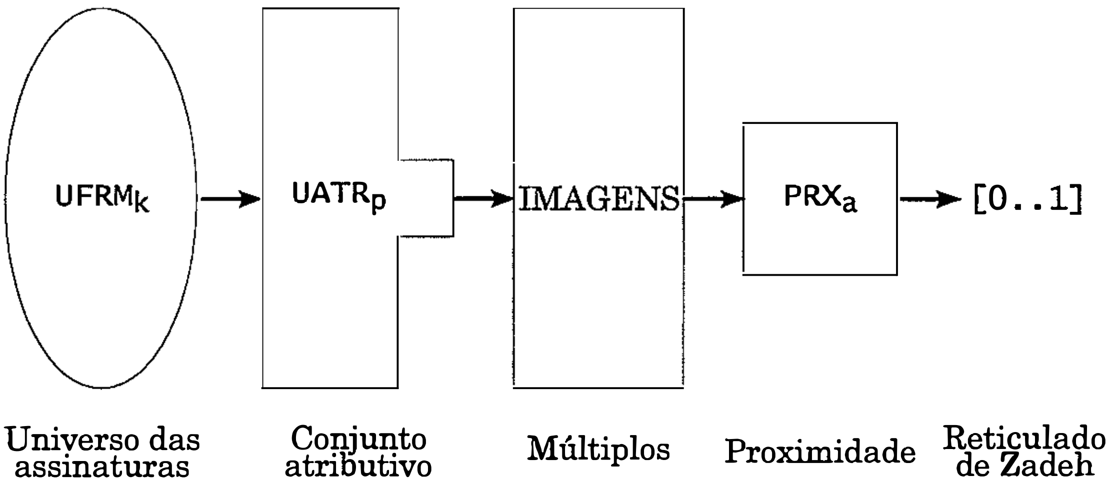
- um conjunto universal de 'formas', UFRMk.
- um conjunto universal de 'atributos', $UATR_p$, que, em conjunto, 'descriminam' parcialmente UFRMk e uma proximidade, PRX_a, definida sobre as 'imagens' dos 'atributos', O_v.

Semanticamente :

UFRMk pode ser o conjunto de 20 "assinaturas" feitas pela "mesma pessoa" com canetas diferentes e em papéis de variadas texturas.

$UATR_p$ o conjunto de atributos: inclinação, ângulos, grossura de traços, etc. etc. que um complexo aparelho é capaz de extrair das referidas assinaturas e emite um múltiplo de 'imagens' atributivas, ML_a o qual se considera suficiente para caracterizar uma assinatura.

PRX_a pode entender-se como uma funcional que tem por domínio o conjunto dos múltiplos, ML_a, e que toma valores num reticulado de Zadeh cujo conjunto universal é o intervalo dos reais [0,1]. A cada "assinatura" vai finalmente corresponder a um real em [0,1].



Forme-se o conjunto de todas as 'imagens', $O_v?=\{ATR_p\}(FRM_k?)$ e escolha-se uma 'imagem paradigma' nesse conjunto, em geral, a que for considerada ou mais perfeita ou esteja no centróide das imagens. Definindo uma segunda proximidade, PRX_b, que emula o afastamento entre duas 'imagens', calculam-se as proximidades PRX_b, da 'imagem paradigma' das restantes. Seja P_b a proximidade da imagem mais afastada da 'imagem paradigma'. Tomando a 'decisão' de só considerar 'identificadas' as "assinaturas" cuja proximidade PRX_b do 'paradigma' seja P_x e $P_x<P_b$.

	Saídas de PRX_a	Paradigma	Saídas de PRX_b	$P_x<0.2$	Assinaturas identificadas
a	.05		.43		
b	.10		.38		
c	.62		.14	✓	(c)
d	.53		.05	✓	(d)
e	.48	.48	.00	✓	(e)
f	.27		.21		
g	.47		.01	✓	(g)
etc.	etc.		etc.		

Semanticamente: As "assinaturas" deram origem a 20 múltiplos, ML_b, {0.1..0.38..0.7} e à imagem 'paradigma' correspondeu 0.38. Procedendo à aplicação de PRX_b obtiveram-se os 'afastamentos', por exemplo, {0.28..0.0..0.39} e seja P_b=0.41 o mais 'afastado'. Decidindo que P_x=0.3 é o maior 'afastamento' consentido para identificar uma assinatura, então a assinatura cuja PRX_a é 0.1 vai ser identificada mas a que é 0.7 não o será.

A1.4.6 — Enformação, Forma Referencial

Um conjunto de 'entes', Uent, possuiem 'formas' que observadas por um conjunto de 'instrumentos' projectam um múltiplo de atributos, ML_a, que são 'equivalentes' quando apreciados por uma dada proximidade PRX_b. Semanticamente, entenda-se Uent como uma resma de papel A4 normalizado. A escolha duma folha de papel nessa resma e a escrita duma frase, Frs, corresponde à operação de 'Enformação' da folha de papel. Será possível 'recuperar' a 'forma' correspondente à frase Frs?

Sejam :

$UFRM_k$ o conjunto de formas e FRM_{kx} a 'forma' genérica duma folha de papel de Uent.

$UATR_p$ o conjunto atributivo dum 'conjunto instrumental'.

ML_{ax} o N-múltiplo correspondente a $ATR_p(FRM_{kx})$.

$PRX_b(ML_{ax})$
o valor do elenento genérico x, que, por hipótese é igual ao valor comum a todos os entes de Uent. Todas as folhas da resma são equivalentes.

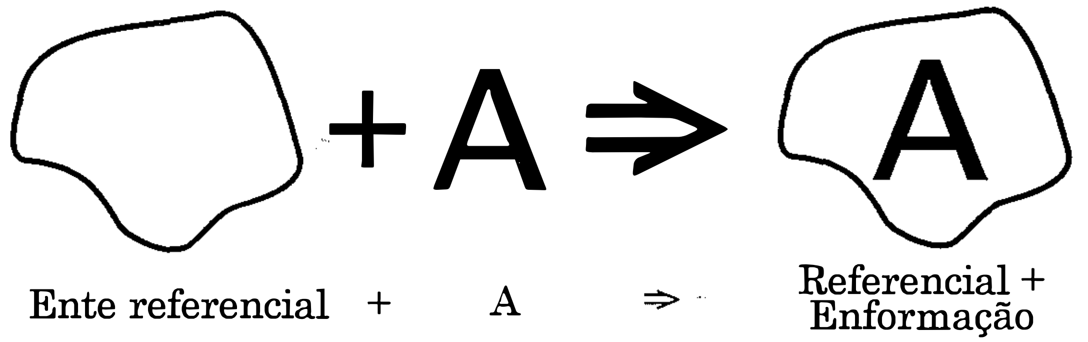
ML_{az} o múltiplo corespondente a uma folha 'enformada' com uma frase Frs.

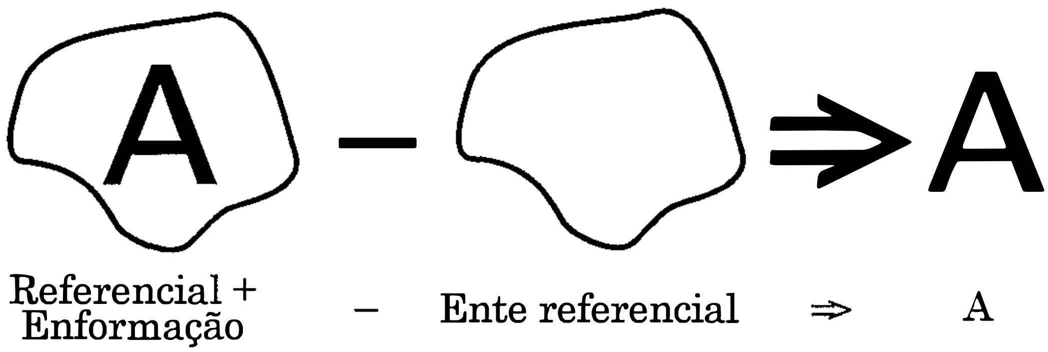
$PRX_b(ML_{az})$
o valor da folha enformada.

ML_{af} o N-múltiplo correspondente à frase Frs.

⊕ símbolo representando a operação de 'enformação'.

$FRM_{k1} \oplus FRM_{k2} = FRM_{k12}$ onde FRM_{k12} é a 'forma' que resulta de enformar FRM_{k1} com FRM_{k2}. ⊕ é fechada e simétrica.





Se semanticamente for 'aceitável' declarar que, se para qualquer q em 1..N, for:

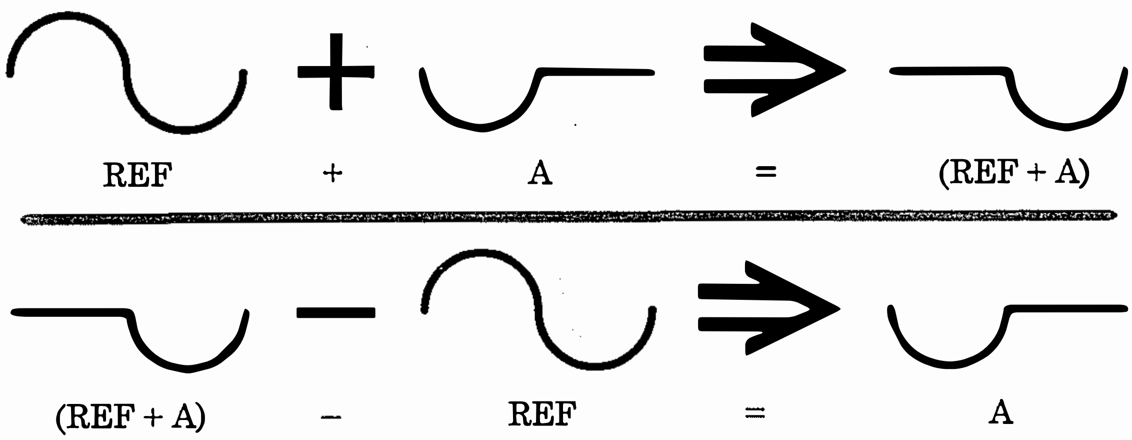
- Apqk1 = ATRpq(FRMk1)
- Apqk2 = ATRpq(FRMk2)
- Apqk12 = ATRpq(FRMk12)
- ATRpq(FRMk1⊕FRMk2) = ATRpq(FRMk12)
- Apqk12 = Apqk1 + Apqk2
- Apqk2 = Apqk12 - Apqk1

então é possível extrair os 'atributos' da 'forma' da frase Frs escrita num papel A4 'enformado' com a referida frase. Para o efeito, basta dispor da 'forma referencial', neste caso representada por uma folha de papel A4 limpa e que os 'atributos' sejam funcionais homogéneas de grau 1, o que implica que os 'instrumentos' aproximem razoavelmente as propriedades dessas funcionais.

A1.4.7 — Enformação, Ondas

Uma onda rectangular, triangular, sinusoidal, etc. cuja forma foi escolhida pelo emissor e é conhecida do receptor pode constituir uma 'forma referencial'. Se no 'ente' material que tem essa forma for introduzida um deformação, resultará uma 'forma' diferente da 'referencial' mas susceptível de ser reconstruída se:

- for dada a 'forma referencial'.
- for semanticamente legítimo escrever, para todos os q em 1..N, Apqk2=Apqk12-Apqk1.



A. G. Portela
Lisboa, 13/Março/1997

A2 — LINGUAGENS

A2.1 — INTRODUÇÃO

Convém não restringir o âmbito do vocábulo 'linguagem' ao da 'linguagem humana', porque todos os biotas comunicam entre eles e com os humanos usando 'linguagens' com suportes diversos: gestuária, sons, marcações, produtos químicos e biológicos, energia, etc., atingindo todos os sentidos de que a natureza os dotou.

Os humanos foram apurando linguagens abarcando domínios extensos, capazes de descrever com perfeição acrescida coisas e fenómenos e com um grau de 'complexidade' tão elevado que parecem não ser comparáveis com as dos 'não humanos'.

Simultaneamente os humanos foram tomando consciência de processos tais como: dedução, generalização, indução, etc., e foram sendo estudados os seus contornos e propriedades e entre estas últimas está o conceito de 'grau de verdade' das frases produzidas nos processos dedutivos. Este 'grau de verdade' varia entre 'totalmente verdade'=1 a 'totalmente mentira'= 0, isto é, toma valores no intervalo dos reais [0,1], reticulado de Zadeh.

As matemáticas 'vagas' ou '*fuzzy*', construídas com base no reticulado de Zadeh ou similares, assentam no conceito de 'verdade graduada', isto é, partem do pressuposto de que no mundo real, frases que descrevam a 'verdade total' são raras e que os 'processos de raciocínio' dos biotas são muito nais 'complexos' do que os usados em matemáticas e lógicas clássicas. Sendo a 'verdade' absoluta elusiva, é melhor conferir-lhe um 'grau' e estudar a evolução deste ao longo do 'processo dedutivo'.

Contudo é mais usual tomar-se uma posição radical; ou a frase é 'totalmente verdadeira' e o 'grau de verdade'=1 ou não o é e então o 'grau de verdade'= 0, isto é, o 'grau' toma valores num conjunto diádico, o reticulado de Boole.
As lógicas e as matemáticas clássicas são booleanas e assentam nos seguintes pressupostos:

- Os dados, (as frases de partida) são totalmente verdadeiros e de qualquer forma a responsabilidade da sua obtenção cabe a quem os obteve.
- A responsabilidade da escolha da 'linguagem formal', isto é, do modelo cabe ao experimentador.
- A 'responsabilidade' da 'linguagem formal' e do seu uso cabe exclusivamente ao ao formalista de modo que as operações dedutivas, (os raciocínios), sejam feitas sem 'erros', isto é, seja conservado 'grau de verdade completo'.

Provar um teorema é partir dum conjunto de frases que representam dados ou operações que se declaram possuir todas um 'grau de verdade'=1 e, usando correctamente essas operações, atingir uma frase conclusiva cujo 'grau de verdade' continua a ser 1. Notar que o 'grau de verdade'=1 duma frase que é uma negação e o 'grau de verdade'= 0 duma frase que é uma afirmação .

Estas linguagens que dispõem de regras de inferência e podem proceder a operações 'dedutivas' vão ser designadas de 'formais' ou 'objectivas', LO. As 'Linguagens Objectivas', LO, são geralmente simbólicas, e relativamente herméticas e para terem utilidade e serem de fácil aplicação têm de ser 'traduzidas' ou 'interpretadas' numa outra linguagem de mais fácil e geral compreensão, uma 'Linguagem Interpretativa ou Subjectiva ou Semântica', LS. As línguas vivas são as mais usadas como 'Linguagem' LS.

A2.2 — LINGUAGENS FORMAIS E SEMÂNTICAS

A2.2.1 — Linguagens Formais ou Objectivas e Simbologia

As 'Linguagens Objectivas' caracterizam-se por exigirem que toda a sua estrutura seja explicitamente declarada e também devidamente interpretada por meio da 'Linguagem Semântica' associada.

As 'Linguagens Objectivas' podem ser apreciadas por meio de procedimentos externos a elas e têm por fim verificar se satisfazem a uma dada colecção de critérios.

a) Apresentação de símbolos e significados:

`LO` 'Linguagem Objectiva'

`LS` 'Linguagem Semântica'

`Plv` 'Palavra reservada' ou simplesmente 'palavra'. É um elemento do conjunto `Uplv`, em geral finito.

`Frs` 'Frase', sucessão finita de 'palavras'.

`fbf` 'Frase bem formada'. Em `LO` só devem estar frases '`fbf`'.

`fbd` 'Frase bem deduzida'. Resultam de 'deduções' realizadas a partir de frases '`fbf`'. Também são designadss por lemas, teoremas e corolários.

b) Requisitos duma 'linguagem objectiva'

R1 Dispor dum conjunto de "palavras reservadas", `Uplv`.
Na linguagem 'objectiva, `LO`, só podem ser usadas palavras de `Uplv`, arquivadas num "reportório". Trata-se dum conjunto de meta-teoremas cujo fim é especificar, em linguagem semântica `LS`, os elementos que vão pertêncer a `REP` (v. **A2.2.2.a**).

R2 Dispor dum conjunto `Ufbf`, de frases que descrevem as 'operações' que permitem 'distinguir' se uma sucessão finita de palavras constitui uma frase do tipo '`fbf`' ou não. Uma forma alternativa seria formar o conjunto de todas as frases '`fbf`', mas com o risco de se verificar uma explosão combinatória.

R3 Dispor dum conjunto de "frases bem formadas" que se designa de conjunto "axiomático" ou "axiomática", `Uded`, da linguagem formal `LO`. `Uded` contém as frases designadas por "regras de inferência" a partir das quais podem ser construídas (deduzidas ou provadas) outras frases '`fbf`' que se dizem 'frases bem deduzidas'. `Uded` configura um conjunto de relações que aplicadas a frases '`fbf`' produzem frases também '`fbf`' e pode entender-se como o motor das 'deduções' ou 'demonstração' ou 'prova' de teoremas.

R4 Eventualmente, dispor de frases '`fbf`' que constituiem um conjunto 'indutor' `Uind`, isto é, capaz de gerar novas frases do tipo `Uded`, (axiomático). As linguagens clássicas não dispõem de conjunto 'indutor', ou seja, `Uind` é vazio.

R5 Todas as frases provenientes do exterior e que resultam de 'observações' ou 'experiências' ou de 'conjecturas' e outras virtualidades, desde que sejam frases '`fbf`', designam-se de 'dados', e formam o conjunto `Udad`. O conjunto `Udad` pode ser aumentado continuamente e constitui parte do domínio dos conjuntos `Uded` e `Uind`. Quer as frases 'deduzidas' por `Uded` quer as frases que forem 'induzidas' por `Uind`, completam o dominio acima referido. Se `Uind` não for vazio também cresce indefinidamente.

R6 Do exterior podem vir frases que alteram `Uded`, por eliminação de frases de `Uded`, por acrescento de novas frases ou correcção das existentes. Porque a transformação é, em geral, importante e muito descaracterizadora da axiomática inicial prefere-se considerá-la como outra linguagem e não como um dialecto.

Resumindo, as frases essenciais são as contidas em:
`Ufbf`, `Uded` e `Uind`, este último pode ser vazio.
`Ufbf` funciona de 'filtro', `Uded` é o motor 'dedutivo', `Uind` é o motor 'indutivo'.

Porque em geral `Udad` é muito grande e os motores são muito produtivos, pode considerar-se impossível construir na prática o conjunto `Ufbf`, isto é, não há linguagens completamente formadas.

A2.2.2 — Linguagem Semântica, LS

A 'linguagem semântica' LS é essencial para a construção da 'linguagem objectiva' LO, e dar-lhe utilidade.

- LS estabelece a correspondência entre as 'palavras reservadas' de Uplv e os 'entes' que simbolizam. Assim, a frase em LO, 2+3=5, através da simples mudança de 'linguagem semântica ou interpretativa', pode servir para descrever uma soma de ovos ou de automovéis. O "reportório" diz-se um "dicionário" se traduzido em LS.
- Não seria possível aplicar R^2 sem o auxílio de LS.
- As frases 'fbf' deduzidas com as regras I_{ax} referidas em R^3 terão de ser interpretadas e só por meio da sua tradução em LS tal será possível.
- Para apreciar os atributos e méritos duma 'linguagem objectiva' é necessário usar outra linguagem, funcionando como 'linguagem semântica'.

A2.2.3 — Atributos duma Linguagem Objectiva

Uma linguagem formal LO possui um conjunto de 'propriedades' ou 'atributos' susceptíveis de serem verificadas, usando outras 'linguagens' que funcionam de 'semânticas' em relação a LO. Contudo, a mesma linguagem com uma utilização diferente pode funcionar como objectiva e semântica alternadamente.

Alguns atributos duma linguagem 'objectiva' são apresentados de seguida:

A2.2.3.1 Dialogadores LS/LO e LO/LS
São meios de estabelecer o 'diálogo' nos dois sentidos, entre as linguagens semânticas LS e a objectiva LO e assim ligar esta com o meio exterior.

A2.2.3.2 'Motor Dedutivo'
Em geral, LO dispõe de um 'motor dedutivo' Mot_Ded, que vai permitir gerar frases fbf, os teoremas da linguagem. A não exitência dum Mot_Ded reduz a linguagem a um dicionário de palavras mais um reportório de frases que só crescem se novas palavras ou frases vierem do exterior.

O Mot_Ded é constituído por relações cujos domínios e contradomínios são conhecidos e declarados de modo a que se verifiquem certas propriedades importantes: as operações são fechadas, completas, etc., todas as frases 'fbf' da linguagem são susceptíveis de tratamento pelo Mot_Ded. e é conservado o grau de verdade=1.
Resumindo, as frases deduzidas são 'verdadeiras' se as frases de partida (os dados) também o forem e a linguagem possuir os atributos indicados acima.

A2.2.3.3 Avaliador do 'grau de verdade'.
Do que se disse em **A2.2.3.2**, o 'grau de verdade' das frases é um atributo essencial em qualquer linguagem.

Nas linguagens Booleanas, requer-se que os teoremas, as frases 'deduzidas', tenham 'grau de verdade'= 1. Nas não Booleanas, requer-se que existam 'operadores' para calcular a par e passo o valor do 'grau de verdade' dos teoremas deduzidos.

A2.2.3.4 'Conteúdo Informativo'.
É essencial abordar o conceito de 'Conteúdo Informativo', CI_. Aliás, esta função não tem merecido muita dedicação por parte dos formalistas que constroiem os modelos formais baseados numa distribuição de acontecimentos o que implica ser eliminada a avaliação nos casos em que só há uma ou muito poucas ocorrências.

O problema pode abordar-se com um exemplo:

- Um repositório contém um conjunto de frases Urep.
- Acrescenta-se ao repositório um conjunto de frases Jf.
- Qual o incremento de conhecimentos, do 'conteúdo informativo', que passa a existir no repositório?

As seguintes hipóteses são possíveis:

H1 O conjunto Jf está incluído em Urep. É razoável que se não considere incrementado o 'conteúdo informativo' do repositório.

H2 A hipótese **H1** não se verifica, contudo a conjunção de Urep com Jf não é vazia, então Jf-(Urep^{J}f) representará um conjunto de frases 'novas'. Se não existe um 'processador dedutivo' adjunto ao repositório, é razoável que se considere incrementado o 'conteúdo informativo' do repositório.

H3 Verifica-se a hipótese **H2**, mas adjunto ao repositório existe um 'processador dedutivo'; então mais hipóteses podem ser consideradas.

H3.1 As frases 'novas' vindas do exterior não podem ser construídas por meio do processador 'dedutivo'. Parece razoável considerar que as 'novas frases' vindas do exterior vão incrementar o 'conteúdo informativo' do repositório.

H3.2 As frases 'novas' vindas do exterior são teoremas dedutíveis a partir das que já existiam no repositório. Aqui já não é tão claro que tivesse havido incremento do 'conteúdo informativo' do repositório uma vez que bastaria obtê-las por dedução?

H3.3 As frases 'novas' configuram processadores novos, por exemplo, um processador inductivo. As novas frases induzidas constituiem somente um incremento do 'conteúdo informativo' do repositório?.

H4 Dispondo do conjunto universal de 'dados' e do 'processador dedutivo' é possível gerar todas as frases 'fbf' restantes. Pode dizer-se que, sob o ponto de vista 'conteúdo informativo' o 'processador dedutivo' não cria informação nova mas apenas 'revela' informação oclusa na axiomática e nos dados?

A2.2.3.5 Valores de vários tipos.

Muitas outras funcionais podem ser criadas, como por exemplo:

- Tempos de processamento.
- 'Notas' conferidas a palavras, frases e algoritmos como resultados de ensaios normalizados ou aplicação de funções de mérito.
- Valores de natureza económica: custo, preços, etc..

Outras hipóteses podem ser imaginadas por isso o tema 'Conteúdo Informativo' tambem é tratado no capítulo **A3**, cujo tema geral é 'tradutores'.

A2.3 — CONSTRUÇÃO DE LINGUAGENS

A2.3.1 — Introdução

As frases das linguagens são emitidas porque os seus autores pressupõem que os receptores dessas frases dispõem dum vasto conhecimento que lhes permite interpretá-las corretamente. Em teatro, aproveitam-se as interpretações de frases fora de contexto para criar situações cómicas ou trágicas.

A tradução da 'frase imperfeita' na forma ou no sentido para uma linguagem formal deve ser acompanhada dum 'diálogo' entre o declarante das frases e o formalista que as tem de traduzir, com o fim de aclarar o seu conteúdo. Se o 'diálogo' não teve lugar, então o significado dessas 'frases imperfeitas' só pode ser "conjectural", na medida em que o seu significado vai depender também do interpretador.

Há assim duas formas extremas de abordar este problema:

- as 'frases declaradas' são previamente esclarecidas e só são aceites depois dum 'diálogo' com o declarante.
- as 'frases declaradas' são aceites tal e qual e a responsabilidade do seu sentido e significado será transferida para o 'leitor' e/ou 'interpretador'.

A2.3.2 — Com Dialogo Prévio

A2.3.2.1 Procedimentos e Pressupostos

P1 O dicionário e o repositório de frases são susceptíveis de expansão indefinidamente. Presume-se que a linguagem é aprendida à medida que vão 'entrando' novas frases, eventualmente portadoras de novas palavras e/ou de novas interpretações.

P2 Se uma palavra tem 'interpretações' múltiplas então essa palavra é acrescida dum símbolo, em geral um carácter, colhido num conjunto de símbolos munido duma relação de ordem estrita. A cada interpretação distinta corresponderá um símbolo igualmente distinto. O processo inicia-se usando o símbolo de menor ordem seguindo-se os restantes por ordem sucessiva.

P3 As palavras sinónimas são reciprocamente assinaladas e invocam a mesma 'frase interpretativa'.

P4 Nos dicionários correntes, as 'palavras' simbolizam de facto 'conjuntos de palavras', uma vez que representam não só a 'palavra' escolhida para 'paradigma do conjunto' mas todas as suas declinações e/ou conjugações. Vejam-se as múltiplas e irregulares metamorfoses da 'palavra paradigma' para indicar ao 'leitor' que é singular, plural, masculina, feminina, (ou neutra) ou o tempo se passado, presente, futuro, e muitos outros atributos. Porque formam sucessões distintas de caracteres são consideradas palavras distintas entre elas e da 'palavra paradigma' escolhida para figurar no dicionário. Como se faz em **P2**, também aqui são acrescidos às 'palavras paradigmas' símbolos normalizados para significar uniformemente as várias declinações e/ou conjugações da 'palavra paradigma'.

P5 As frases holónicas têm a seguinte escrita normalizada:

`FrsN={Plv1, Plv2, Plv3, Plv4, Plv5, Plv6},`

Formalmente, é um 6-múltiplo de palavras com o seguinte significado:

- `Plv1` a entidade 'referencial' responsável final por todo o processo interpretativo.
- `Plv2` a "pessoa" que, em representação de `Plv1`, participou no diálogo de esclarecimento, no interrogatório da testemunha e é o executor do processo.
- `Plv3` O declarante da frase, o testemunhante, o participante no diálogo, o respondente ao interrogatório.
- `FrsH` = `{Plv4, Plv5, Plv6}`, a frase ou declaração 'holónica' propriamente dita. `(Plv4, Plv6)` configura um par da relação cujo nome é `Plv5`.
- `Plv5` É a relação, o verbo, a acção, a relação atributiva.
- `Plv4` Agente da accção, o sujeito, o membro duma classe de atributos.
- `Plv6` A entidade passiva, predicado, classe atributiva.

P6 À frase `FrsN` corresponde um 6-múltiplo de valores que representam o 'grau de verdade' ou de 'certeza' das declarações feitas. Estes valores são tomados num reticulado booleano, n-ádico, de Zadeh, etc. e representam a opinião de:

- `Plv3` o "declarante", quanto à sua declaração, a frase `FrsH` e suas palavras `Plv4`, `Plv5` e `Plv6`.
- `Plv2` o "representante", quanto ao 'grau de verdade' ou de 'confiança' depositada no declarante `Plv3`.
- `Plv1` a "entidade referencial", quanto à capacidade de `Plv2` liderar o processo e manter um 'grau de verdade' elevado.

P7 Todas as 'frases compostas' `FrsC_`, são analisadas em frases holónicas normalizadas `FrsN` e conserva-se em memória o seguinte:

- "a frase original" `FrsC_`
- "a arborescência" que descreve os passos da análise até chegar às "frases holónicas".
- "as frases holónicas" `FrsN` que resultaram do diálogo.
- "os 6-múltiplos de valores" dos 'graus de verdade'.

P8 A linguagem dispõe dum conjunto de funcionais para avaliar o valor do 'grau de verdade' ou de certeza da frase composta a partir dos 6-múltiplos associados às frases holónicas.

A2.3.2.2 Consequências e Corolários

C1 Como carolário de **P2**, **P3** e **P4**, resulta que o tradutor *'palavras do dicionário'*⇒*'frases interpretativas'* é formalmente uma aplicação unívoca da esquerda para a direita mas não no sentido inverso.

C2 A interpretação da "frase composta" é conseguida se todos os pressupostos forem satisfeitos.

C3 A aplicação dos procedimentos acima referidos às frases que vão sendo recebidas vai permitir construir uma linguagem cada vez mais adequada a descrever o meio "exterior".

C4 Se forem sempre executados todos os procedimentos **P1..P8**, pode reconstruir-se em qualquer altura a 'interpretação' das frases arquivadas no reportório, o 'grau de verdade' que lhes foi conferido e reproduzir a "frase composta' original.

C5 A memória consumida na feitura destes dicionários e repositórios exaustivos e quantificados é muito maior do que a simples memorização do nome do declarante, Plv3, e da 'frase composta', cerca de 10 vezes mais. Só actualmente, dispondo de memórias de massa, será possível construir tais dicionários e reportórios.

A2.3.3 — Com Interpretador

Uma das funções de todo o biota é 'interpretar' sinais porque um sinal mal interpretado é a 'vida' em risco. O homem, de todos os tempos, procurou desenvolver esta função criando e apurando linguagens com propósitos diversos, sendo típicos os seguintes:

- Linguagens 'claras', de geral e fácil interpretação e se possível, de interpretação unívoca.
- Linguagens 'cifradas' cuja interpretação só é possível aos iniciados, os possuidores da cifra ou código. A linguagem 'cifrada' é essencialmente uma tradução duma linguagem 'clara' por meio de um tradutor bi-unívoco.
- Linguagens 'difusas' que são construídas de forma a admitirem múltiplas interpretações, como o são as das pitonisas, dos advinhos, etc..

Com o advento dos processadores automáticos, tem sido desenvolvida uma enorme actividade para construir 'interpretadores' que sejam bons 'émulos' dos processos 'interpretativos' de que os humanos vêm dotados.

As linhas de desenvolvimento têm sido :

A2.3.3.1 Capacidade de 'dedução'

Aumentar a capacidade e a velocidade do motor 'dedutivo'. A Inteligência Artificial atingiu hoje um desenvolvimento exemplar.

A2.3.3.2 Capacidade de 'indução'

Desenvolver o motor 'indutivo'. Agora que memórias com muitos *giga-bytes* são correntes e os preços são módicos, já é possível criar reportórios extensos.
As principais operações no processo de 'inducção' são:

a) *Imaginar, gerar, criar, 'propriedades'.*
Estas 'propriedades' configuram relações existentes nas frases ou entre frases ou as duas coisas. O objectivo é verificar se essas 'propriedades' têm existência em algum sub-conjunto SCJ do conjunto universal de frases do 'repositório.

b) *'Buscar' ou 'devassar' o reportório*
O objectivo é encontrar as frases que satisfazem a um p-múltiplo de critérios e assim construir eventualmente o sub-conjunto SCJ. O "processador da busca" dispõe dos procedimentos necessários à experimentação do p-múltiplo. Se a 'busca' for bem sucedida, a 'propriedade' passa à categoria de 'conjectura' e o sub-conjunto SCJ é o domínio da 'conjectura'

c) *'Conjectura' em 'Confirmação'*
As 'conjecturas' recém-criadas passam ao estado de 'conjectura' em estado de 'confirmação'. Durante este período o sub-conjunto vai sendo aumentado com novas frases que satisfazem ao p-múltimo de critérios. Se uma *'conjectura' em*

'confirmação' satisfizer a um q-múltiplo de critérios mais constrangentes que o anterior, em geral, a 'conjectura' passa à categoria de 'propriedade'.

d) 'Propriedade' em 'Confirmação'

Um processo semelhante, *mutatis mutandi,* a **c)**, é agora aplicado às 'propriedades'. Se 'confirmada', a 'propriedade' é incluída no motor 'dedutivo' depois de compatibilizada com as frases já existentes na 'axiomática' desse motor.

A2.3.3.3 Desenvolvimento de Modelos Sincréticos

As redes neuronais constituiem um bom exemplo. O modelo 'sincrético', M_SYN, tem uma propriedade fundamental: '**aprende** com a **experiência**'. As interacções do 'conjunto univeral exterior' com M_SYN permitem a este 'induzir' as regras de convivência a satisfazer.

Esta aprendizagem e ajustamento do M_SYN poderá levar muito tempo e implicar muitos passos iterativos mas 'espera-se' que o processo venha a convergir. O que se ganha?

Em vez de dotar o motor 'dedutivo' com todas as instruções necessárias para realizar cada tarefa particular, o chamado 'programa', com a solução dos M_SYN, reduz-se à definição das relações do 'Exterior' com M_SYN e como convertê-las num processo de aprendizagem.

A2.3.3.3.a Modelo Formal dum M_SYN

Seja :

UVi Conjunto universal com uma estrutura SVi.

I-UV q-múltiplo de UVi e i em 1..I.

Xik elemento genérico de UVi, com k em 1..K.

UPj Conjunto universal com uma estrutura SPj.

J-UP p-múltiplo de UPj e j em 1..J.

Pjl Elemento genérico de UPj, com l em 1..L. Os Pjl são funções da ordem iterativa no processo de aprendizagem.

Z(Xik;Pjl) Uma função paramétrica das variáveis Xik em I-UV e dos parâmetros Pjl em J-UP.

G(Z) Uma funcional de Z(Xik;Pjl) a ser extremada.

OC Sistema de Correctores Paramétricos da forma genérica Pjl=OC(Pjl,G(Z)). A sua função é ao termo uma iteração ou uma série curta de iterações, corrigir os parâmetros no sentido de aproximar o extremo da funcional G(Z).

A2.3.3.3.b Comentários aos Modelos Formais M_SYN

Notar que variadíssimos procedimentos usam este método, nomeadamente as redes neuronais, estas porque particionam o 'ente' em N partes iguais, permitem 'normalizar' os procedimentos. No caso mais geral existem múltiplos 'atractores' e daí G(Z) possuir extremos distintos o que dificulta a busca do *extremo dos extremos.* Quando se usa particionar o 'ente' é necessário fornecer o 'grafo' das ligações. Os tipos dos M_SYN resultam da combinação adoptada de:

- Tipo de Funcional G(Z)
- Tipo de Correctores OC
- Tipo do Grafo e
- Tipo de Função Z(X,P).

Quasi todos estes tipos têm nomes que os distiguem e autores que os propuseram. Como cada combinação foi imaginada para resolver uma classe de problemas e muitas se sobrepõem, um especialista deverá aprender a efectuar escolhas acertadas.

A2.3.3.3.c Propriedades dos Modelos Formais M_SYN

As propriedades são as que usualmente se exigem em modelos formais: robustez, tempo de Aprendizagem (de convergência), dimensão e finura da partição do 'ente', erro ou proximidade do extremo dos extremos, etc..

Para avaliar um modelo, constróiem-se problemas-tipo que são experimentados e avaliados os valores das várias propriedades acima referidas. O múltiplo de valores é transformado num único por meio de uma funcional-tipo.

A2.3.3.4 Exemplos de 'Interpretações'.

Exemplo 1

a) Quais as interpretações triviais da frase Frs?
Frs =< José e Fernando ganharam >

b) Algumas interpretações Triviais:
1. José ganhou o salto em altura e Pedro o de comprimento.
2. José e Pedro ganharam o jogo de ténis, pares.
3. José e Pedro ganharam *ex aequo* o campeonato de bilhar.
4. José e Pedro ganharam porque pertenciam à equipa ganhadora.
5. José ganhou (dinheiro ao jogo) e Pedro ganhou (experiência, perdendo ao jogo).
6. José e Pedro ganharam (experiência, perdendo ambos ao jogo).
7. José e Pedro ganharam (ao jogo).

etc.

c) Informação complementar para auxílio da Interpretação.
- Conhecer a Natureza do jogo.
  - Directamente: saltos, ténis, bilhar, jogo de azar...
  - Indirectamente: sabendo onde se deu a ocorrência: no campo de atletismo, de ténis, na sala, no casino.
- Conhecer os *curricula* desportivos de José e Pedro.
- Conhecer quais os jogos que prevêem a situação de *ex aequo*.
- Conhecendo o tipo de vestuário desportivo usado.
- etc.

d) Parece claro que o processo 'interpretativo' também exige muita memória e procedimentos pesados.

Exemplo 2

a) Frs = < Ressurex Non Est Hic >
(Ressuscitou Não Está Aqui)

b) A interpretação tradicional é: < Ressurex, Non Est Hic > mas outros interpretam-na assim: < Ressurex Non, Est Hic >. O sentido das duas frases é justamente oposto. Se a frase Frs tivesse sido aclarada antes de ter sido passada a escrito, a alternativa interpretativa estaria hoje dissipada.

Outros Exemplos

Interpretação de:
- documentos, ordens, contratos, acordos, tratados, etc.
- desastres de automóveis, comboios, aviões, navios etc.
- informação clínica para identificar uma doença.
- leis, normas éticas e morais religiosas ou profanas.
- desenhos, projectos, arte.
- discursos políticos.
- etc.

A2.3.3.5 Comentário à 'interpretação'

Quanto mais difusa e obscura for a frase maior é o número de 'interpretações' possíveis, mesmo que estas não sejam muito distintas. Cada caminho interpretativo tem correlegionários e seguidores que lutam pelas respectivas 'intrepretações'. Deste modo uma frase que era inicialmente o 'testemunho' Tst, dum 'declarante', desdobra-se em várias 'interpretações' INTR, que passam a ocupar a posição do 'testemunho' Tst, isto é, INTR(Tst) e Tst são considerados iguais.

Umas vezes o nome do 'interpretador' é desconhecido, outras é enaltecido mas em todos os casos atribui-se ao 'declarante' a autoria, a responsabilidade, tanto de Tst como de INTR(Tst).

Quando se fazem traducções TRD, para outra linguagem, o que se 'verte' é, geralmente, a 'interpretação' INTR(Tst) e não Tst e o resultado final é confundir TRD(INTR(Tst)) com TRD(Tst).

Fazendo o paralelo entre 'interpretação' de 'testemunhos' e 'observação' de 'formas', podem estabelecer-se as seguintes correspondências:

'frase do declarante'	↔	'forma' do 'ente'
'interpretador'	↔	'instrumento de observação'
'interpretação' (da frase)	↔	'atributo' (imagem)

Tantas 'interpretações' quantos os 'interpretadores' e *Tantos 'atributos' (imagens) quantos os 'instrumentos'* são paráfrases.

A. G. Portela
Lisboa, 31/Março/1997

A3 — TRADUTORES

A3.1 — INTRODUÇÃO

Todas as exposições assentam na presunção que existe um quadro de conceitos comuns expressos numa linguagem que é dominada por quem emite e/ou recebe as mensagens. Essa linguagem e esses conceitos não se definem, quanto muito explicam-se ou são submetidos a processos destinados à certificação da sua similaridade. É nessa linguagem que vai decorrer toda a oração interpretativa.

Neste capítulo introdutório, recorre-se a palavras 'reservadas' e arquivadas num reportório DIC, que tiveram por inspiração palavras usadas nas linguagens formais, nas de especialistas e em línguas de vulgo ou mortas. O objectivo principal é estabelecer um paralelo com as de outras especialidades e assim aproximar os conceitos subjacentes e facilitar o entendimento entre estudiosos de domínios diversos.

Entre os seres vivos e o mundo que lhes é exterior verificam-se duas actividades essenciais à vida que se processam em sentidos contrários: increção e excreção de massa, energia e 'formas'. Aqui interessam essencialmente as transferências de 'formas' embora estas venham acompanhados de trocas de massa e/ou energia.

O par massa-energia só ocasionalmente será referido nesta introducção, mas está subentendido que a massa, energia e 'forma' constituiem uma tríade. Historicamente, o par massa-energia foi estudado em primeiro lugar e só muito mais tarde a conceito de 'informação', veja-se 'forma', foi identificado e parcialmente estudado.

A recepção (increção ou entrada) duma 'forma' num 'observador' promove neste uma 'mudança do estado', a que pode seguir-se uma emissão (excreção ou saída) de informação, 'formas', como resposta ou reacção. O acto de 'observar' consiste justamente em provocar 'entradas' de 'formas' e colher as 'saídas' de 'formas' decorrentes e correlacionadas com aquelas 'entradas'.

A interacção entre dois entes A e B, onde A emite 'formas' e B recebe, pode descrever-se como uma 'acção' de A sobre B e as 'formas' emitidas por B representam a respectiva 'reacção'.

Assim a uma 'observação' correspondem geralmente três acontecimentos em B: <Entrada duma 'forma' em B>, <B muda de Estado> e <Saída duma forma de B>.
A extensão deste processo a entes 'sem vida' permitiu aos humanos a criação da vasta panóplia de instrumentos de acção e de observação hoje disponíveis.

A3.2 — NUMENCLATURA DE RELAÇÕES

A3.2.1 — Frases e Relações

Sejam dados os conjuntos A e B e forme-se o seu produto cartesiano AxB. Formalmente, uma relação pode ser representada por um conjunto R de pares (a_, b_), onde a_ e b_ pertencem a A e B respectivamente. O par (a_, b_) é um elemento de R contido em AxB. Nalguns casos é possível encontrar um operador Q que aplicado a a_ 'calcula' b_ se (a_, b_) pertencer a R.
Uma 'relação' entre a_ e b_ pode ser designada semanticamente de muitos modos. A seguir dão-se exemplos de palavras usadas para designar a_, b_ e Q:

b_
- é uma 'função' Q de a_, b=Q(a_).
- é a 'imagem' de a_ obtida por meio de Q.
- é a 'reacção' de Q à acção (provocação) de a_.
- é a 'traducção' da frase (ou palavra) a_ escrita na linguagem LA usada no conjunto A, para a linguagem LB usada no conjunto B.

a_ ➢ é o valor de 'partida' e b_ o de 'chegada'.
➢ é a entrada e b_ a saída.
(a_, b_)
➢ estão 'correlacionados' ou 'associados'.
etc., etc..

A3.2.2 — Tipos de relações

No decorrer da exposição serão usados mais frequentemente os seguintes tipos de relações que neste contexto serão designados como segue:

a) ***Tradutores***
Relacionam sub-conjuntos dum conjunto universal U_A com os sub-conjuntos dum outro conjunto universal U_B. São exemplos os dicionários, léxicos, fotografias de interferência, transformadas integrais.

b) ***Figuras de mérito***, ***Funções ordenadoras***, ***Proximidades*** e ***Funcionais.***
Relacionam múltiplos de variáveis colhidas num produto cartesiano com os elementos dum conjunto dispondo duma relação de ordem, reticulados, inteiros, reais, etc.. O produto cartesiano é formado por vários conjuntos universais e em geral, com métricas, mas o produto cartesiano pode não ter métrica.
Exemplificando, o domínio duma relação é o produto cartesiano: fiabilidade × peso × preço, uma tríade e a relação toma valores no conjunto (a,b,c,d,e,f) munido duma relação de ordem estrita crescente da esquerda para a direita. Reparar que as métricas a usar nas medidas do preço, da fiabilidade e do peso vão ser diferentes e não é fácil propor uma métrica para o produto cartesiano mas uma funcional do tipo 'proximidade' já permite comparar e/ou ordenar os múltiplos dum produto cartesiano sem métrica.

c) ***Observação***, ***Mensuras*** e ***Atributos***.
Este tema vai ser retomado com mais pormenor em **B1**. O conceito subjacente à proposição das relações acima referidas é ser possível isolar 'atributos' das 'formas, para o que será suficiente ou construir 'instrumentos' para os 'observar' ou formalmente declarar a sua existência 'virtual'. Em geral, procura-se que os 'atributos' sejam 'distintos' e 'independentes', tomados 2 a **2**, e.g.: 'Temperatura', 'massa', 'energia', 'entropia', 'preco', 'rendimento *per capita*', etc., são atributos que parecem corresponder a conceitos distintos, não correlacionados.

A3.2.3 — Funções homogéneas. (v. A1.2).

a) ***Funções homogéneas de grau 1***, FHG1.
São relações formais adequadas a descrever atributos, (grandezas), tais como a massa, volume, energia, entropia, o valor monetário, cardinal, probabilidade, etc. e de comum, têm a propriedade da 'aditividade'. Formalmente, dado um 'ente' homogéneo e escolhidas duas partes disjuntas desse 'ente', então o valor de FHG1 da união dessas duas partes é igual à soma dos valores de FHG1 de cada uma delas. As funções FHG1 configuram tambem 'funções-medidas' e em física são designadas por grandezas 'extensivas'. A busca de atributos que gozem da propriedade 'aditividade' tem sido um esforço de milénios que se tornou exuberante nestes últimos séculos.

b) ***Funções homogéneas de grau 0***, FHG0 .
Estas funções são adequadas a descrever atributos como: temperatura, pressão, densidade, preço, rendimento *per capita*, densidade de probabilidade e dum modo geral, funções específicas. Em 'entes' no estado homogéneo, os atributos, FHG0, são constantes para qualquer parte desse 'ente' e para ele todo. A homogeneidade dum 'ente' verfica-se pela uniformidade dos atributos FHG0. As grandezas, FHG0, em física, são designadas por grandezas 'intensivas'.

Finalmente, reparar que para 'entes' em estado 'homogéneos', as grandezas do tipo FHG0 são relações de grandezas FHG1, e.g.:

densidade	=	massa / volume
pressão	=	energia / volume
temperatura	=	energia / entropia
preço	=	valor / quantidade
rendimento *per capita*	=	valor do rendimento / cardinal (conjunto)
densidade probabilidade	=	Probabilidade / medida(conjunto)
etc. etc.		

A3.2.4 — Métodos de apreciar os 'erros'

São apresentados dois métodos típicos: 'não' interpretativos, NI e 'sim' interpretativos, SI.

A3.2.4.1 Métodos 'não' interpretativos, NI.

Os erros têm todos o mesmo valor, quer seja a substituição dum acento grave por um agudo ou no outro extremo, a troca dum 0 por um 1 numa variável booleana.
Não interessa a alteração do significado resultante do erro cometido, só interessa se foram ou não cometidos erros.

A versão da linguagem numa linguagem binária vai permitir reconduzir um método do tipo NI a uma simples contagem de *bits*, donde resulta que os erros acumulados configuram uma grandeza aditiva que pode ser representada por uma função-medida, e.g. a entropia.

Se os erros forem muito raros estes métodos têm a vantagem de dispensarem pesados 'interpretadores' e, caso se verifique um erro, basta mandar repetir a frase toda, operação dispendiosa mas raramente necessária.

A3.2.4.2 Métodos 'sim' interpretativos, SI.

O receptor dispõe dum repositório de informações sobre o emissor da mensagem, o contexto do diálogo e as linguagens de partida e chegada, bem como é dotado de 'instrumentos' que permitem 'reconstruir' palavras, frases, eliminar ambiguidades, etc..

Os erros produzidos podem eventualmente ser corrigidos por esses 'reconstrutores' semânticos de que o receptador da mensagem está munido.
Todos os erros que possam ser corrigidos por via semântica não são contados como 'erros insanáveis'.

O mérito dum reconstrutor de frases (de sinais) pode ser avaliado por vários critérios, como por exemplo:

- pela relação entre número de palavras que puderam ser reconstruídas correctamente e o total das palavras erradas.
- pelo total das frase reconstruídas correctamente e o total das frases incorrectas.

A3.2.4.3 Exemplos de Aplicações dos métodos NI e SI.

Os exemplos adiante apresentados destinam-se a estabelecer distinções entre os métodos NI e SI. Algumas hipóteses vão ser adoptadas a fim de simplificar a apresentação:

- O valor do erro da troca, perda ou acrescento de:
  a) Um carácter é avaliado em 1 ch.
  b) Uma palavra é avaliada em 1 pl.
  c) Uma frase é avaliado em 1 fr.
  onde ch, pl e fr são unidades arbitrárias.
- O valor dos erros acima definidos são aditivos e portanto susceptíveis de serem representados por funções-medida.
- O valor das reconstruções semânticas é referenciado aos tipos de informação e operadores de que for munido o 'reconstrutor'.

Exemplo 1 **Confronto dos métodos NI e SI. Reconstrução.**

Frase emitida E1 = [António Bateu Francisco].
Frase recebida R1 = [António Bateu Francisca].
Frase recebida R2 = [Antónia Bateu Fransisca].
Frase recebida R3 = [António Bateu Fransisca] .

Erros ER do tipo NI cometidos:
ER1: 1 ch 1 pl 1 fr
ER2: 3 ch 2 pl 1 fr
ER3: 2 ch 1 pl 1 fr

Se o 'reconstrutor semântico' RSa, for munido dum dicionário e dum operador de proximidades, os erros ortográficos são em geral corrigidos:
Os erros após correção semântica são:
ER1: 1 ch 1 pl 1 fr
ER2: 0 ch 0 pl 0 fr
ER3: 1 ch 1 pl 1 fr

Se o 'reconstrutor semântico' RSb, além dos meios de que RSa vem munido, for dotado de conhecimento contextual, por exemplo, sabe que a frase foi emitida no contexto dum combate de boxe de homens, então os erros após correcção semântica são:
ER1: 0 ch 0 pl 0 fr
ER2: 0 ch 0 pl 0 fr
ER3: 0 ch 0 pl 0 fr

As frases correctas foram reconstruídas.

Exemplo 2 **'Conteúdo informativo' e 'Valor' dos Erros**

Os exemplos que seguem procuram distinguir entre estes dois conceitos, 'conteúdo' e 'valor' dos erros.

Frase emitida E1 = [António bateu Bento ou João]
Frase recebida R1 = [António bateu Bento e João]
Frase recebida R2 = [Amtómio bateu Bento ou João]

Apenas dois caracteres estão errados em cada frase,
em R1: e foi trocado por ou,
em R2: n foi trocado por m duas vezes em António.

Pelo metodo NI, os erros são iguais:
R1: 2 ch, 1 pl e 1 fr
R2: 2 ch, 1 pl e 1 fr

Usando um 'reconstrutor' do tipo RSa permite corrigir a ortografia de António e a frase R2 fica correcta. Usando o reconstructor RSb não se obtêm melhorias porque a frase R1 continua errada. Com efeito mesmo sabendo que se trata dum combate de boxe de homens as frases E1 e R1 são ambas verosimilhantes. A frase R1 continua com um erro 'insanável'.

A3.3 — LINGUAGENS

A3.3.1 — Introdução Recapitulativa, (v A2.1).

A3.3.1.1 Vocabulário

O vocábulo 'linguagem' tem aqui um sentido muito vasto porque abarca todos os modos de descrever uma 'forma'.
Os seres vivos estão munidos de certas atributos inatos e adquirem, por aprendizagem muitos outros. Os mais primitivos modos de diálogo são de compreensão muito geral e ultrapassam a barreira das espécies.

Uma linguagem implica a existência de quem a saiba emitir e receber, ou seja, deverá conhecer palavras e frases e as regras a que estão submetidas, a sua estrutura. As linguagens cujas 'regras' são de aplicação universal e estrita dizem-se 'formais'; as restantes toleram imperfeições e excepções mas ambas têm campos de aplicação apropriados.

A3.3.1.3 Exemplos de Linguagens Formais

Alguns exemplos ilustram quais as linguagens formais mais frequentemente usadas para descrever certas operações reais ou virtuais:

a) ***Anéis***. Numeradores, paginadores, etc..
b) ***Grupos, anéis e corpos.*** Medição de comprimento, massa, volume, temperatura, etc..
c) ***Módulos, vetores.*** Deslocamento, força, corrente, tensão, gradiantes, rotacionais, etc..
d) ***Afinores.*** Quando os espaços a representar são curvos.
e) ***Distribuições.*** Quando é possível colher amostras com dimensão e significado suficientes.
f) ***Reticulados***. Contra-domínio previlegiado das funções que têm por domínios os anéis.
g) ***Caracterizantes.*** Matemáticas Vagas ou *Fuzzy*. Estas relações tomam valores em reticulados.
h) ***Grafos e redes.*** Classificações e taxonomias e quando se deseja particionar um sistema composto em operadores mais simples.
e) ***Modelação.*** Domínios como psicologia, arte, moral, etc., onde os especialistas criaram linguagens apropriadas.

A3.3.1.4 A *Modelação*

O método da *modelação* é de aplicação muito geral e consiste na seguinte lista de operações:

1 Especificar e simbolizar os seguintes conjuntos finitos cujos elementos representam entes reais ou virtuais, paradigmáticos ou referenciais, seres vivos ou artefactos inanimados:
   - **'entes'**, são os sujeitos activos ou passivos das orações, os actores nos dramas e comédias.
   - **'instrumentos' de observação**, que vão projectar 'imagens', relacionar os 'entes' com as suas 'imagens' ou com outros 'entes' e assim relatar uma história vista sob o ponto de vista desse 'instrumento observador'.
   - **'Imagens'**, são o resultado da aplicação de 'instrumentos' a 'entes' ou até a 'imagens de entes'.

2 Construir um conjunto de algoritmos que permitam apreciar da qualidade da *modelação* referida em **1**, nomeadamente se existe uma certa verosimilhança entre o 'modelo' e o que se pretende imitar. Refere-se em particular os operador que avaliam a 'proximidade' entre uma dada imagem e uma outra considerada paradigmática ou tomada para 'referência'

3 Se o processo for susceptível de particionamento, é recomendável a representação por meio de grafos, onde os nós representam as partes e os arcos as interacções entre as partes.

A3.3.2 — Frases Holónicas

Frequentemente esta expressão será invocada e convém apresentar o seu significado semântico desde já. Em geral as frases são complexas e encerram muita informação simples ou holónica, por exemplo:

> *«Chovia, de botas, casacão e chapéu de chuva pretos*
> *João descia a avenida numa segunda feira... »*

As frases holónicas contidas na frase são:

'numa segunda feira'	é o tempo, a ocasião
'chovia'	é o estado do clima
'de botas'	João calçava botas
'casacão'	João vestia casacão
'chapéu'	João leveva chapéu
'pretos'	botas são pretas
	casacão é preto
	chapéu é preto
'de chuva'	chapéu é de chuva
'João descia a avenida'	

A vantagem desta análise, atomização ou holonização, reside na facilidade de acesso directo a cada frase holónica e assim, se for necessário, saber quem usava casacão numa dada ocasião, a frase holónica *'João vestia casacão'* estará disponível e até porventura já arquivada na lista das pessoas que vestiam 'casacões'.

Usar as frases holónicas como 'átomos' de informação parece ser mais razoável do que a utilização de frases complexas ou palavras isoladas. Contudo, há que não esquecer de relacionar a frase holónica com a frase complexa onde está inserida. Uma frase holónica configura uma relação entre dois elementos e uma frase complexa um sistema de relações.

A3.3.3 — Estruturas de Linguagens Formais

As 'regras' a que uma linguagem deve obedecer tem fins específicos, como por exemplo :

a) Reconhecer se uma palavra ou caractér pertence aos Repositórios de caracteres e palavras da linguagem.

b) Reconhecer se uma frase, embora construída com palavras 'reconhecidas' são 'frases bem formadas' `fbf`, isto porque só as frases do Tipo `fbf` pertencem à linguagem.

c) Existe uma ou várias linguagens anexas externas que permitem apurar os atributos da linguagem.

d) Dispor de uma ou várias linguagens semânticas que permitam a versão e retroversão de frases em lingugem formal e o universo exterior descrito em linguagem semântica.

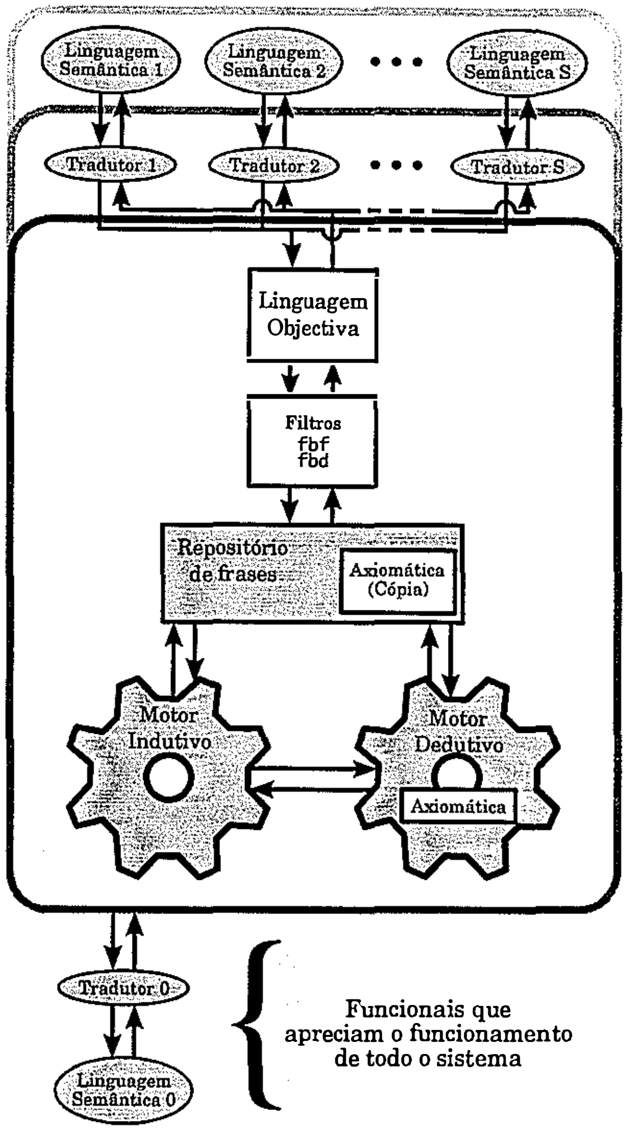
e) Dispor de um conjunto 'motor' que permita a construção, a dedução de frases `fbf`, cujo nível de 'verdade' está ligado ao nível de 'verdade' das frases que foram invocadas na sua construção, as regras de inferência. Essas frases do tipo `fbf` dizem-se bem deduzidas, `fbd`. Designam-se também por axiomática ou sintaxe da linguagem.

f) Eventualmente, dispor de um motor que permita construir novas regras de 'inferência' a acrescentar às referidas em **e)**.

A linguagem formal recorre a estruturas algébricas e topológicas várias, que vão dum simples conjunto munido de uma relação de ordem, passando por dispor duma conectiva (grupos), duas conectivas (anéis, corpos e reticulados), os anteriores e conectivas externas (vectores, afinores) dispondo ou não de métricas, etc. Tudo isto tem de ser especificado em **e)** indicando os respectivos domínios e contradomínios.

• Ver figura na página seguinte ➠

Linguagem Formal/Objectiva



A3.4 — TRADUTORES

A3.4.1 — Operações sobre Imagens e Reversibilidade

Uma imagem pode ser transportada, traduzida e dum modo geral alterada. A relação entre a imagem de partida e a de chegada será simbolizada por RL, como em: $I_b=RL(I_a)$, significando que a imagem I_a foi transformada em I_b pela relação RL. I_a e I_b não pertecem necessariamente à mesma linguagem e então RL configura um tradutor. A relação inversa de RL simboliza-se por RI.

O par (RL,RI) pode pertencer à classe das relações reversíveis se existirem dois conjuntos não vazios $\{I_A\}$ e $\{I_B\}$, tais que sejam verificadas as duas igualdades $I_b=RL(I_a)$ e $I_a=RI(I_b)$, para todo o par (I_a,I_b) pertencente ao produto cartesiano $\{I_A\}\times\{I_B\}$.

Se as condições de reversibilidade não forem satisfeitas então é porque se verificou uma certa 'corrupção' nas imagens emitida e/ou retro-transmitida e daí uma correspondente perda de informação.

A3.4.2 — Aplicação a Frases, Erros de Informação (v. A2.3).

Partindo duma frase Fa, bem formada e bem deduzida, seja Fb uma corrupção de Fa que incidiu em algumas palavras de Fa. Uma medida do erro pode ser o número de palavras erradas, o que é representável por uma função-medida, e que configura um atributo de natureza 'extensiva'.

Mas as palavras 'erradas' podem ser qualificadas ou graduadas de acordo com a importância, gravidade ou intensidade do erro, e.g.:

|a erro ortográfico corrigível eventualmente.
|b diminuição do domínio de aplicação da frase.
|c alteração do significado da frase.

A qualificação ou graduação dos erros |a, |b, |c pode ser por exemplo:

|a = 1
|b = 3
|c = 9

O erro final será avaliado multiplicando cada palavra errada pelo 'grau' do erro correspondente e adicionando os resultados.

Este exemplo serve para uma primeira apresentação de atributos do tipo extensivo (número de palavras erradas) e do tipo intensivo (grau ou importÂncia), conferidos ao erro.

A3.4.3 — Conteúdo Informativo

Num sistema com axiomática imperativa, isto é, dispondo de linguagem formal, todas as 'formas' que o sistema pode configurar podem considerar-se susceptíveis de descrição nessa linguagem. O desenvolvimento do sistema, ou seja, a demonstração de todas as frases do tipo bem deduzidas, fbd, permite a construção do universo das frases do sistema e simultaneamente o universo de todas as 'formas' que pode configurar. A definição duma funcional CI, que tenha por domínio os conjuntos formados por frases desse universo e que avaliasse o 'conteúdo informativo' desses conjuntos é tarefa essencial para completar a caracterização duma 'forma'.

Algumas sugestões de Regras a que o conceito de 'conteúdo informativo' CI, poderia estar sujeito.

a) Símbolos

U União de Conjuntos
∩ Conjunção de Conjuntos
F__ conjunto de frases
Fd_ conjunto de frases fbf e fbd
Fb_ conjunto de frases fbf mas não fbd
Fx_ conjunto de frases 'regras de inferência'
UF__ conjunto universal onde F__ ⊂ UF__
P(UF__) conjunto das partes de UF__
UFx conjunto reunião de todas os Fx_ da 'axiomática' da linguagem, ou 'motor' de 'inferência' ou de 'dedução'.
Ret_ (U,⊕,⊗,>>) uma relação de ordem e duas conectivas conjugados, e.g.: reticulado, anel, corpo.
CI 'conteúdo informativo' configura uma função cujo domínio são os conjuntos de frases contidos num determinado conjunto universal de frases e toma valores num reticulado, como por exemplo o de Zadeh.

b) Regras Gerais

R1 O 'conteúdo informativo' dum conjunto F__ é sempre avaliado em relação ao 'conteúdo informativo' dum conjunto universal UF_ que contém F__.

R1.1 CI(∅)=0.

R1.2 CI(UF_)=1.

R1.3 0 < CI(F__) < 1.

R1.4 CI(F_a ∪ F_b) << CI(F_a) ⊕ CI(F_b), se F_a ∩ F_b=∅.

c) Regras Específicas

c1) Aplicáveis a "frases holónicas", u, v contidas num dado conjunto universal de frases holónicas, UFh cujo cardinal é #(Q) finito.

R1.5 CI({u}) = CI({v}), donde os teoremas seguintes:

tR1.5.a CI({u}) ⊗ #(Q) = CI(UFh) = 1,
para todo o conjunto {u}⊂UFh e #({u})=1.

tR1.5.b $\sum_{\{x\}\in UFh} CI(\{u\}) = CI(UFh)=1.$

Notar: Se CI tomar valores nos reais então é legítimo fazer-se CI({u})=1/#(Q).

c2) Aplicação a UFx, a axiomática duma dada linguagem.

Seja UFxh o conjunto de frases holónicas obtidas da 'holonização' de todas as frases de UFx e seja #(Qh) o cardinal de UFxh. Aplicando a regra **R1.5** obtém-se do teorema **tR1.5.a**, a expressão: CI({hu}) ⊗ #(Qh) = CI(Ufxh) = 1, para todo o {hu} ⊂ UFxh e #({hu})=1. Se se tratar de reais então será ainda CI({hu})=1/#(Qh).

c3) Aplicado a repositórios

CI(10 livros iguais) = CI(qualquer dos livros)
CI(uma cópia fiel) = CI(original)
CI(uma frase com redundâncias) = CI(essa frase sem redundâncias)

A3.4.4 — Valor da informação

A 'mensura' dos erros de tradução, mostram que não são suficientes os métodos NI, não interpretativos, para bem caracterizar e estabelecer uma distinção entre frases com significados diferentes, reparáveis ou não mas que tenham a mesma contagem de erros.

O metodo NI não configura uma relação de ordem estrita de frases porque frases diferentes com igual número de erros são incluídas na mesma classe de equivalência. Quando um atributo não é suficiente para destrinçar situações ou estados distintos é sinal de que é necessário introduzir um ou vários novos atributos.

Assim, propõem-se um novo tipo atributos os quais serão designados genericamente de 'valores' da informação. Todos os métodos de valoração económica cabem no tipo referido, mas por demais conhecidos dispensam-se exemplos.
Seguem-se alguns exemplos:

Exemplo 1

Sejam dados 2 pacotes contendo livros duma mesma edição, um com 10 e outro com 15 livros. Ambos têm o mesmo 'conteúdo' informativo, que é o 'conteúdo' dum livro.
Mas para estabelecer uma diferenca entre 1, 10 ou 15 livros, vai introduzir-se um novo atributo que será designado por 'valor_Q' que se aplica a conjuntos de livros iguais, como por exemplo, o 'valor_Q' dum conjunto M, é descrito por uma função

monótona crescente, V_{mc}, duma função-medida V_{md} do conjunto M, ou seja, valor_Q=$V_{mc}(V_{md}(M))$.
Aplicando ao caso de M_1 ter 1 livro, M_2 tem 5 iguais e M_3 10 e as funções forem V_{md}=#(M) (cardinal de M) e V_{mc}=1+LN(V_{md}), obtém-se por composição: valor_Q= =$V_{mc}(V_{md}(M))$ = 1+LN(#(M)) e substituindo teremos:

$V_{mc}(V_{md}(M_1))=2.6094$
$V_{mc}(V_{md}(M_2))=3.302$
$V_{mc}(V_{md}(15))=3.708$

Desejando que o 'valor_Q' seja uma função-medida, então $V_{mc}(V_{md})$ terá de ser uma função linear, e.g.: $V_{mc}=k_1+k_2\times V_{md}$ e daí compondo, obtém-se: valor_Q= =$V_{mc}(V_{md}(M\_)) = k_1+k_2\times V_{md}(M\_)$.

O sistema de 2 atributos ('valor_Q', 'conteúdo'), já distingue os três pacotes.

Exemplo 2

Dois repositórios de informação, A e B dispõem de 'motores de inferência' iguais.
O repositório A recebe, a mais do que B, uma lista de teoremas não triviais.

Porque B dispõe de capacidade de inferência pode, se o entender, proceder à demonstração dos teoremas da lista enviada ao repositório A. Os 'conteúdos' informativos de A e B parecem iguais uma vez que B tem a possibilidade de deduzir os teoremas. Mas porque as duas situações não parecem 'iguais' porque B teve que despender esforço para deduzir os referidos teoremas, convirá corrigir esta situação introduzindo um novo atributo, o 'valor_L' da lista de teoremas enviada a A mas não a B.

Defina-se então 'valor_L' como uma função monótona crescente, V_{mc}, do número de frases holónicas fh depositadas nos repositórios de A e B. O 'valor_L' de A e B são diferentes e como no exemplo 1 o par (valor_L, 'conteúdo') já distingue A de B.

A3.4.5 — Atributos do tipo 'valor'

O conceito de 'valor' pode parecer uma solução *ad hoc* para resolver um problema, contudo constituiem uma classe de atributos onde, no futuro, será possível identificar alguns com mérito. Apresentam-se abaixo alguns 'valores'.

1 Número de frases holónicas existentes no repositório, classificadas ou não por linguagens distintas. Este conceito de valor aproxima o conceito de 'quantidade' de informação e é uma grandeza extensiva.
2 Como em **1** mas expurgadas as frases não bem formadas.
3 Como em **2** mas expurgadas as frases redundantes.
4 Como em **3** mas expurgadas as frases dedutíveis.
5 Número de caracteres ou *megabits* existentes no repositório, (valor=quantidade). Em relação a **5** podem também efectuar-se os expurgos feitos **2**,**3** e **4**.
6 Número de horas de trabalho ou de computação.
7 Valor monetário de aquisição da informação.

A3.4.6 — Notas

N1 A teoria da informação clássica assenta no pressuposto de ser sempre possível construir uma distribuição com um número suficiente de pontos para poder ser trabalhada pelos métodos da teoria das probabilidades e estatísticos.
Mas a avaliação da 'informação' perdida em consequência de erros isolados ou em pequeno número ou do 'conteúdo informativo' de repositórios ou de frases complexas, já esses métodos não são aplicáveis e haverá que adoptar outros.
Quando é possível obter uma distribuição com suficiente representatividade e dimensão do estado do sistema então é possível usar funcionais tais como a entropia-formal $S = \sum p \cdot \ln(p)$.

Se o sistema estiver num estado macro-homogéneo no domínio onde foram colhidos os dados para construir a distribuição, a função entropia-formal tem duas propriedades importantes:

- é uma função monótona da heterogeneidade do sistema.
- é uma medida, tal como acontecia com a entropia da termoestática clássica.

N2 Em casos como o instrumento operador ser muito fiável e gerar poucos erros ou quando os erros são provocados por um ruído cuja distribuição é conhecida, então os métodos do tipo NI, não interpretadores, são suficientes.
Nos métodos do tipo NI é usual acrescentar alguma informação redundante, como por exemplo enviando o valor duma funcional das frases (número total de *bits* ou a paridade), então será possível ao receptário da mensagem verificar se houve ou não ocorrência de erros e pedir uma segunda emissão da frase errada.

N3 Em casos mais gerais como traduções, frases codificadas, a existência ou não de descodificadores, corrupções extensas e não produzidas por um ruído de natureza conhecida, etc., então os métodos do tipo interpretativos, SI, são essenciais.

N4 *Conjuntos Universais.* Porque todo o discurso semântico deve decorrer sobre matéria bem definida, tal condição implica a declaração explícita dos 'domínios do discurso' também designados por 'conjuntos universais'.
Nos processos de 'observação' convem referir os seguintes:
UE 'entes' em observação, os emissores de informação.
UO instrumentos de observação.
UI 'imagens' obtidas.
Dado que um instrumento genérico O_i tem limitações tanto quanto à sua capacidade de observar 'entes' como de emitir as 'imagens', é essencial que se definam os domínios de 'bom funcionamento' desse O_i e sejam:

- $UE_i \subset UE$, UE domínio de O_i,
- $UI_i \subset UI$, UI contra-domínio de O_i.

Formalmente, O_i configura uma 'relação' descrita por um conjunto de pares (a,b) pertencentes ao produto cartesiano $UE_i \times UI_i$.
Sejam LE_i e LI_i as linguagens de suporte usadas em UE_i e UI_i, respectivamente. Então o observador O_i pode entender-se como um tradutor da linguagem LE_i na linguagem LI_i.
As linguagens LE_i e LI_i possuiem algumas regras, são estruturadas e essas regras deverão ser respeitadas no processo da formação de frases bem como na da sua interpretação.
Porque podem conceber-se e até construir operadores cujos domínios (com e contra) são 'imagens' e não 'entes reais' e porque os entes podem ser também 'virtuais', a distinção entre 'entes', reais, virtuais e 'imagens' só será tida em consideração nos processos de natureza interpretativa.

N5 *Classes de Equivalência de Observadores e de Entes.* A formação de classes e até de taxonomias é uma das primeiras operações a realizar quando se procede a investigação 'explorativa'.
Os 'instrumentos' de Observação e as 'imagens' servem para classificar os 'entes' e as 'imagens' e os 'entes' servem para classificar os 'instrumentos'.

B1 — MENSURA

B1.1 — INTRODUÇÃO OU CONCEITO DE 'MENSURA'

B1.1.1 'Observação' e 'Mensura'

Observador e Observado. No processo da 'observação' intervêm dois 'entes', o 'observado' e o 'observador' e esse processo de interacção consiste na 'transferência' de 'atributos' de 'formas', utilizando para o efeito um terceiro 'ente', o 'instrumento' de observação. O Instrumento, real ou virtual, desempenha a função de efectuar o 'trânsito' do 'observado' para o 'observador. Os 'atributos' vêm suportados em 'suportes' energéticos e/ou materiais.

Tem interesse apreciar este 'trânsito' segundo vários pontos de vista:

a) **Linguístico**
Sob o ponto de vista 'linguístico', o 'instrumento' configura um 'tradutor' ('versor') da Linguagem do 'observado' para Linguagem do 'observador'.

b) **Atributivo**
Porque os 'instrumentos' foram afeiçoados para apreciar os 'atributos' das 'formas', o processo da 'observação' consiste em transferir múltiplos de 'atributos' do 'observado' até ao 'observador'. E.g.: temperatura, pressão, peso, formas geométricas, composições químicas, atómicas, atributos de biotas, estruturas cristalinas, etc..

c) **Imagens**
A especialização instrumental e a respectiva imagem atributiva obrigaram a escolher espaços de representação, 'Espaço Imagem', com um número de dimensões igual ao número de atributos que é necessário observar. Espera-se que, em cada situação concreta, seja possível reconduzir a um número finito os 'atributos' a observar e daí as dimensões da imagem que é necessária à descrição do ente ou processo em observação. Procura-se ainda que a imagem final a ser apreciada pelo observador humano tenha uma dimensão pequena.

B1.1.2 — Colheita de atributos das 'formas'

Há muitos modos de 'colher' os 'atributos' das 'formas'. Apresentam-se alguns, os mais típicos:

a) **Retirar sem repor**
Usado em química, mineralogia, biologia, agronomia, indústria, testes destrutivos de materiais, etc.

b) **Excitar e Observar**
Usado em física e ciências ligadas a biotas, veja-se, humanas.

c) **O 'observado' é um 'emissor'**
Presume-se que o observador ao 'colher' uma parte do que é emitido por O_ não altera as condições da experiência. E.g.: radiações do urânio ou das estrelas.

B1.1.3 — Pressuposto do Acto de Observar

Nas 'observações', 'amostragens', 'colheitas de formas', é "pressuposto fundamental" que aquelas operações se fazem à custa duma alteração do estado do 'observado' e do 'observador' e até com perda ou redução de alguns atributos.

Este "presuposto" acarreta para quem preparou a 'observação' ou a 'experiência', o 'ónus da prova' que o processo escolhido "não" vai alterar significativamente o 'observado' e se tal aconteceu, ter esse facto em conta. O "Pressuposto da Observação" pode também entender-se como um meta-teorema das Linguagens que participam no processo.

B1.1.4 — Economia, Fiabilidade e Imagem suficiente.

A escolha dos 'atributos' representa um "compromisso" entre a 'economia' e a 'fiabilidade' desejadas e daí que se busque observar os 'atributos essenciais' ou 'suficientes'. Todo o esforço da ciência tem sido descobrir quais os atributos 'suficientes' para caracterizar um ente ou dominar uma observação ou experiência.

Este objectivo, economia de esforços, também se estende à escolha do rigor das observações em função da natureza dos atributos, e.g.:

0 ou 1 quando basta saber se sim ou não é verdade ou foi observado.
A..M quando o conhecimento é graduado e finito.
Reais só se for necessário a maior precisão.

B1.1.5 — 'Mensura'

Uma experiência virtual vai servir para apresentar o processo da 'mensura'. Uma 'mensura' tem por fundamento um processo de 'interacção' entre dois 'entes', o que vai ser 'mensurado' e o que desempenha a função de 'instrumento de observação'. Os vocábulos 'mensura' e 'observação' são próximos e é a finalidade que os distingue, uma 'mensura' pode entender-se como uma 'observação' cujo resultado é quantificado.

Admite-se que num processo de 'interacção', ambos os 'entes' sofrem uma 'perturbação'. Rompe-se quer a estabilidade quer a estacionaridade desses 'entes' embora na generalidade o fenómeno seja transitório. Esta 'perturbação' mantém-se durante algum tempo e verifica-se numa certa 'região de influência', que aqui será designada simplesmente por 'região'.

Para que uma dada 'observação' tenha alguma fiabilidade é essencial que as 'perturbações' resultantes de 'observações' anteriores ou concomitantes se tenham extinguido tanto na 'região' do espaço 'perturbada', bem como no 'instrumento' que observa. A condição acima, implica que quaisquer duas 'mensuras':

- se na mesma 'região', estejam suficientemente 'afastadas no tempo'.
- se simultâneas, mas em 'regiões' distintas, estejam 'afastadas' no espaço.

B1.2 — SIMBOLOGIA E FORMALIZAÇÃO DA 'MENSURA'

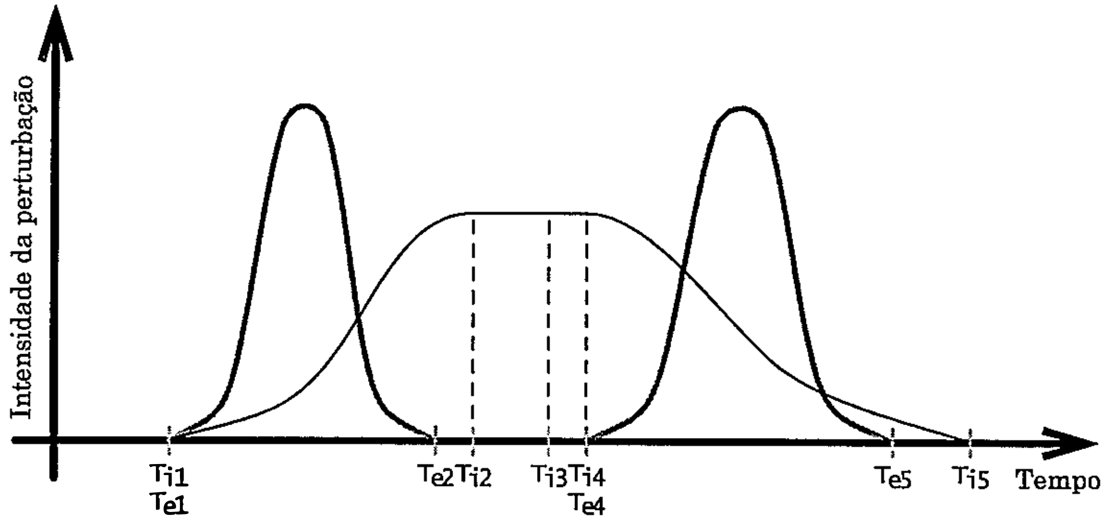
B1.2.1 — Evolução no tempo duma 'mensura'

Sejam:

`e`	'Ente' em observação.
`i`	'Instrumento' de observação.
$T_{??}$	Tempo, um real em `[0..∞)`.
$dT_{??}$	Uma diferença de tempos.
T_{i1}	Início da 'interacção' para o 'instrumento'.
T_{e1}	Início da 'interacção' para o 'ente' em observação.
T_{i2}	Fim da 'perturbação' no 'instrumento'.
T_{e2}	Fim da 'perturbação' na 'região' afectada do 'ente'.
T_{i3}	Fim do período de estacionaridade no 'instrumento'.
T_{i4}	Fim da 'interacção' para o 'instrumento'.
T_{e4}	Fim da 'interacção' para o 'ente'.
T_{i5}	Fim da 'perturbação' no 'instrumento'.
T_{e5}	Fim da 'perturbação' no 'ente'
dT_{ie}	Duração total do processo.
dT_{12}	Duração da perturbação inicial.
dT_{24}	Duração do período estacionário.
dT_{45}	Duração da perturbação Final.
`RgP`	Região de perturbada.

Admitindo que $T_{i1}=T_{e1}$ e $T_{i4}=T_{e4}$ podem escrever-se as seguintes expressões:

$$dT_{12} = \max(T_{i2}, T_{e2}) - T_{i1}$$
$$dT_{24} = T_{i4} - \max(T_{i2}, T_{e2})$$
$$dT_{45} = \max(T_{i5}, T_{e5}) - T_{i4}$$
$$dT_{ie} = \max(T_{i5}, T_{e5}) - T_{i1} = dT_{12} + dT_{24} + dT_{45}.$$



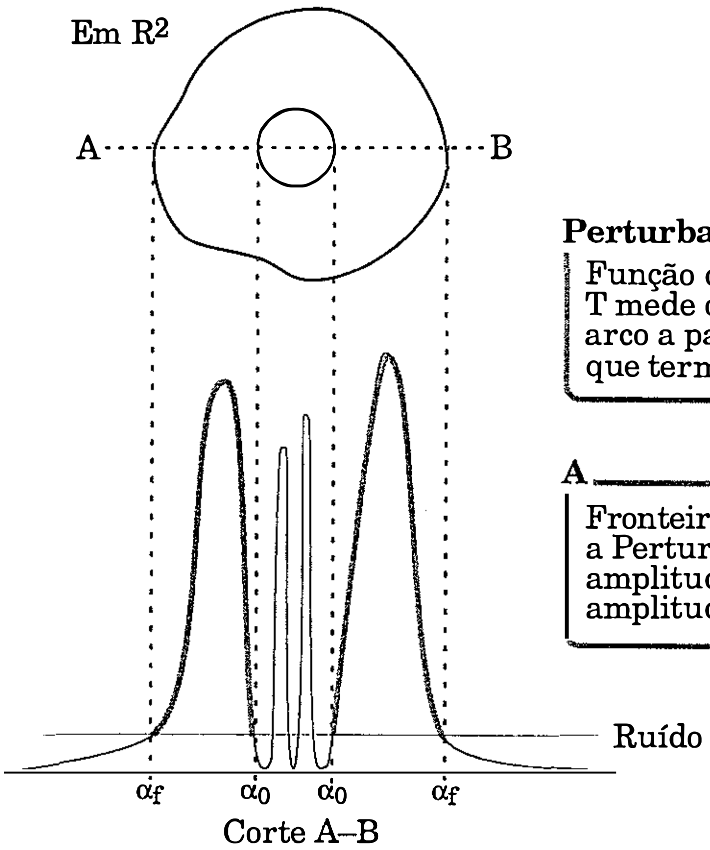
$$T_{i1} = T_{e1}$$
$$T_{i4} = T_{e4}$$
$$dT_{ie} = \max(T_{i5}, T_{i1}) - T_{e5}$$

Concluindo, para uma sucessão de 'observações' ou 'mensuras' feitas na mesma 'região' do espaço, será necessário que medeie entre elas um intervalo de tempo dT_0 que deverá ser maior do que dT_{ie}.

B1.2.2 — Evolução no espaço duma 'mensura'

Admite-se que as 'regiões' perturbadas são simplesmente conectadas e finitas. Diz-se 'finita' se a distância entre quaisquer dois pontos da fronteira é finita. Estas hipóteses acentam na existência dum ruído de fundo não imputável à 'interacção' e que está sempre presente em todas as 'observações' ou 'mensuras'. Assim, quando a amplitude da 'perturbação' está abaixo dum certo valor, esta não emerge desse ruído de fundo. Em espaços com 3 dimensões, estas 'regiões' são 'bolas' finitas mas podem ser elipsóides se o 'ente' for anisotrópico e até esferas se isotrópico.

Concluindo, para que 'observações' ou 'mensuras' feitas simultaneamente mas em 'regiões' diferentes não sejam 'perturbadas', será necessário que essas 'regiões' estejam 'afastadas' de modo que se não intersectem, isto é, sejam disjuntas.



Perturbação

Função de tempo P(T) onde T mede o comprimento do arco a partir do início α_0 e que termina em α_f.

A

Fronteira da região quando a Perturbação atinge uma amplitude menor que a amplitude do ruído.

B1.3 — DISCRETIZAÇÃO E PARTIÇÃO

B1.3.1 — Propriedades das n-bolas

Quando for conveniente explicitar a dimensão do espaço, será anteposto, n- , como em: 'n-bola', n-Par, n-elipsóide, n-paralelepípedo, etc.. R^n é simbolo dum espaço produto cartesiano de reais com n dimensões e munido de métrica, e.g.: R^1, R^2, R^3... O 'ente' em observação está projectado em Rn e a 'região' perturbada é uma 'n-bola' simplesmente conectada e 'finita' (v. **B1.2.2**). Notar que ser 'finita' implica que o seu n-volume tambem é finito. Seja n-Par o conjunto de todos os n-paralelotropos que são 'coberturas' da referida 'n-bola', então o n-Par contém a 'n-bola'.

Designando por:

D_{max} a distância máxima entre dois pontos da fronteira dum n-paralelotropo,
V o n-volume dum n-paralelotropo,
n-Par/D o conjunto dos n-paralelotropos de n-Par cujo D_{max} é igual ao ínfimo,
n-Par/V o conjunto dos n-paralelotropos de n-Par cujo n-Volume é igual ao ínfimo,

então podem tirar-se as consequências seguintes:

- Se os 'atributos' do 'ente' dependerem da posição e do tempo, as n-bolas variam igualmente com esses dois parâmetros.
- n-Par/D e n-Par/V podem ser disjuntos.
- Se não forem disjuntos, os elementos comuns são os preferidos.
- Se os elemntos de n-Par forem n-elipsóides, então preferem-se os do tipo n-Par/D.
- As dimensões dos n-eixos principais do n-elipsóide são iguais às n-arestas ortogonais do n-paralelepípedo correspondente.
- Se a 'n-bola' for uma esfera então o n-Par/min é um n-cubo cujas arestas são iguais ao diâmetro da n-esfera.
- Notar que em geral, n=3 mas há problemas que se resolvem em n=2 e até em n=1.

B1.3.2 — Discretização e Partição

Seja $R^n \times R^1$ o produto cartesiano de R^n, o espaço de projecção do 'ente' e por R^1, o da variável dT_{ie}. O (n+1)-múltiplo $(x_1,..,x_n,dT_{ie})$, sumariza toda a informação sobre os mínimos a respeitar quer quanto ao afastamento das 'regiões' perturbadas quer quanto aos tempos de recuperação da 'região' perturbada e do 'instrumento'.

Se for necessário *discretizar* o espaço R^n e/ou R^i os mínimos acima referidos constituem um bom critério para definir o espaçamento da retícula.

Os n-paralelotropos/mínimos podem servir de modelo para a construção das partes duma *partição* de R^n e identicamente quanto a R^1.

B1.3.3 — Finura duma Partição

O conceito de 'finura' está consubstanciado neste exemplo: partir um bolo em 9 partes iguais é partir mais fino do que parti-lo em 3 partes iguais.

Se as partes duma partição não forem iguais como extender este conceito a estes casos? Vejamos algumas hipóteses de definições:

F1 Uma partição P_1 será mais 'fina' do que P_2 se P_1 se obtém de P_2 pela partição de pelo menos uma parte de P_2.

F2 Idem mas aplicado a todas as partes de P_2.

F3 P_1 será mais fina do que P_2 se qualquer parte de P_1 'cabe' em qualquer parte de P_2. Consideram-se as partes como figuras em R^1, R^2, ou R^n, e.g.: polígonos, poliedros, esferas etc., e daí ter sentido dizer-se 'caber'.

Aplicações correntes são a discretização do contínuo e a digitalização de sinais. Para o efeito, execute-se a partição dum domínio D^n dum R^n em N partes iguais e N suficientemente grande para que as partes sejam suficientemente pequenas, para ser razoável considerá-las homogéneas ou seja, com as propriedades específicas muito próximas em todo o domínio duma dada parte.

Então é justificado usar a média duma propriedade específica extendida a todo o domínio da parte como o valor representativo dessa parte. Notar que em vez da média pode usar-se o valor no centróide da parte ou método equivalente.

Todas as funções do ponto do domínio D^n são substituídas por um conjunto de N valores e N finito. Pode dizer-se que o contínuo foi discretizado ou ainda que se 'digitalizou' D^n.

B1.4 — MODOS DE RECOLHER FORMAS E SEUS ATRIBUTOS

B1.4.1 — Introdução

Seja dado um rectângulo desenhado num papel A4 e comparem-se os dois modos típicos de o 'observar' e guardar a imagem da sua forma:

- **Modo Sincrético.** Reter a forma geométrica fotocopiando-a. É necessário que estejam disponíveis os instrumentos capazes de identificarem propriedades tais como: 'linearidade', paralelismo, ortogonalidade, comprimento dum segmento de recta, etc..
- **Modo Atributivo.** 'Observar' e/ou 'mensurar' uma colecção de atributos da 'forma' desse rectângulo que se considerem suficientes para a identificar. É necessário construir uma funcional capaz de 'identificar', 'descriminar' imagens, uma vez que não se dispõem de 'atributos'.

B1.4.2 — Modo Atributivo

A escolha deste método vai depender da disponibilidade dos 'instrumentos' para realisar as 'observações', do tempo disponível e do custo destas tarefas. A 'observação' dos atributos pode ser feita começando pelos que estão disponíveis ou são mais rápidos ou menos caros. É este o método usado nos *expert systems* médicos. O rigor da identificação pode assim ser progressivamente incrementado, acrescentando 'atributos' ou avaliando melhor os já observados, mas também o tempo consumido e o custo vão aumentado.

B1.4.3 — Modo Sincrético

São usados há milénios e ainda hoje, quando apenas se dispõem dos 'instrumentos naturais' de que os biotas são dotados, os sentidos externos e internos. Alguns exemplos :

- **Feromonas**, quasi todos os animais os usam na 'identificação'.
- **Sons**, no sentido de gritos e interjeições.
- **Reconhecimento pela vista**, identificação feita por testemunhas dos objectos e pessoas.
- **Mímica, gestos, comportamentos,** etc..

Os biotas parecem realizar as identificações do tipo sincrético sem uma análise atributiva, o que é muito semelhante ao modo de operar duma rede neuronal.

Realizar a identificação sincrética por meio de artefactos é hoje um domínio de investigação muito activo e há já instrumentos para identificar impressões digitais, radiografias, assinaturas, etc. por métodos não atributivos.

B1.4.4 — Comentário

É possível que o método sincrético tenha um fundamento atributivo mas parece que o indivíduo não tem consciência de quais os 'atributos' que está usar e como consegue extraír deles a 'conclusão' que o habilita a declarar se sim ou não 'identifica' a imagem.

Uma rede neuronal pode aprender a distinguir N imagens, contudo, não é possível identificar na rede 'atributos' nem a funcional identificadora. A rede neuronal não recebe propriamente uma imagem fotográfica mas sim um conjunto finito de múltiplos, cada um destes em correspondência com uma parte duma partição daquela imagem.

O interesse é crescente sobre o modo como os biotas 'aprendem'. Esforços importantes são feitos para encontrar algoritmos mais robustos e rápidos para realizar identificação sincrética.

A. G. Portela.
Lisboa, 16/Março/1997

B2 — GRAFOS E HIPER-GRAFOS

B2.1 — GRAFOS COMO IMAGENS DE PARTIÇÕES

B2.1.1 — Simbologia

Grafos

GR	Grafo
UNO	Conjunto Universal dos nós dum grafo.
#(UNO)	Cardinal de UNO, sempre finito.
NO_	Nó dum grafo, onde (_) representa o índice desse nó.
ARgh	Arco orientado do NOg para o NOh. A ordem dos índices em AR__ corresponde à ordem dos nós de partida e chegada.
UGR	Conjunto Universal de arcos possíveis em UNO×UNO.
UG	Sub-conjunto de UGR, conjunto dos arcos de GR.
RT	Reticulado, e.g.: booleano, Zadeh, duplo Zadeh, etc..
A(gh,hg)	Aresta, o par de arcos orientados ARgh e ARhg.
V(AR__)	Valor do arco AR__, função cujo domínio é UGR e toma valores em RT.
CM	Caminho, uma sucessão de nós ligados por arcos que partem dum nó e terminam no nó que lhe sucede estritamente.
CRC	Um caminho em que o nó inicial é tambem o terminal.

Partição dum 'ente'

E	Conjunto a ser particionado em q partes.
PE	Partição de E.
#(PE)	Cardinal da partição PE.
E_	Uma parte da partição PE.

Matrizes associadas

MLC	O conjunto de índices 0,1,..,q. O índice 0 representa Uent e os restantes os nós, ou seja as partes. Donde #(MLC)=#(PE)+1.
M	Matriz quadrada, onde o par (i,j) pertence a MLCxMLC.
Mij	Elemento genérico de M.

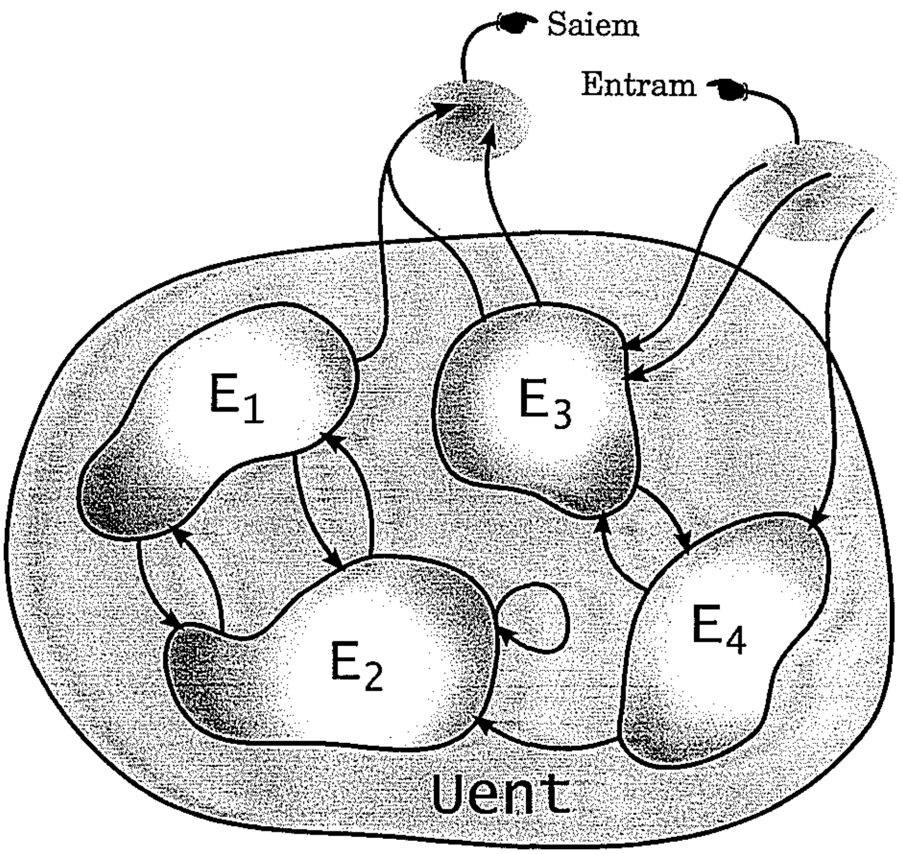
B2.1.2 — Partições de 'entes'

Seja dado um 'ente' E, definido por uma fronteira real ou virtual que o separa do 'resto do Conjunto Universal' Uent. Por razões que não interessa referir nesta altura da exposição, procedeu-se à partição deste 'ente' E em q partes, E_1, E_2,..,E_q , sendo q finito. Fronteiras reais ou virtuais definem as partes da partição e estas satisfazem as regras duma partição, as partes são disjuntas tomadas duas a duas e a reunião de todas as partes refazem E.

Em resumo, o conjunto Universal Uent sofreu para este efeito uma 2-partição, E e 'não' E, e a parte E sofreu uma q-partição.

Parece que tudo foi dito, porém falta descrever como se processam as 'interacções' das partes E_i entre elas e, reunidas formando E, como se processam as 'interacções' entre E e Uent. O uso dum hipergrafo permite descrever os 'entes' quando particionados.

• Ver figura na página seguinte ➡



B2.1.3 — Regras a observar numa partição de 'entes'

Uma partição dum 'ente' real vai servir de paradigma para a preposição das regras. Trata-se duma 'partição simples', P_E, dum 'ente' E em q partes Ei, com i em 1..q.

P1 As regras duma partição são satisfeitas, disjunção das partes e reconstrução por meio da reunião de todas as partes.

P2 As 'interacções' de E com Uent são descritas por dois conjuntos finitos de arcos:
- Arcos de Entrada JE, arcos vindos de Uent e entrando em E,
- Arcos de Saída JS, arcos partindo de E e chegando a Uent.

P3 Particionado E em q partes Ei e i em 1..q, haverá que que ligar correctamente os arcos de JE e JS às partes Ei.

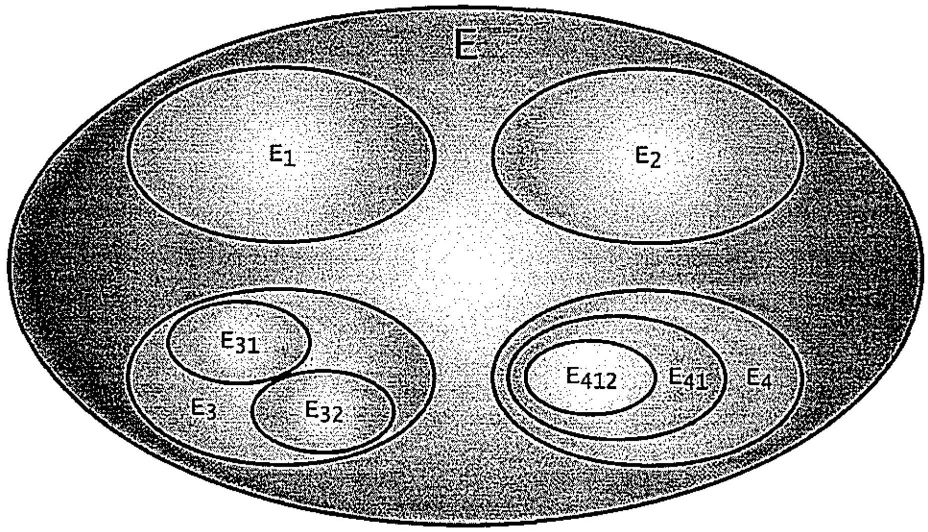
P4 Ligar as partes Ei entre elas. Não esquecer os arcos que partem dum nó e chegam a esse nó.

P5 Presupõe-se que a *'interacção' do conjunto universal* Uent, *com o 'resto do Universo', se exitir, não tem influência no 'ente'* E *e sua partição.* Uma definição mais forte mas mais usada é: *a fronteira de* Uent *com o 'resto do Universo' é isolante.* Também se diz impermeável ou fechada.

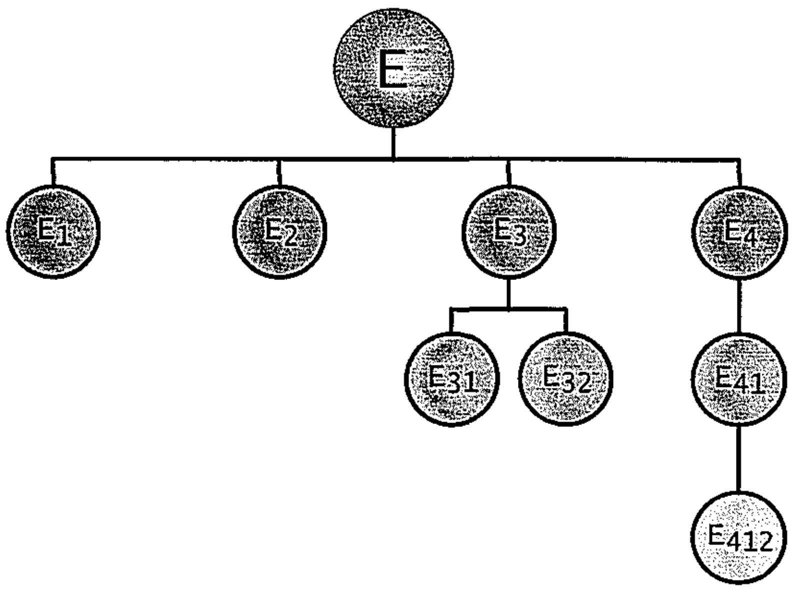
A regra **P5** não é imperativa mas se possível deverá ser satisfeita.

Nada impede que uma parte Ei venha a ser particionada em r partes Eij, com j em 1..r. Para o efeito, Ei desempenha o papel de E e este o de Uent e as regras **P1, P2, P3** e **P4** são aplicadas, contudo não pode ser aplicado **P5**, obviamente.

Este modo de proceder diz-se 'partição sucessiva' do 'ente' E e vai tomar a forma duma arborescência.



Arborescência



Também poderia efectuar-se uma 'partição directa', onde toda a parte `Ei..k` que for particionada é substituída pelas partes respectivas, ou seja, as partes da partição finalmente obtida são os extremos da arborescência.

B2.1.4 — Representação das partições

A forma mais figurativa é a dos "grafos" mas a "matricial" tem vantagens em alguns casos. A forma corrente para passar do "grafo" duma partição "simples" para a "matriz associada" é:

- Formar o conjunto de índices `MLC={0,1,..,q}` para representar as partes `Ei`, com `i` em `1..q`, e o índice `0` para representar o conjunto universal, `Uent`. Verificam-se as correspondências estritas seguintes:
  `PEi` de `PE` $\neq$ Parte `Ei` $\neq$ `NOi` do grafo para todo o `i` em `1..q` e ainda `PE0` $\neq$ `NO0`.
- Construir a matriz quadrada, `Mij` $\neq$ `MLCxMLC`, para representar as 'interacções' entre as partes, isto é, os arcos do grafo.

Interpretação de algumas formas típicas duma matriz M e seus elementos:

Mij correspode a V(ARij), valor do arco ARij.

Mij=0 significa que não existe o arco ARij.

V(ARij)≠0 e V(ARji)≠0
significa que existe uma aresta entre NOi e NOj.

Mij≠0 para todo o i,j em 0..q, significa que todos os nós interaccionam entre eles e com o exterior.

Mij=0 para todo o i,j em 0..q, significa que nenhum nó interacciona com algum outro nem com o exterior.

Mii≠0 significa que existe uma circulação que se inicia num nó e termina nesse nó.

CRC Se a matriz tiver circulações o processo é iterativo e haverá que prover o sistema dum interruptor.

B2.1.5 — Exemplos

A incluir oportunamente.

A. G. Portela.
Lisboa, 16/Março/1997

TRABALHO DE CASA (003)

a) **Estudar:** ler texto, tirar dúvidas e corrigi-lo eventualmente.
b) **Glossário:** extrair do texto definições e conceitos para completar o esquema de glossário, distinguindo os tipos de linguagens, e.g.:
- Português (sem símbolo)
- Formais M (Matemática, Lógica, etc.)
- Outras Z (Específica)

c) **Dicionário:** alfabético
d) **Lista:** de Quadros, Figuras e Tabelas.

MODELAÇÃO

AUTÓMATO VIRTUAL, AV

1) Preposição do Problema

Construir um AV em JAVA.
Expeimentá-lo virtualmente, em JAVA.

2) Descrição de AV.

O AV opera num domínio com 3 dimensões inteiras e está n-conectado, n-toro.

a) As fronteiras são dos seguintes tipos e quantidades:

`Fext` 1 com o 'exterior'.
`Faba` 3 com os 3 centros abastecedores de energia.
`Fobj` 5 com os 5 objectos a recolher.
`Fesc` 7 com os 7 escolhos.

b) As rotinas operatórias a realizar por AV são:

`Rot1` Quando AV recebe o 'comando externo' de "iniciar", AV 'procura localizar' um dos 3 centros de abastecimento de energia e, se bem sucedido, 'encaminha-se' para esse centro e, se este não estiver esgotado, 'abastece-se'.

`Rot2` Uma vez abastecido, AV 'procura localizar' um dos 5 "objectos" e, se bem sucedido, 'encaminha-se' para ele e 'recolhe-o'.

`Rot3` Terminada a rotina `Rot2`, o guião tem um 'ponto de ramificação':
- A energia disponível é menor que 20% da capacidade instalada em AV, e então regressa a `Rot1`.
- Não se verifica a situação anterior e então repete `Rot2`.
- Se a 'capacidade de transporte de objectos' de AV for esgotada então 'pára e avisa'.

c) As condicionantes prioritárias são .
- Qualquer que seja o estádio de execução em que se encontra AV, se a energia disponível for inferior a 5%, AV deverá procurar abastecer-se, `Rot1`.
- AV deverá evitar choques com fronteiras de qualquer tipo.
- Se AV não conseguir executar qualquer operação então 'pára e avisa'.

3) Trabalhos a Executar.

a) Partição do 'ente' AV.

1ª Partição de AV.
Descrever a partição por meio dum grafo.
Descrever matricialmente o grafo.

2º Série de Partições.

Para realizar uma boa descrição de AV, algumas ou todas as partes da 1ª Partição terão de ser igualmente particionadas

......

nª Série de Partições.

b) Escolha do conjunto de 'atributos' a observar nas 'formas' dos 'entes' interaccionantes com AV e no interior de AV.

c) Outros 'trabalhos' serão propostos, quando **a)** e **b)** estiverem concluídos, tais como:

- escolha do tipo de estruturas formais para descrever imagens e objectos, e.g.: grupos, aneis, corpos, múltiplos, vectores, módulos, reticulados, etc. etc..
- propor os algoritmos para 'emular': relações, funções, procedimentos e funcionais, etc..
- Juntar tudo e construir AV, virtualmente.
- Experimentar AV, virtualmente.
- Corrigir e repetir tudo tantas vezes quantas as necessárias.
- Se o processo iterativo convergir, é possivel que dentro de 3 anos, AV esteja a funcionar.

4) Dicas

a) A 1ª Partição deve ser feita usando o critério das "grandes funções" de AV e não o critério dos 'objectos físicos' de que AV é composto!
b) Evitar partições que impliquem grandes fluxos de informação entre as partes, porque 'carrega' muito os arcos.
c) Na escolha do conjunto de 'atributos' a observar nas 'formas' dos 'entes' que vão interaccionar com AV, convém assegurar um bom poder de descriminação.
d) Como medir o consumo de energia de AV? Usar as variáveis tempo e velocidade?
e) Reparar que na descrição das tarefas de AV, em muitas alternativas, só se descreve o que o proponente deseja, deixando livre a escolha do outro membro da alternativa. Há que explicitar esses outros membros.

Lisboa, 27 de Março 1997
A.G.Portela

TRABALHO DE CASA (004)

INTERPRETAÇÃO

A) PREPOSIÇÃO DO PROBLEMA

```
Frs1 = < Maria e Zé viram Pic morder na Julia >
Frs2 = < Maria declara  <todos os  cães mordem> >
Frs3 = < Zé     declara  <pelo menos Pic morde> >
Frs4 = < Silva declara  <ouvi Maria e José, vou pelo assaime> >
Frs5 = < Julia declara  <o Silva é mentiroso> >
```

B) QUAIS AS INTERPRETAÇÕES TRIVIAIS DO SISTEMA DE FRASES :

{Frs1, Frs2, Frs3, Frs4, Frs5}.

C) CONSTRUIR O GRAFO DAS 'INTERPRETAÇÕES' POSSÍVEIS E PROPOR A 'AQUISIÇÃO' DE INFORMAÇÃO COMPLEMENTAR PARA ESCLARECER ALTERNATIVAS.

Lisboa, 31 de Março 1997
A.G.Portela

COMPLEXIDADE

A — DISTÂNCIAS – MÉTRICAS, AFASTAMENTOS E PROXIMIDADES

Todas correspondem ao conceito semântico de *afastamento* entre objectos geométricos e têm de possuir propriedades mais ou menos restritivas para merecerem essa designação:

A1 — MÉTRICA (USUAL)

Seja:

X Um conjunto.
x,y,z elementos de X.
m Uma função tal que: $m: X \rightarrow \mathbf{R}$ (**R** conjunto dos reais)

$\forall x,y,z \in X$: 1) $m(x,y) \geq 0$
2) $m(x,y) = 0 \Leftrightarrow x=y$
3) $m(x,y) = d(y,x)$
4) $m(x,y) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Dotar um conjunto X de uma métrica m corresponde a criar um espaço métrico (X,m). Exemplos de distâncias que satisfazem as condições acima são a distância euclideana e a de Hamig (Manhattan).

A2 — DISTÂNCIA EUCLIDEANA OU d_2

Sejam

$\mathbf{R}^n$ produto carteseano de n vectores reais.
x,y dois múltiplos genéricos de $\mathbf{R}^n$.

Defina-se a distância euclideana:

$$d_2(x,y) = +\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left|x_i - y_i\right|^2}$$

A3 — DISTÂNCIA p OU d_p

$$d_p(x,y) = +\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} \left|x_i - y_i\right|^p}\ ,\ 1 \leq p < \infty$$

A4 — TEORIA DE CONJUNTOS EM ESPAÇOS MÉTRICOS NÃO EUCLIDEANOS

Envolve a redefinição de *bola de raio r centrada em x* onde x é um elemento genérico de X e r um real:

$B_r(x) = \{y \in X: m(x,y)<r\}$, onde m é a métrica.

A5 — DISTÂNCIA DE HAUSDORFF

A5.1

Seja

K $=\{C \subseteq \mathbf{R}^n: C \neq \emptyset\}$
E,F $\subseteq K$

Admite-se que $\mathbf{R}^n$ é dotado da métrica usual.
A *dilatação* por r do conjunto E define-se:

E,r $= \bigcup_{x \in E} B_r(x)$, onde $B_r(0)$ é a bola de raio r centrada na origem.

A5.2

Define-se a distância de Hausdorff entre E e F:

H(E,F) $=min(\{r>0: E\subseteq F_r, F\subseteq E_r\})$

A5.3

$\mathbf{R}^n$ é dotado de uma métrica completa mas não necessariamente da métrica euclideana.

- Distância dum ponto a um conjunto:

a(x,E) $= \textit{ínfimo}(\{d_2(x,y): y\in E\})$

- Distância entre dois conjuntos E e F:

a(E,F) $= \textit{supremo}(\{d_2(x,F): x\in E\})$ (Notar que, em geral, $a(E,F)\neq a(F,E)$)

A5.4

Define-se a distância de Hausdorff entre E e F:

H(E,F) $=\textit{supremo}(\{a(E,F),a(F,E)\})$

A6 — ESPAÇOS MÉTRICOS - PROPRIEDADES

A6.1 - Critério de convergência de Cauchy

Sejam

(X,m) um espaço métrico

x_i uma sucessão tal que $i\in\mathbf{Z}^+$ (**Z** conjunto dos inteiros), $x_i\in X$.

Diz-se que x_i **converge** se

$\forall h>0, \exists N\in\mathbf{N}: a,b>N \Rightarrow m(x_a,x_b)<h$

(N eventualmente dependente de h, **N** conjunto dos naturais)

A6.2 - Convergência de sucessões de funções

Seja

$F_i(x)$ uma sucessão de funções tal que $i\in\mathbf{Z}^+$, $x\in A$, $A\subseteq\mathbf{R}^n$.

Diz-se que a sucessão $F_i(x)$ **converge pontualmente** para F, sse

$$\forall x\in A, \lim_{i\to\infty} F_i(x) = F(x)$$

A continuidade das funções F_i pode não ser herdada por F.

A6.3 - Convergência uniforme de sucessões de funções (Cauchy)

Seja dada uma sucessões de funções definidas em $C\subseteq X$. Esta sucessão de funções **converge uniformemente** se

$$\forall h>0, \exists N>0, \forall x\in C: a,b>N \Rightarrow |F_a(x)-F_b(x)|<h$$

A continuidade das funções F_i é herdada por F.

A6.4 - Espaço métrico completo

O espaço (X,m) é **completo** se os limites de todas as sequências em X que satisfazem o critério de Cauchy pertencem a X.

A6.5 - Espaço métrico compacto

Um espaço métrico (X,m) é **compacto** se em toda a sucessão x_i ($i\in\mathbf{Z}^+$) existir uma sub-sucessão convergindo pontualmente para um $x\in X$. Em $\mathbf{R}^n$ com métrica euclideana, um conjunto é **compacto** sse for fechado e limitado.

B — TRANSFORMAÇÃO – MAPEAMENTO EM ESPAÇOS MÉTRICOS

B1 – MAPEAMENTO

B1.1 Transformada Lipschitz

Seja (X,m) um espaço métrico, T uma transformação de X em X, $T:X\to X$.
Diz-se que T é uma **transformada Lipschitz** se:

$$m(T(x),T(y)) \leq s\times m(x,y), \quad x,y\in X,\ 0<s<\infty.$$

B1.2 Transformada Contracção

Se $0<s<1$, diz-se uma **transformada de contracção.**

B1.3 Transformada Dilatação

Se $1<s<\infty$ diz-se uma **transformada de dilatação.**

B1.4 Ponto Fixo

Num mapeamento o ponto x tal que $T(x)=x$ diz-se o **ponto fixo** do mapeamento. O ponto fixo diz-se *atractivo* se a transformada na vizinhança desse ponto for contrativa e *repulsivo* se dilativa.

B2 – TRANSFORMAÇÕES

B2.1 Transformação *linear* L em $\mathbf{R}^n$

L é linear se

$$\forall x,y\in \mathbf{R}^n, \forall a,b\in \mathbf{R},\ L(a\times x+b\times y) = a\times L(x) + b\times L(y).$$

B2.2 Transformação *linear* de $\mathbf{R}^n$ para $\mathbf{R}^m$

Sendo n,m dois inteiros finitos e positivos.

$$y = L(x) = M_{mn}\times x$$

($x\in\mathbf{R}^n$, $y\in\mathbf{R}^m$, M_{mn} matriz de m linhas e n colunas)

B2.3 *Transporte* T em $\mathbf{R}^n$

$y = x + z \quad (x,z,y\in\mathbf{R}^n)$

B2.4 Transformação *afim* Af de $\mathbf{R}^n$ para $\mathbf{R}^m$

$y = M_{mn}\times x + z \quad (x,z\in\mathbf{R}^n$ e $y\in\mathbf{R}^m)$

B2.5 Transformação *isométrica* Is

Seja dado $\mathbf{R}^n$ dotado da métrica euclideana. Is é uma transformação *isométrica* se

$\forall x,y\in\mathbf{R}^n,\ d_2(Is(x)-Is(y)) = d_2(x-y)$. ($d_2$ distância euclideana (v. **A2**))

B2.6 Propriedades das transformações afins

$\boxed{\text{B2.6.1}}$ Uma transformação afim é uma isometria.

$\boxed{\text{B2.6.2}}$ Uma transformação afim Af tal que $Af(0)=0$, preserva o produto interno, i.e.,

$$\forall x,y\in\mathbf{R}^n,\ Af(x)\cdot Af(y) = x\otimes y, \ (\otimes \text{ produto interno}).$$

$\boxed{\text{B2.6.3}}$ Em $\mathbf{R}^2$, a transformação afim $T(x)=A(x)+a$ dilata (ou contrai) uma área de um factor igual a *abs*(*det*(A)).

B2.7 Similitudes si

B2.7.1 Definição

si é uma tranformação de $\mathbf{R}^n$ em $\mathbf{R}^n$ satisfazendo

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^n,\ d_2(si(x), si(y)) = rs \times d_2(x,y)$$

onde rs é a razão de similitude.

B2.7.2 Uma similitude si de $\mathbf{R}^n$ em $\mathbf{R}^n$ com uma razão rs é uma transformação afim dada pela expressão:

$$si(x) = rs \times O_n \times x + h.$$

O_n é uma matriz ortogonal e $h \in \mathbf{R}^n$.

C — DIMENSÃO

A palavra *dimensão* representa uma colecção de funções de conjuntos e que necessitam de um atributo para as distinguir. Abaixo são apresentadas três dimen-sões: topológica, paralelotropo (ou de caixa, *box*) e de Hausdorff.

C1) DIMENSÃO TOPOLÓGICA dimT

$E=\varnothing \Leftrightarrow$ dimT(E)=-1

$E\neq\varnothing \Rightarrow$

- Se dimT(E) $\leq$ n
- Sse $\forall x \in E, \forall U$ relativamente aberto: $x \in U$, ($\exists V$ relativamente aberto: $x \in V$, $V \subseteq U$)
- Se dimT($(d_V)^E$)$\leq$n-1 e
- See n-1<dimT(E)$\leq$n

Então dimT(E)=n (d_V fronteira de V, $n \in \mathbf{Z}^+$).

Com base nesta definição pode demonstrar-se:

- dimT é um invariante topológico.
- dimT($\mathbf{R}$)=1.
- dimT($\mathbf{R}^n$)=n.
- Se $A \subseteq \mathbf{R}^n$ for um compacto, só se for totalmente desconectado será dimT(A)=0.

C2) DIMENSÃO FRACTAL, *BOX*

Também se designa por dimensão de Minkowski, Paralelotrópica de Caixa ou *Box*, dimB.

C2.1) Função Gama, γ

A função Gama é dada pela expressão:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} (-1) \times t^{(x-1)} dt,\ x>0.$$

A função Gama interpola a função factorial:

$$\Gamma(n+1) = n!,\ \text{para } n=0,1,2,\ldots$$

C2.2 Volume de *bolas* em $\mathbf{R}^n$, métrica euclideana

$$V_d = \gamma(d) \times r^d, \quad \gamma(d) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^d}{\Gamma\left(\frac{1+d}{2}\right)}$$ (r é o raio da bola, d é a dimensão do espaço, d=0,1,2,...)

C2.3 Generalização a dimensões não inteiras

$\boxed{\text{C2.3.1}}$ Volume de uma bola para $d \in \mathbf{R}^+$.

V_d $= \gamma(d) \times r^d$

$\boxed{\text{C2.3.2}}$ Medida d dum conjunto compacto $A \subseteq \mathbf{R}^+$

$B_d(A)$ $\approx N(r) \times r^d$.

($N(r)$ menor número de bolas de raio r para cobrir A,
$\approx$ igualdade aproximada).

$\boxed{\text{C2.3.3}}$

De **C2.3.2** resulta

$$d \approx \frac{log(N(r)) + log(B_d(A))}{log(r)}$$

Se a medida de A existir então $B_d(A)>0$ e daí

$$\lim_{r \to 0} \frac{log(B_d(A))}{log(r)} = 0$$

Assim podem definir-se :

$$d_s = -\overline{\lim_{r \to 0}} \frac{log(N(r))}{log(r)}$$

$$d_i = -\underline{\lim_{r \to 0}} \frac{log(N(r))}{log(r)}$$

$\boxed{\text{C2.3.4}}$

Se for possível definir d_s e d_i e $d_s = d_i$, então a dimensão fractal do compacto A contido em $\mathbf{R}^n$, define-se como segue:

$$\dim_B(A) = -\lim_{r \to 0} \frac{log(N(r))}{log(r)}$$

C2.4 Complementos

$\boxed{\text{C2.4.1}}$ A definição dada em **C2.3.4** degenera na definição usual se o compacto A for uma forma não angulosa, isto é, a 1ª derivada é continua.

$\boxed{\text{C2.4.2}}$ Auto-Similaridade

a) Similitude S_j
Define-se similitde ao mapeamento S_j: $A \to A$, com uma escala r_j em $(0,1)$ e onde A é um conjunto compacto.

b) Um conjunto compacto A diz-se autosimilar se existirem similitudes S_j com $j=1..N$ tais que $A = \bigcup_{j=1}^{N} S_j(A)$ e os $S_j(A)$ forem *quasi-disjuntos*.

c) Nas condições **b)** mas os $S_j(A)$ são todos disjuntos entre eles e seja d a solução única da equação

$$\sum_{j=1}^{N} (r_j)^d = 1$$ e $B_d(A)$ a dimensão *box* de A, então, $B_d(A)>0 \Rightarrow \dim_B(A)=d$

d) Nas condições **c)** mas sendo $r_j=r$ para todo $j=1..N$ então será

$(Nr)^d = 1$ e
d designa-se *dimensão de similariedade de A*.

e) Em **b)** diz-se *quasi-disjunto* se a soma das medidas d de Hausdorff das sobreposições dos conjuntos não disjuntos for 0.

C2.4.3 Equivalência de Métricas

Sejam

$m_1(x,y)$
$m_2(x,y)$ Duas métricas
A Um compacto com uma dimensão $dimB(A)=d$ relativa à métrica m_1

Se as métricas forem equivalentes será $dimB(A)=d$ relativa à métrica m_2 e inversamente.

C3 — DIMENSÃO HAUSDORFF

Distingue-se da dimensão fractal (**C2**), porque o raio da bola, r, e o limite superior de r, s, são conceitos distintos.

C3.1 - Definição da medida de Hausdorff

a) A cobertura do compacto A em $\mathbf{R}^n$ é feito por bolas de raios r_i , com $i=1,2,...$ e todos os $r_i<s$.
b) A medida de Hausdorff de A será definida como:

$$\mathbf{H}_{d,s}(A) = inf \sum_{i=1}^{\infty} \gamma(d) \times (r_i)^d \qquad \text{(v. C2.1)}$$

c) Define-se a medida externa de dimensão d a:

$$\mathbf{H}_d(A) = \lim_{s \to 0} \mathbf{H}_{d,s}(A)$$

C3.2 - Algumas Propriedades

a) $A \subseteq B \Rightarrow \mathbf{H}_d(A) \leq \mathbf{H}_d(B)$
b) $\mathbf{H}_d(A)$ é sub-aditivo, isto é:

$$\mathbf{H}_d\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{H}_d(A_j)$$

c) Se $A \subseteq \mathbf{R}^1 \Rightarrow \mathbf{H}_d(A)$ coincide com a medida exterior à Lebesgue.
d) Se $A \subseteq \mathbf{R}^n$, $n>1$ e see a medida exterior à Lebesgue for zero $\Rightarrow$ $\mathbf{H}_d(A) = 0$.

C3.3 - Definição de dimensão de Hausdorff, dimH(A)

A dimensão de Hausdorff é um teorema dedutível de **C3.1** e assente na existência e a unicidade de um c para o qual sucede:

$$d<c \Rightarrow \mathbf{H}_d(A)=\infty \wedge d>c \Rightarrow \mathbf{H}_d(A)=0.$$

A dimensão de Hausdorff será:

$$dimH(A) = sup(\{d: \mathbf{H}_d(A)=\infty\}) = inf(\{d: \mathbf{H}_d(A)=0\}).$$

D — L_SYSTEMS E GRÁFICOS DE TARTARUGA

D1 - INTRODUÇÃO

É uma linguagem construída para dar instruções para a deslocação dum ponto P, a "tartaruga", em geral, num plano.

O deslocamento D é definido pela tríada (x,y,â), onde (x,y) são as coordenadas do ponto de partida e â o angulo que define a direcção e sentido do deslocamento.

A cada deslocamento D pode corresponder ou não o traçado do segmento que liga o ponto de partida com o de chegada. Se o deslocamento for traçador, simboliza-se com F; se não for traçador, simboliza-se com b.

O comprimento do deslocamento D é um parâmetro invariante.

O angulo â pode ser alterado ao termo de cada deslocamento de + ou – um angulo ô, sendo este parâmetro invariante. Assim, â:=â+ô é simbolizado por + e â:=â-ô é simbolizado por –.

Os parenteses [e] servem respectivamente para iniciar e finalizar um "ramo", ou seja, um conjunto de operações que, uma vez realizadas, delas só se retem o resultado final.

Uma instrução inicial dá início ao processo iterativo e uma vez concluída a instrução, o sistema diz-se ao nível 1.
Um conjunto de regras invariantes permitem construir a instrução correspondente à 2ª iteração, ao termo da qual o sistema passa ao nível 2 e assim sucessivamente.

D2 - FORMALIZAÇÃO DUM L_SYSTEM.

O processo iterativo dum L_System é construído com:

a) Um alfabeto, e.g.:
{F,b, [,],+,–, e outros se necessário}
b) Um $\mathbf{R}^2$ com métrica usual.
c) Um ponto de partida (x,y) em $\mathbf{R}^2$.
d) Um ângulo â inicial.
e) Um comprimento do deslocamento inicial.
f) Uma instrucção inicial.
g) Um conjunto de regras iterativas que permitem a partir da iteração de ordem i quando o sistema está no estado ou nível i, passar ao nível i+1.

Ao longo deste processo iterativo as instruções do tipo F vão traçando um grafo.

D3 - ALGORITMOS DE L_SYSTEM E DO GRAFO.

D3.1 - Operação do L_System

D3.1.1 Entrada:

Axioma Inicial:	Palavra Inicial
Regras Iterativas:	$F(i+1) = R_f(F(i))$,
	$b(i+1) = R_b(b(i))$,
	$X(i+1) = R_x(X(i))$,
	$Y(i+1) = R_y(Y(i))$,
	etc., etc..
Número de Iterações:	Ni ou nivel.

Ângulos â e ô (constantes).
Escala do Grafo Sc (constante).

D3.1.2 Programa tipo do L_System (v. **Notas 1,2**):

Variáveis auxiliares: T,W:string n,l,j:inteiros

```
W:=FX;
l:=Length(W);
T:="";                    //string vazia
WHILE Ni>0
    for j:=1 to l
        if W(j)=+ then T:={T +};
        if W(j)=- then T:={T -};
        if W(j)=[ then T:={T [};
        if W(j)=] then T:={T ]};
        if W(j)=F then T:={T NovoF};
        if W(j)=b then T:={T Novob};
        if W(j)=X then T:={T NovoX};
        if W(j)=Y then T:={T NovoY};
        etc. etc.
    end for;
    W=T;
    Ni:=Ni-1;
end while;
palavra_FINAL = W;
```

D3.1.3 Saída: Palavra Final W_final.

Notas:

1) {T !}, acrescento do caracter ! a T.
2) Só se escrevem as *if...* para os símbolos do alfabeto usado no L_System.
3) Designa-se de **alfabeto** os caracteres usados num dado L_System, e.g.: (F,b,X,Y,+,–,[,],â,ô,etc.)

D3.2 Programa Tipo de construção dos grafos respectivos.

D3.2.1 Entradas do Grafo.

Ângulos	â, ô
Escala do Grafo	Sc
Palavra Final	W_final
Número de Iterações	Ni

D3.2.2 Programa Tipo do Grafo

```
W=W_Final;  x0=0;  y0=0;  l=length(W);  Q="";
for j=1 to l
    if W(j)=+ then â=â+ô;
    if W(j)=- then â=â-ô;
    if W(j)=F then {
            x=x0+cos(â);
            y=y0+sin(â);
            draw line from (x0,y0)  to  (x,y);
            x0=x,  y0=y };
    if W(j)=b then {
            x=x0+cos(â);
            y=y0+sin(â) };
    if W(j)= [ then {
            l=length(Q);
            Q(l+1,1)=x0;
            Q(l+1,2)=y0;
            Q(l+1,3)=â };
    if W(j)= ] then {
            l=length(Q);
            x0=Q(l+1,1);
            y0=Q(l+1,2);
            â=Q(l+1,3);
            delete linha l de Q };
end for
```

D3.2.3 Saída: o Grafo

D4 – EXEMPLOS

D4.1 – L_System baseado em "Dragão" de Harter-Heightway

Axioma Inicial:	FX	
Regras Iterativas:	F(i+1) = F(i) ou	NovoF = F
	X(i+1) = X(i)+Y(i)F(i)+ ou	NovoX = X+YF+
	Y(i+1) = -F(i)X(i)-Y(i) ou	NovoY = -FX-Y

Não necessita de b.

Número de Iterações	Ni = 4
Dados constantes	$ô = \pi/2$

Obtêm-se os seguintes W_finais:

Nível 1: FX+YF+
Nível 2: FX+YF++-FX-YF+
Nível 3: FX+YF++-FX-YF++-FX+YF+--FX-YF+
etc.

(v. os L_System das páginas 25-27 do livro *Introduction to Fractals and Chaos* de Crownover, Jones and Bartelett)

D5 – APLICAÇÕES

D5.1 – Conjuntos de Cantor

Também se designa de poeira de Cantor e sem o terço mediano.

D5.1.1 Definição de conjunto de Cantor

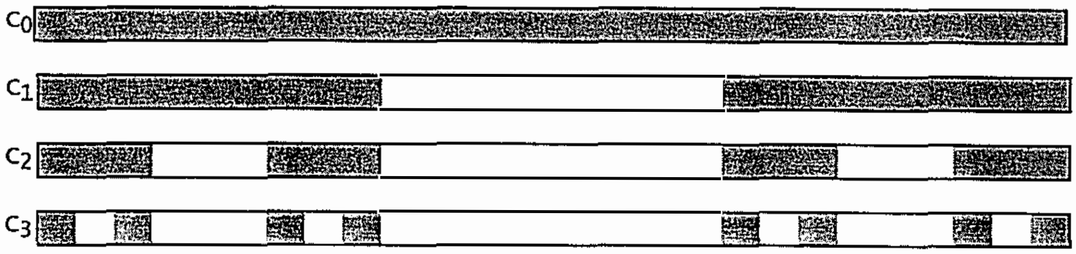
Sejam dados os conjuntos seguintes:

$$C_0 = [0,1]$$

$$C_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$$

$$C_2 = [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$$

etc. etc.



O conjunto "poeira" de Cantor é conjunto intersecção de todos os C_i , com i de 0,1,2...

D5.1.2 Representação de base $N \geq 2$ dum $x \in [0,1]$

Parte-se $[0,1]$ em N partes iguais e seja i_1 a parte que contém x. Parte-se o intervalo i_1 em N partes iguais e seja i_2 a parte que contém x. Esta operação tipo é repetida indefinidamente.

O valor de x será dado pelo somatório:

$$x = \sum_{j=1,2,...} \frac{x_j}{N^j}$$

Se a base N for indicada logo de início, pode simbolizar-se x da forma simplificada seguinte:

$$x = .x_1x_2x_3...$$

D5.1.3 Propriedades do conjunto de Cantor.

a) É um fractal *self-similar* com a dimensão

$$d = \frac{log\ 2}{log\ 3} = .6309.$$

b) O comprimento dos intervalos de que é feito tende para zero.
c) A soma dos comprimentos dos intervalos removidos é igual a 1.
d) A cardinalicidade do conjunto de Cantor é igual à do intervalo [0,1], ou seja a do *continuum*.

D5.1.4 Conjuntos tipo Cantor mas com outras dimensões.

1) Dimensão = $\frac{log\ 9}{log\ 10}$

Seja **Q** o conjunto de todos reais de expansão decimal mas onde um dos símbolos do conjunto {1,2,..,8} não é usado.

2) Dimensão = 1.

Partindo dum quadrado, parte-se em 4 quadrados iguais, suprimem-se as duas partes na diagonal principal. Os quadrados retidos partem-se em 4 quadrados e retêm-se os da diagonal principal.

D5.2 - Função de Peano

As formas produzidas por L_System podem ter dimensões no intervalo [1,2[. Assim, será possível construir curvas que ocupam um conjunto em $\mathbf{R}^2$.

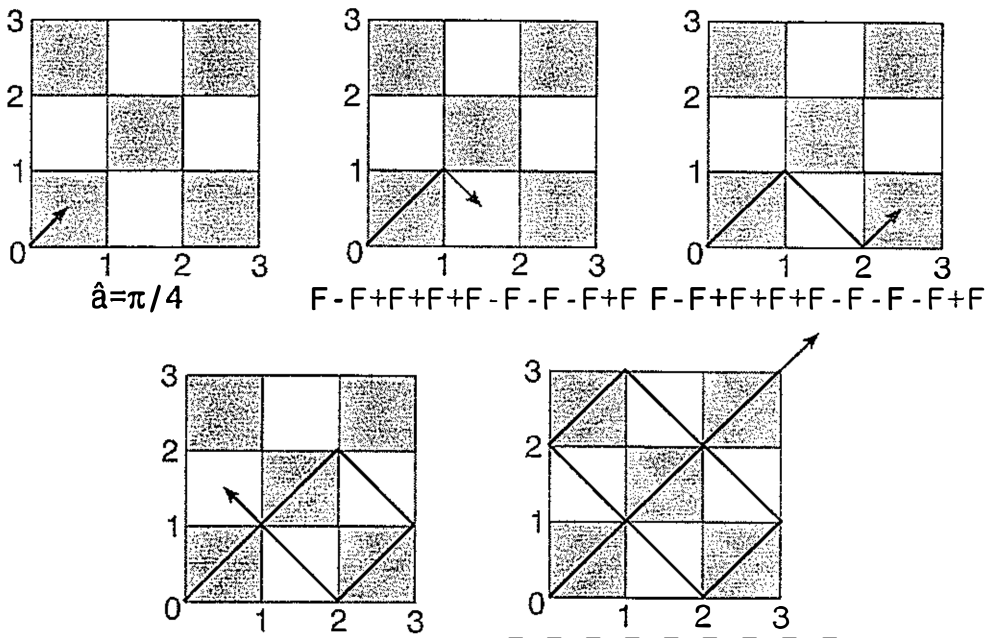
$\boxed{\text{D5.2.1}}$ Construção da Função de Peano

Usando a linguagem dos L_Systems, será:

Palavra Inicial =	F	$\hat{a}=\pi/4$
novaF=	F-F+F+F+F-F-F-F+F	$\hat{o}=\pi/2$

$\boxed{\text{D5.2.2}}$ Idem, v. figura:

Um quadrado é dividido em 9 quadrados iguais.



â=π/4 F-F+F+F+F-F-F-F+F F-F+F+F+F-F-F-F+F

F-F+F+F+F-F-F-F+F F-F+F+F+F-F-F-F+F

Nível 1 da curva de Peano: (0,0) → (1,1) → (2,0) → (3,1) → (2,2) → (1,1) → (0,2) → (1,3) → (2,2) → (3,3)

No nível 2 procede-se similarmente com os 9 quadrados partindo cada um em 9 quadrados e procedendo como se fez no 1° nível e tendo o cuidado de o fim de um estar ligado ao princípio do outro, de forma a que a função seja contínua.

$\boxed{\text{D5.2.3}}$ A função de Peano de um intervalo de $\mathbf{R}^1$ para um quadrado em $\mathbf{R}^2$ é contínua e tem dimensão 2.

E — SISTEMAS DEFINIDOS POR FUNÇÕES ITERATIVAS - IFS

E1 - DEFINIÇÕES

E1.1 - Transformação de Hutchinson, TH

Sejam dados:

- Uma família de transformadas de contracção T_j em $\mathbf{R}^1$ (v. **B**) tal que $s_j<1$ e $j=1..m$.
- Um espaço K de todos os subconjuntos compactos não vazios de $\mathbf{R}^n$.

Define-se **TH** como a transformada de K em K,

$$\mathbf{TH}(E) = \bigcup_{j=1}^{m} T_j(E) \quad (E \in K).$$

E1.2 Um sistema de funções iterativas, IFS

É uma colecção de mapas **TH** e um conjunto compacto não vazio de $\mathbf{R}^n$ inicial, E_0, como segue:

$$E_0,\ E_1=\mathbf{TH}(E_0),\ \ldots,\ E_h=\mathbf{TH}(E_{h-1}),\ \ldots$$

E1.3 Actractor E

O objectivo da teoria de IFS é definir em que condições existe um conjunto

$$E = \lim_{h\to\infty}(E_h),$$

isto é, há convergência de Hausdorff.
Se existir esse limite então E designa-se de *atractor* do IFS.

E1.4

Pode demonstrar-se que:

$\boxed{\text{E1.4.1}}$ O factor de contracção de **TH** é dado por

$$s=max\{s_1,s_2,..,s_m\}.$$

$\boxed{\text{E1.4.2}}$ Existe o atractor E cujo valor é:

$$E = \lim_{h\to\infty}\mathbf{TH}_h(E_0)$$

E2 – ALGORITMO TÍPICO DUM IFS DETERMINÍSTICO

E2.1 – Entrada

a Número de coeficientes das transformadas afins (os coeficientes da matriz mais os do vector de translação).
n Número de Mapeamentos.
E_0 Uma matriz de quadrada com m linhas e colunas.
l Número de iterações.

E2.2 – Saída

O atractor representado por uma matriz m×m.

E2.3 Procedimentos

```
S=0;            //(matriz m×m)
T=E0;
for k=1 to l
   for i=1 to m
      for j=1 to m
         if T(i,j)=1
            for l=1 to n
               ii = [C(l,1)i+C(l,2)j+C(l,5)]+1;
               if 1<=ii<=m
                  jj = [C(l,3)i+C(l,4)j+C(l,6)]+1;
                  if 1<=jj<=m
                     S(ii,jj)=1
                  end if
               end if
            end for
         end if
      end for
   end for;
   T=S;
   S=0;
end for;
```

E3 – ALGORITMO TÍPICO DUM IFS PROBABILÍSTICO

E3.1 – Definição das probabilidades de escolha

O factor de expansão duma transformação afim $T(x)=A(x)+a$, é dado por *abs*(*det*(A)) (v. **B.2.7**), e tendo em atenção **E1.4.1**, definam-se as probabilidades de escolha como segue:

$$p_i = \frac{det(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} det(A_i)},$$

Notar que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$

Em cada passo a escolha do operador afim T_i faz-se aleatoriamente mas *pesados* pelos p_i.

E3.2 – Algoritmo típico

Entrada: C (coeficientes das transformações afins)
n (número das transformações)
$P = [p_1,p_2,..,p_n]$
a,b,c,d coordenadas das janelas.
(x_0,y_0) ponto de partida
l nível.

Saída: Grafo.

Procedimentos:

```
Criar janela.
    for j=1 to 100
        k = Escolhe; //(em P o número i de Ti)
        x = C(k,1)×x0 + C(k,2)×y0 + C(k,5);
        y = C(k,3)×x0 + C(k,4)×y0 + C(k,6);
        x0=x;
        y0=y;
    end for;
```

F — COMPLEXIDADE

F1 – DINÂMICA CAÓTICA

F1.1 – Introdução

O estudo recai sobre sistemas dinâmicos discretos e com mapeamento iterativo e atractores de Lorentz. Depois o estudo é generalizado a outros sistemas, nomeadamente os contínuos. Introduzem-se os conceitos de órbitas, periodicidade, bifurcação e finalmente o de caos. Quanto ao caos apresentam-se os critérios que permitem declarar que o estado dum sistema é caótico.

F1.2 Sistemas Dinâmicos *Discretos*

F1.2.1 **Órbita** do Ponto Inicial

Sejam:

x_0 ponto em $\mathbf{R}^1$ (ponto inicial).
x ponto em $\mathbf{R}^1$.
f um mapeamento de $\mathbf{R}^1$ em $\mathbf{R}^1$.

Define-se **Órbita** do ponto inicial x_0 a:

$$O(x) = \{x_i: i=0..\infty\} = \{F_n(i): i=0..\infty\},$$

onde $x_i = f(x_{i-1})$ é um elemento genérico da sequência.

F1.2.2 **Periodicidade**

A órbita diz-se periódica se $x_{i+p} = x_i$, para todo o $i=0,1,\ldots$ A órbita diz-se para-periódica se $x_{i+p} = x_i$, para todo o $i \geq q$ e $q>0$. Uma órbita pode ter mais do que um período e então haverá uma órbita de período mínimo.

F1.2.3 Exemplo paradigma:

Seja $f=x^2+c$, os pontos fixos são as soluções da equação, $x^2+c=x$, que são duas:

$$z=\frac{1+\sqrt{1-4c}}{2} \quad \text{e} \quad w=\frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}.$$

Casos particulares:

a) Os pontos fixos são reais se $1-4c\geq 0$ $(c\leq 1/4)$.
b) $c\leq 1/4 \Rightarrow -z<w<z$
c) $f(-z) = z$
d) Se $x_0>z$ ou $x_0<-z$ as órbitas tendem para ∞.
e) $E = (c\leq 1/4) \wedge (-z\leq x_0\leq z)$
f) $E \Rightarrow f(x_0)\leq +z$
g) $E \wedge (-2\leq c) \Rightarrow -z\leq f(x_0)\leq +z$ A órbita fica toda desenhada no intervalo $[-z,+z]$.
h) $E \wedge (c<-2) \Rightarrow$ podem existir x_i fora do intervalo $[-z,+z]$ e a órbita ir para infinito.
i) $-3/4<c<1/4 \Rightarrow$ o ponto fixo w é atractor.
j) $c<-3/4 \Rightarrow$ o ponto fixo w é repulsor.
k) $abs(f'(x))<1 \Rightarrow x$ é um atractor.
l) $abs(f'(x))>1 \Rightarrow x$ é um repulsor.
m) Se se verificar a situação **j)** então a função f_2, a função do nível 2, isto é, da 2ª iteração, tem dois pontos fixos atractores o que introduz um ciclo de período 2 na função.
n) Na situação **m)** diz-se que o sistema entra no estado duma bifurcação de período 2.
o) Se $c=-2$ então haverá órbitas periódicas com períodos 2, 3, 4,...

F1.2.4 Bifurcações

Feigenbaum estudou a função $y=cx(1-x)$ mas os resultados aplicam-se a uma vasta classe de outras funções. Uma bifurcação corresponde a uma mudança do tipo topológico, e.g: alteração do período, da sucessão das vizitas, etc..

a) Em certas situações estes sistemas passam por bifurcações sucessivas até atingirem o estado caótico.
b) **Ponto de Feigenbaum.** Os pontos de bifurcação tendem para um valor limite que, para $Y=x^2+c$ é -1.401155...
c) **Constante universal Feigenbaum.** Relação das dimensões de dois intervalos sucessivos.

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n-c_{n-1}}{c_{n+1}-c_n} = 4.669162\ldots$$

d) Teorema de Sarkovskii.
Sejam:

I Um intervalo em **R**
f Uma função contínua em I.

Se f tiver um ponto de período p então f tem pontos de período r pela seguinte lista ordenada:

```
 3     5     7     9   ...
2.3   2.5   2.7   2.9  ...
4.3   4.5   4.7   4.9  ...
.........................
...   2^n   ...   2^1   1
```

F1.3 – Caos e Sistemas caóticos

F1.3.1 Definição de Caos

Sejam (X,m) um espaço métrico e $f:X \rightarrow X$ uma função. O mapeamento f diz-se **caótico** se:

a) f for transitiva.
b) Os pontos periódicos de f for denso em X.
c) f for sensível às condições iniciais.

Notar que se pode demonstrar **c)** a partir de **a)** e **b)**.

F1.3.2 Transitividade de f

V. **F1.3.1.a.**
A função f é transitiva se $\exists_{i \geq 0}$: $f_i(U) \cap V \neq \varnothing$, para todos os abertos U e V de X. Pode provar-se que esta propriedade e a existência de uma órbitra densa são equivalentes.

F1.3.3 Conjunto dos pontos periódicos ser denso

V. **F1.3.1.b.**
Significa que todo o ponto de X tem na sua vizinhança um ponto periódico.

F1.3.4 Sensibilidade às Condições Iniciais

V. **F1.3.1.c.**
Sejam U um aberto em X, $x,y \in U$. Se dados um x e um real $d>0$, existirem um n e um y tais que $m(f_n(x),f_n(y)) > 0$, então diz-se que f é sensivel ao ponto inicial.

F1.3.5 Desvio ou Deslocação ou *Backward Shift* ou *Shift*, B

V. **D5.1, D5.1.2.**
Sejam :

C O conjunto dos terços medianos de Cantor.
x_i Pertence ao domínio em estudo. Neste caso, é $\{0,2\}$.

$B(x)$ é a função definida em C como segue:

$$B_1(x) = .x_2x_3x_4\ldots$$
$$B_2(x) = .x_4x_5x_6\ldots$$
$$\cdots$$
$$B_n(x) = .x_{n+1}x_{n+2}x_{n+3}\ldots$$

F1.3.6 Exemplos

a) Duplicação do ângulo
Seja $S = \{(x,y): x^2+y^2 = 1\} = \{e^{io}: o \in \mathbf{R}\}$

$f:S \rightarrow S$
$f(e^{\wedge io}) = e^{2io}$
$f(z)=z^2$

A função f é caótica em S.

F1.4 Dinâmica *Simbólica*

F1.4.1 Espaço Simbólico

Sejam:
$u_N = \{1,2,\ldots,N\}$, N finito.
$u = u_1,u_2,..,u_N$ e $v = v_1,v_2,..,v_N$, duas sucessões de N símbolos.

Defina-se uma distância d entre u e v,

$$d(u,v) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{abs(u_j - v_j)}{(N+1)^j}$$

O espaço Simbólico S define-se como o espaço de todas as sucessões do tipo u, munido da métrica que resulta da distância d e escreve-se (S,d).

F1.4.2 Propriedades do Espaço Simbólico

a) (S,d) é compacto, perfeito e totalmente desconectado.
b) É equivalente ao espaço de Cantor.
c) A função deslocação em (S,d) é caótica.

F2 – SISTEMAS DE FUNÇÕES ITERADAS E LINGUAGEM SIMBÓLICA

F2.1 – Introdução

O interesse deste capítulo está na faculdade da linguagem simbólica de descrever um sistema de funções iteradas em tudo quanto este tem de essencial. O principal objectivo é estudar quais as condições em que um Sistema de Funções Iteradas, IFS, induz no seu atractor um mapeamento caótico. A apresentação faz-se com um exemplo paradigmático.

F2.2 Indução de caos no atractor

F2.2.1 Funções de espaços simbólicos em atractores

a) Atractor E
Sejam
(X,m) Um espaço métrico completo.
T_i Mapeamento contractor em (X,m), tal que $s_i<1$, e $i\in\{1,2,...,N\}$
s $=max(\{s_i\})$, $i\in\{1,2,...,N\}$, contracção total.
E(0) conjunto compacto arbitrariamente escolhido.
E(k) $=\bigcup_{j=1}^{N} T_j(E(k-1))$.

O sistema de funções iterativas acima converge para um único atractor E, pelo teorema de Hutchinson.

b) Linguagem Simbólica S.
Seja S uma linguagem simbólica com N elementos.
c) Podem provar-se a existência de uma função, $FI:S\rightarrow E$, com as seguintes propriedades:

- Existe o limite seguinte:

$$FI(u)=\lim_{k\to\infty} (T_{u_1}T_{u_2}...T_{u_k}(x)),\ u\in S,\ u=u_1u_2...,\ x\in X$$

- Este limite é independente de x.
- FI é um mapeamento de S em E.
- FI é contínuo.
- FI é uma bijecção. (v. **F2.3**).

F2.2.2 Espaços totalmente desconectados

a) Seja dada um sistema de funções iterativas IFS definido pelos 3 mapeamentos afins seguintes:

$T_1(z)=(1/3)z$
$T_2(z)=(1/3)z+1$
$T_3(z)=(1/3)z+i$

O atractor S é totalmente desconectado. Seja $u=u_1u_2u_3...$ uma sequência onde os u_i tomam valores no conjunto [1,2,3]. A cada ponto x de S corresponde um u que se diz ser a "morada" de x em S.

Notar:

- $\forall u_i$ de $u=u_1u_2u_3$, $x\in Tu_i(S)$.
- a "morada" é única, $\forall_{x\in X}$.

b) Mapeamento induzido em S pelo deslocamento B (*Back Shift*) e sejam:

B(u)	$=B(u_1u_2u_3...)=u_2u_3...$
x,y	$\in S$
u	Morada de x
B(u)	Morada de y
y	$=f_B(x)$

c) Pode provar-se que $f_B:S\to S$ é caótico.

F2.2.3 Funções conjugadas topologicamente

a) Definição

Sejam:

O	subconjunto compacto dum espaço métrico, e.g.:$\mathbf{R}^n$
S	espaço simbólico
$F:O\to O$	mapeamento contínuo em O
$B:S\to S$	deslocamento (*shift*) em S
$T:O\to S$	homeomorfismo (relação 1–1 e bicontínua)
T^{-1}	Inverso de T

Se for:

$B(T(x)=T(F(x)$, ou seja, $F(x)=T^{-1}(B(T(x))$,

então F e B são funções topologicamente conjugadas. Usando o para simbolizar a composição de funções as espressões acima escrevem-se:

$BoT(x)=ToF(x)$ e $F(x)=T^{-1}oBoT(x)$.

b) Figuração da comutatividade de T

$$\begin{array}{ccc} O & F\to & O \\ T & & T \\ S & B\to & S \end{array}$$

c) Propriedades

- Se F for topologicamente conjugado a B então F é caótica em O.
- O mapeamento $f(x)=x^2+c$ é caótico em O para $c<-2$.
- O mapeamento $g(x)=x^2-2$ é caótico no intervalo [-2,2].

F2.3 – Casos não regulares

F2.3.1 Funções não 1-1

A conversão duma função $f:Z\to W$ não 1–1 numa função do tipo 1–1 pode efectuar-se substituindo f por $\overleftrightarrow{f}:Z\to Z\times W$, onde $Z\times W$ é o espaço produto carteseano de Z por W. A função $\overleftrightarrow{f}$ já é do tipo 1-1.

Aplicação da conversão acima a $FI:S\to E$ no caso de FI não ser uma função 1–1, v. **F2.2.1.c**.

Sejam:

$\overleftrightarrow{E}$	$=\{(u, FI(u)), u\in S\}$
$\overleftrightarrow{FI}(u)$	$=(u, FI(u), u\in S)$
$\overleftrightarrow{X}$	$=S\times E$,
$\overleftrightarrow{d}((s,x),(t,y))$	
	$=max(d(s,y), d-2)$,

Então:

- $(\overleftrightarrow{X},\overleftrightarrow{d})$ é um espaço métrico compacto.
- $\overleftrightarrow{T}(s,x) = (i\,s, T_i(x))$, com $(s,x) \in \overleftrightarrow{X}$ é um espaço contraído em $(\overleftrightarrow{X},\overleftrightarrow{d})$.
- $\overleftrightarrow{E} = \{\overleftrightarrow{X}, \overleftrightarrow{T_1}, \overleftrightarrow{T_2} \ldots \overleftrightarrow{T_N}\}$ é o atractor do IFS.
- $\overleftrightarrow{B} = FI \circ B \circ FI^{-1}$, o mapeamento induzido que é caótico em $\overleftrightarrow{E}$.

$\boxed{\text{F2.3.2}}$ Regularização de erros de cálculo

Se os erros de cálculo não atiram o ponto para fora do domínio de atracção pode provar-se que para cada órbita mal calculada há uma órbita correcta próxima.

$\boxed{\text{F2.3.3}}$ IFS aleatórios

Pode provar-se que para todo o ponto e_i de E existe um x_j produzido por IFS cuja distância a e_i é menor que um número positivo tão pequeno quanto se desejar. O teorema acima justifica o bom funcionamento dos IFS aleatórios.

F3 – DINÂMICA COMPLEXA

F3.1 – Introdução

A apresentação da matéria será feita recorrendo aos complexos. Os temas tratados serão:

- Conjuntos de Julia
- Conjunto de Mandelbrot
- Fractais Aleatórios

F3.2 – Conjuntos de Julia

$\boxed{\text{F3.2.1}}$ Definição

Sejam:

a_k, z	$\in$ **C** (**C** conjunto dos complexos)
a_n	<>0
n	>=2
$f(z)$	$= \sum_{k=1}^{n} a_k \times z^k$
$f^0{}_i(z)$	Iteração de ordem i de $f(z)$
ϕ	Fronteira dum conjunto.
J(f)	$=\phi(\{z : f^0{}_i(z) \to \infty,\ i \to \infty\})$

O conjunto de Julia **J**(f) é a fronteira do conjunto dos pontos z que repetidas iterações escapam para infinito.

$\boxed{\text{F3.2.2}}$ Exemplos

a) $f(z) = z^2$

$\mathit{lim}\ f^0{}_i(z) \to \infty \Leftrightarrow abs(z) > 1$

$\{z : abs(z) = 1\}$ é a fronteira e portanto o conjunto de Julia.

b) $fc(z) = z^2 + c,\ c \in$ **C**

Procedimentos para construir o conjunto de Julia com o interior preenchido.

Entrada:

c		$=c_1 + jc_2$
(a,b)	$\to$	centro da janela
l	$\to$	largura da janela
p	$\to$	número de pixels por lado

Saída: O conjunto de Julia.

Programa:

```
for m=1 to p
    x0=a-s/2+m.s/p;
    for n=1 to p
          y0=b-s/2+n.s/p;
          x=x0;
          y=y0;
          z=0;
          iter=1;
          while iter<20 {
                iter=iter+1;
                x1=x^2-y^2+c1;
                y1=2x.y+c2;
                x=x1;
                y=y1;
                z=x^2+y^2;
                if z>4 then sair da circulação;
          end while;
          if z<4 then plot(x0,y0);
    end for;
end for.
```

c) Notar que o conjunto de Julia de z^2-2 é o intervalo $[-2,2]$ e que para todo o $c\in\mathbf{C}$, a função $f(z)=z^2+c$ é caótica no seu conjunto de Julia.

F3.2.3 Órbitas e periodicidade em conjuntos de Julia

Sejam:

f(z) Uma função polinomial

z um ponto periódico, isto é, $f|_p(z)=z$,

gam $=(f|_p)'(z)$ a derivada de $f|_p(z)$.

Diz-se que um ponto periódico z é:

Superatractivo se	gam=0
Atractivo se	*abs*(gam)<1
Neutral se	*abs*(gam)=1
Repulsivo se	*abs*(gam)>1

F3.2.4 A bacia de Atracção de um ponto w que satisfaz *abs*(gam)<1 é:

$\{z\in\mathbf{C}: f|_n(z)\to w,\ n\to\infty\}$

F3.3 Conjuntos de Mandelbrot M

F3.3.1 Definição

Para o conjunto $f(z)=z^2+c$, define-se como o conjunto de todos os $c\in\mathbf{C}$ para os quais a órbita do ponto 0 é fechada.

$\mathbf{M} = \{c\in\mathbf{C}: \{f|_n(0),\ n=0..\infty\}$ é fechado$\}$.

F3.3.2 Propriedades

a) $abs(c)>2 \wedge abs(z)\geq abs(c) \Rightarrow c\notin\mathbf{M}$

b) $c\in\mathbf{M} \Rightarrow \mathbf{J}(f)$ é conectado.

$c\notin\mathbf{M} \Rightarrow \mathbf{J}(f)$ é totalmente desconectado.

c) Notar que no ponto z=0 será $f'(z)=0$ e a órbita de 0 designa-se de **crítica**.

F4 – FRACTAIS ALEATÓRIOS

F4.1 – Introdução

Nos capítulos anteriores foram examinados processos essencialmente **determinísticos** onde, quanto muito, alguns procedimentos eram ou não executados aleatoriamente.

F4.2 – Fractais aleatórios típicos

- **Floco de Neve de Koch aleatório.** Basta que a adição dos triângulos equiláteros possa ou não ser feita com o vértice dirigido para o interior por escolha aleatória.
- **Fractais Sierpinsky aleatórios**
- **Fractais de Cantor**, onde é escolhido aleatoriamente qual dos 3 lados é retirado.

F4.3 - Movimento Browniano MB

F4.3.1 Definição de Movimento Browniano **MB1** a uma dimensão.

Definição de Wiener

MB1 é um movimento aleatório $X(t)$ em $[a,b]$ (intervalo finito de $\mathbf{R}^1$), satisfazendo:

- O processo é Gaussiano
- $X(t)$ é quasi certamente contínuo e $X(0)=0$
- $X(t_2)=X(t_1)+dX$, onde $t2>t1$
- dX é uma distribuição Gaussiana de:
  média=0
  variância=$\sigma^2(t_2-t_1)$ e $\sigma^2>0$

F4.3.2 Algumas propriedades

a) Variância do incremento dX

$$var(X(t_2)-X(t_1)) = \sigma^2 \times |t_2-t_1|$$

dX é estacionário porque depende de t_2-t_1.

b) Os incrementos dX são variáveis aleatórias e independentes.

c) Constituiem um processo de Markov.

d) O valor esperado do incremento é:

$$E[|X(t_2)-X(t_1)|] = \sqrt{2/\pi}\,\sigma\sqrt{|t_2-t_1|}.$$

e) $X(t)$ não é diferenciável.

f) Dimensão do Grafo obtido, se o intervalo $[0,1]$ for dividido em n intervalos iguais com dt de comprimento. O numero mínimo de bolas para cobrir é $N(dt)=dt^{-3/2}$, donde:

$$Dim=-lim\frac{log(N(dt))}{log(dt)}=1.5$$

g) O caminho Browniano é estatisticamente similar a si próprio.

F4.4 - Exemplos de aproximações de movimentos Brownianos

F4.4.1 Passeio Aleatório (*random walk*)

F4.4.2 Deslocamento aleatório do ponto médio

F4.5 Movimento Browniano Fractionário MBF

F4.5.1 Definição

MBF é um movimento aleatório $X(t)$ em $[a,b]$ um intervalo finito de $\mathbf{R}^1$, satisfazendo:

- O processo é Gaussiano
- $X(t)$ é quasi certamente contínuo e $X(0)=0$
- $X(t_2)=X(t_1)+dX$, onde $t2>t1$
- dX é uma distribuição Gaussiana de:
  média=0
  variância=$\sigma^2(t_2-t_1)^{2H}$, $\sigma^2>0$, $0<H<1$

$\boxed{F4.5.2}$ Propriedades

a) $H=1/2 \Rightarrow$ **MBF=MB**
b) Variância de dX

$$E[(X(t_2)-X(t_1))^2] = \sigma^2 \times |t_2-t_1|^{2H}$$

dX é estacionário.
d) Os incrementos dX não são variáveis aleatórias independentes mesmo para $H=1/2$.
e) O valor esperado do incremento é:

$$E[|X(t_2)-X(t_1)|] = \sqrt{2/\pi}\,\sigma\sqrt{|t_2-t_1|^{H}}.$$

f) Não constituiem um processo de Markov.
g) $X(t)$ não é diferenciável.
h) O caminho Browniano é estatisticamente similar a si próprio.
i) Dimensão do Grafo obtido, se o intervalo $[0,1]$ for dividido em n intervalos iguais com dt de comprimento. O número mínimo de bolas para cobrir é

$$N(dt) = \frac{\sigma}{dt^{2-H}},$$

donde:

$$Dim = -\lim_{dt \to 0} \frac{log(N(dt))}{log(dt)} = 2-H$$

A. G. Portela.
Lisboa, 16/Março/1997