II Colóquio Fundão - Covilhã 1981
Soc. Port. de Estatística e Investigação Operacional

POSSIBILIDADE VERSUS PROBABILIDADE

A. G. Portela
I.S.T.

RESUMO:

I - INTRODUÇÃO

- A evolução recente dos Fuzzy Sets (SCV)
- Confronto entre os caracterizantes dos (SCV) e as distribuições das probabilidades.
- Probabilização dos (SCV)

II - UMA CLASSE DE (SCV)

A classe referida é constituída em torno do conceito de ordem (pre-ordem) do Reticulado.

III - ANEXOS

I INTRODUÇÃO

A teoria dos subconjuntos vagos (SCV) - (Fuzzy Sets) foi construída a partir do trabalho de Zadeh (1) em 1965. O desenvolvimento da teoria foi rápido, porém as aplicações seguiram-se com maior dificuldade porque exigia encontrar uma interpretação e uma heurística adequadas.

Passaram a usar-se as palavras "possibilidade", Zadeh (2), e "oportunidade", Hägg (3), para descrever a natureza dos SCV.

Radicou-se no vocabulário o conceito de precisão de linguagem (Language Crispness). Assim, uma grandeza, uma proposição, uma informação, podiam ser descritas por:

ou uma variável bem determinada;
ou uma distribuição probabilística;
ou um caracterizante de um conjunto vago,

segundo a imprecisão crescente de que estavam envolvidos.

Tarefa idêntica foi realizada no sentido de explicar e interpretar as conectivas e quantificadores usados na teoria dos SCV.

Esta imprecisão está para além do aleatório, como mostra S.Nahmias (4).

Uma tarefa importante tem sido a de enquadrar a teoria dos SCV em conceitos formais preexistentes nos seguintes domínios principais, (veja-se por exemplo)

Lógica e Linguística - GOTTWALD (14)
NGUYEN (10)
RALESCU (6)
BANDLER e KOHOUT (16)
WILLMOTT (17)
FUKAMI et alter (22)
EYTAN

Topologia - ZADEH (32)
GOGUEN (31) e (33)
WONG (34)
LOWEN (35) e (37) (15)
HUTTON (36) (13)
GANTNER et alter (14) e (39)
HÖHLE (9)

Distribuições (de Probabilidade e Possibilidade) - HISDAL (7)
NGUYEN (8) e (10)
HÖHLE (9)
KLEMENT (18) et alter (24).
HIROTA (25)

No domínio das <u>aplicações</u>, a bibliografia é muito extensa, por isso faremos referência breve a alguns trabalhos típicos:

Teoria da decisão - HÄGG (3)

Programação - FLACHS et alter (38)

Clusters - BEZDEK " " (5)

Proximidades - (27), (28), (29), (30), (40)

O Prof. ANÍCETO MONTEIRO também tem trabalhos sobre reticulados relacionados com (SCV), por exemplo (42).

Uma linha de desenvolvimento da teoria SCV consiste em procurar uma teoria ou linguagem formal que possa abarcar os conceitos de probabilidade e possibilidade como casos particulares, veja-se, por exemplo, RALESCU e EYTAN (26).

Na verdade, o pensamento humano foi construindo uma linguagem que pode ser extremamente precisa ou muito vaga, mas nenhuma destas feições pode ser desprezada, porquanto todas têm um certo conteúdo informativo.

Por último, recordar que se estabeleceu ultimamente uma certa predileção pelo reticulado $[0,1]$ eventualmente com uma σ - álgebra associada, e medidas de vários tipos nele definidas.

Nas aplicações, os reticulados baseados em conjuntos finitos têm sido muito trabalhados.

II - Apresentação do Tema

Há essencialmente três conjuntos fundamentais nesta teoria:

X - O Conjunto Universal de Discurso

Ω - O Conjunto de Valores, destinado à valorização de conjuntos (fórmulas de discurso em X)

$[0,1]$ - O Conjunto Referencial de Valores

A estes conjuntos é possível impôr-lhes estruturas algébricas e topológicas e estabelecer entre eles correspondências de vários tipos.

II 1 - Conjunto Universal de Discurso (X)

a) Sejam: $B \subseteq X$

S_B uma σ-álgebra de sub-conjuntos de Borel do conjunto B

(B, S_B) um espaço mensurável

m_B uma medida definida em S_B, totalmente finita, satisfazendo a $m_B(B) = 1$. Note-se que m_B toma valores no intervalo $[0,1]$.

(B, S_B, m_B) será um espaço medida susceptível de representar um espaço de probabilidade.

b) Aplicações (G)

Seja G o conjunto de aplicações g

$$g : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,1], \quad \forall g \in G$$

e satisfazendo a condição:

$$\forall A \in \mathcal{P}(X) \text{ será } g(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } A \notin G \\ m_g & \text{se } A \in G \end{cases}$$

As aplicações $\in G$ são uma extensão da medida m_B, porém

$$g(X - B) = 0 .$$

c) Justificação da criação de $\mathcal{B}$

Nem todos os sub-conjuntos de X são mensuráveis quer por razões de forma quer porque correspondem à descrição de situações reais não mensuráveis.

Preferiu-se escolher um sub-conjunto $\mathcal{B}$ de X, onde as suas partes não ofereciam dificuldades de interpretação.

Relega-se para $X - \mathcal{B}$ tudo quanto é semanticamente irrelevante.

Ao construir $S_{\mathcal{B}}$ houve os cuidados correspondentes.

II 2 - Conjunto de Valores (Ω)

a) Seja Ω um reticulado, onde:

Ψ e $\Uparrow$ são duas conectivas duais, interpretadas como por exemplo = majorante e minorante, respectivamente.

$\succ$ o símbolo de Relação de Ordem do Reticulado (em geral, é parcial)

1_Ω o Supremo do Reticulado

0_Ω o Ínfimo do Reticulado

Sendo dados α, $\beta \in \Omega$, nem sempre será possível relacioná-los por meio de $\alpha \succ \beta$, contudo para qualquer $\alpha \in \Omega$, será:

$$1_\Omega \succ \alpha \succ 0_\Omega$$

b) Cadeia Completa $[\alpha]$ em Ω

Seja dada uma sucessão $\{\alpha_i\}$ onde:

1) $\alpha_i \in \Omega$, $\alpha_0 = 0_\Omega$ e $\alpha_n = 1_\Omega$

2) Para todo o par de dois elementos sucessivos $\alpha_i, \alpha_{i+1} \in \Omega$

deverá verificar-se:

1 - $\alpha_{i+1} \succ \alpha_i$

2 - Não existe $\beta \in \Omega$, tal que $\alpha_{i+1} \succ \beta \succ \alpha_i$, para qualquer par sucessivo, excepto se $\alpha_{i+1} = \alpha_n$ e $\alpha_i = \alpha_0$

II 3 - Conjuntos Associados $C_\alpha \subset [0,1]$

a) Seja $F_\alpha : [\alpha] \Rightarrow C_\alpha$ uma função (1,1) satisfazendo a:

1) $F(1_\Omega) = 1$ e $F(0_\Omega) = 0$

2) $(\alpha_{i+1} \succ \alpha_i) \Longrightarrow (F_\alpha(\alpha_{i+1}) \geq F_\alpha(\alpha_i))$

$\forall (\alpha_i \ldots \alpha_i \in [\alpha])$

$C_\alpha \subseteq [0,1]$ é o conjunto associado a $[\alpha]$ e por construção é um reticulado, onde $(\geqslant)$ é susceptível de ser munido de uma involução de ordem e daí ser um reticulado pseudo-complementado, satisfaz as leis de Morgan; é uma álgebra pseudo-Booleana.

b) Conjuntos e Cadeias Distintas

Duas cadeias completas $[\alpha]$ e $[\beta] \in \Omega$ dizem-se distintas se:

$$\exists\, \alpha_j \in [\alpha] \quad , \text{ tal que } \alpha_j \notin [\beta]$$

e

$$\exists\, \beta_k \in [\beta] \quad , \text{ tal que } \beta_k \notin [\alpha]$$

C_α e C_β são distintos se $[\alpha]$ e $[\beta]$ o forem.

$\mathcal{G}$ é o símbolo da classe de conjuntos distintos em $[0,1]$

$\mathcal{F}$ é o conjunto dos F_α geradores dos $C_\alpha \in \mathcal{C}_\Omega$

$(C_\alpha, S_\alpha, m_\alpha)$ é o espaço mensurável (C_α, S_s) gerado por C_α e munido de uma medida m_α

S_α simboliza a σ-álgebra gerada por C_α.

m_α é uma medida totalmente finita, sendo $m_\alpha(C_\alpha)$ (normada) que pode ser assimilada a uma medida de probabilidade.

c) Condição de uniformização das medidas m_α

Seja $\{[0,1], S_{[01]}, m_{[01]}\}$ um espaço de medida em $[0,1]$

Porque $\forall_\alpha$, $C_\alpha \subseteq [0,1]$, escolham-se os S_α e $S_{[01]}$ de tal modo que:

$$1) \quad \forall_\alpha \, , \; S_\alpha \subseteq S_{[0,1]}$$

e as medidas m_α e $m_{[01]}$ sejam escolhidas de modo que:

$$2) \quad m_\alpha(E) = m_{[0,1]}(E) \quad , \; \forall E \in S_\alpha$$

$$e \quad \forall (C_\alpha, S_\alpha, m_\alpha) \in \mathcal{C}_\Omega$$

II 4) Caracterizantes

a) Seja dada a classe de funções

$f_\lambda : X \longrightarrow \Omega$ onde $\lambda \in \Gamma$ e Γ é um conjunto de índices, isto é:

$$\forall x \in X, \ \dot{\exists}\, w_\lambda \in \Omega \qquad \text{tal que} \quad f_\lambda = w_\lambda$$

e para $\quad \forall f_\lambda \in \Omega^X$

cada $f_\lambda(x)$ representará (ou é o caracterizante, ou a indicatriz, ou a característica, ou define) um sub-conjunto de X (eventualmente vago) (Fuzzy).

b) Composições φ

$$\varphi_{\alpha\lambda} = F_\alpha \circ f_\lambda \quad \text{onde} \quad F_\alpha \in \mathcal{F}, \quad \varphi_{\alpha\lambda} \in [0,1]^X$$

Os $\varphi_{\alpha\lambda}$ podem entender-se como caracterizantes de sub-conjuntos de X, mas tomando valores em $[0,1]$.

Se ϕ for o conjunto dos $\varphi_{\alpha\lambda}$, designa-se por $\phi_B \subseteq [0,1]^B$, a restrição a $B \subseteq X$, no sentido seguinte:

$$\forall f(x) \in \phi_B, \ (x \in (X-B)) \Longrightarrow (f(x)=0)$$

II 5) Medida de Probabilidade (Vaga)

a) Espaço V-mensurável

Segue-se, aqui, o método de provêr de uma mensurabilidade vaga e de uma medida vaga de probabilidade expostos por Klement, Lowen et Alter, em (18), (24) e (32).

Porque nos anexos 3 e 4 a matéria está sintetizada, limita-se à exposição das conclusões principais:

Definição: $\mathcal{T} \subseteq [0\,1]^X$ é uma $\mathcal{T}$-álgebra vaga sse:

1) $\forall \alpha$ constante então $\alpha \in \mathcal{T}$

2) $\forall \mu \in \mathcal{T} \Longrightarrow (1-\mu) \in \mathcal{T}$ (pseudo-complementaridade)

3) $\forall \{\mu_m \in \mathcal{T}^N \Longrightarrow \operatorname{Sup} \mu_m \in \mathcal{T}, \ \forall m \in N$

$(X, \mathcal{T})$ será um espaço mensurável vago ou(V-mensurável)

b) Funções V-mensuráveis

Se $(X, \mathcal{E})$ e $(Y, \mathcal{T})$ forem dois espaços V-mensuráveis, então define-se função mensurável vaga (ou V -mensurável):

$$f : (X, \mathcal{E}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T})$$

satisfazendo a

$$f^{-1}(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{E}$$

c) Medida de Probabilidade Vaga ou (V -medida de Probabilidade)

Seja: $m_v : \mathcal{T} \to [0,1]$, $(X, \mathcal{T})$ é um espaço V -mensurável satisfazendo a:

1) $m_v(\phi) = 0$ e $m_v([0,1]) = 1$ (Normalização)

2) $\forall \mu, \nu \in \mathcal{T} : m_v(\mu \vee \nu) + m_v(\mu \wedge \nu) = m_v(\mu) + m_v(\nu)$ (aditividade)

3) $\forall (\mu_m)_{m \in N} \in \mathcal{T}^N, \mu \in \mathcal{T} : \left((\mu_m)_{m \in N} \uparrow \mu\right) \Rightarrow \left(m_v(\mu_m)_{m \in N} \uparrow m_v(\mu)\right)$

onde $\vee$ e $\wedge$ é o par de conectivas duais significando max e min, respectivamente.

O triplo $(X, \mathcal{T}, m_v)$ é um espaço de probabilidade vaga.

Esta definição confere a m_v as propriedades seguintes:

monotonia

aditivo $\uparrow$

Não é verdade porém que seja necessariamente

$$m(\alpha) = \alpha$$

$$m(I - \mu) = 1 - m(\mu), \quad I \equiv [0,1]$$

$$\forall (\mu_m)_{m \in N} \in \mathcal{T}^N, \mu \in \mathcal{T} : \left(\mu_{m \in N} \downarrow \mu\right) \Longrightarrow \left(m_v(\mu_m)_{m \in N} \downarrow m_v(\mu)\right)$$

Simbolize-se por $(B, \mathcal{T}_B, m_{v_B})$ o espaço de V -probabilidade restrito a $B \subseteq X$.

II 6) Caracterizantes definidos em Ω

Seja $h : \Omega \to [0,1]$

onde $[0,1]$ é um reticulado pseudo-complementado, dispondo das conectivas $\vee \cdot \wedge$ (max.min) e a relação de ordem $(\geq)$, é munida de uma involução de ordem.

Compondo $h : \Omega \to [0,1]$ com $f : X \to \Omega$

obtem-se $r : \Omega \to [0,1]$

A dificuldade reside em propor uma definição de operador composição $(\circ)$ porque em Ω as conectivas são Υ , $\curlywedge$, enquanto que em $[0,1]$ foram definidas $\vee$ e $\wedge$.

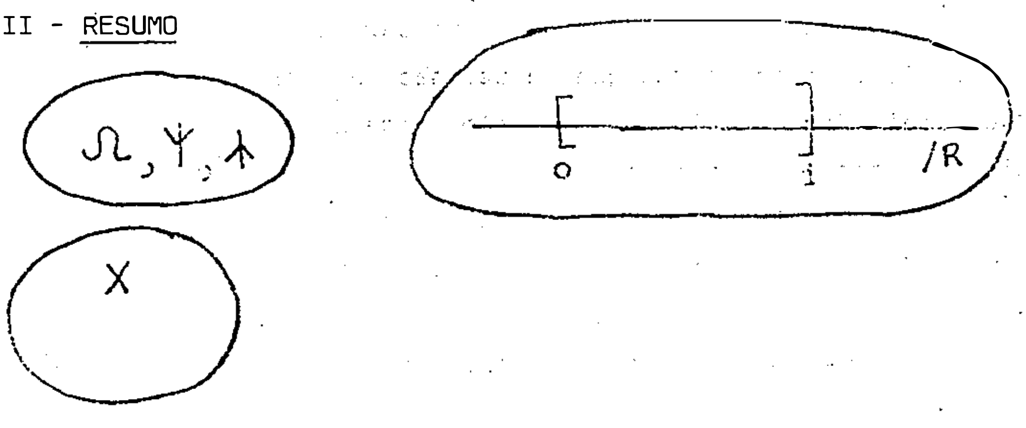
Um modo, relativamente geral, é tratar o par $(\vee,\wedge)$ como $(\Upsilon,\curlywedge)$.

II 7) Classe de Caracterizantes

Refere-se por último a vantagem de formar classes de reticulados, cujos membros gozam de certas propriedades. As referências (27), (28), (29), (30) e (40) constituem um exemplo de estudo de uma classe de caracterizantes que, da esquerda para a direita, é descrito como uma função monótona não decrescente até um certo ponto $x_m \in X$ passando a função a monótona não crescente para $x > x_m$.

Esta classe pode "modelar" um conjunto vasto de situações reais, e por outro lado, formalmente, possuem muitas propriedades específicas.

III - RESUMO



Métodos de Valorização

Os vários modos de valorizar conjuntos de $\mathcal{P}(X)$ podem reconduzir--se aos seguintes:

a) Definir uma medida de probabilidade m_B em $B \subseteq X$.

onde m_B é uma <u>valorização</u> para todo o conjunto E mensurável de B

$(E \in S_B)$.

b) Definir conjuntos vagos $f_\lambda : X \longrightarrow \Omega$ e usar um <u>critério</u>, como por exemplo $\sup_x (f_\lambda(x) : \forall x \in X)$ para valorizar o conjunto vago associado ao caracterizante f_λ.

c) Definir conjuntos vagos Ω^X e depois por $F : \Omega \longrightarrow [0,1]$; operar em $[0,1]^X$.

d) De um modo idêntico a c) mas definindo caracterizantes de $\Omega \longrightarrow [0,1]$ em vez de lançar mão da classe F.

e) Definir em $X \longrightarrow [0,1]$ uma probabilidade vaga, como faz Clement et Alter (II 5, a) ou usando o método de Hirota.

Todos os métodos dão origem a uma valoração de conjuntos (onde os conjuntos holónicos - (singletons) desempenham papel importante). Mas num certo "Contexto de discurso", essas várias valorações devem estar em correspondência com propriedades e atributos distintos do Real que está sendo sujeito a modelação, de outra forma a compatibilização sintática não seria conseguida.

Daí esforços heurísticos constantes para encontrar para os conjuntos vagos uma interpretação - há uns anos tem sido avançado o conceito de "Possibilidade" - em contraste com o de "Probabilidade".

À decisão humana interessa conhecer quais as "possibilidades" que são oferecidas, mais do que qual a decisão mais provável (ou que está na moda, ou que é mais frequente). As duas valorações do mesmo conjunto universal podem ser efectuadas, deixando ao decisor a escolha.

Finalmente, uma referência às linguagens de alto nível, tal como apresenta Eytan (26), em "A Toposlogical Point of View", as várias teorias para valorizar classes, sub-conjuntos de um dado conjunto universal, são particularizações de uma teoria geral, expressável numa linguagem superior mais geral e potente.

1) L.A. ZADEH: "Fuzzy Sets", publicado em "Information and Control", 8 (1965), 338-353

2) L.A. ZADEH: "Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility", publicado em "Fuzzy Sets and Systems", vol. 1 nº1, pag. 3,28, 1978

3) C. HÄGG: "Possibility and Cost in Decision Analysis", publicado em "Fuzzy Sets and Systems", vol. 1 nº 2, pag. 81-86, Abril 1978

4) S. NAHMIAS: "Fuzzy Variables", publicado em "Fuzzy Sets and Systems", vol.1, nº2, pag.97-110, Abril 1978

5) J.C. BEZDEK; J.D. HARRIS: "Fuzzy Partitions and Relations: an Axiomatic Basis for Clustering", publicado em "Fuzzy Sets and Systems", vol.1, nº2, pag.111-127, Abril 1978

6) D. RALESCU: "Fuzzy subobjects in a category and the theory of C-Sets", publicado em "Fuzzy Sets and Systems", vol.1, nº3, pag.193-202, Abril 1978

7) E. HISDAL: "Conditional Possibilities, Independance and Non Interaction", publicado em "Fuzzy Sets and Systems", vol.1, nº 4, 283-297, Outubro 1978

8) H.T. NGUYEN: "On Conditional Possibility Distributions", publicado em "Fuzzy Sets and Systems", vol. 1, nº 4, 299-309, Outubro 1978

9) U. HÖHLE: "Probabilistic Uniformisation of Fuzzy Topologies". publicado em "Fuzzy Sets and Systems", vol. 1 nº4, Outubro 1978, pag. 311-332

10) H.T. NGUYEN: "Some Mathematical Tools for Linguistic Probabilities", publicado em "Fuzzy Sets and Systems", vol.2nº1, Janeiro 1979, pag. 53-65

11) S. GOTTWALD: "Set Theory for Fuzzy Sets of Higher Level", publicado em "Fuzzy Sets and Systems", vol.2, nº 2, Janeiro 1979, pag. 125-151

12) S.GOTTWALD: "Fuzzy Uniqueness of Fuzzy Mappings", publicado em "Fuzzy Sets and Systems", vol.3, nº1, pag.49-74

13) B. HUTTON, I. REILLY: "Separation Axioms in Fuzzy Topological Spaces, publicado em "Fuzzy Sets and Systems", vol. 3, nº1, pag.93-104

14) S. GOTTWALD: "Fuzzy Propositional Logics, publicado em "Fuzzy Sets and Systems", vol.3, nº2, pag. 181-192

15) R. LOWEN: "Convex Fuzzy Sets", publicado em "Fuzzy Sets and Systems", vol.3, nº 3, pag. 291-310

16) W. BANDLER: "Fuzzy Power Sets and Fuzzy Implication Operators", vol.4, nº1, pag.13-30

17) R. WILLMOTT: "Two Fuzzier Implication Operators in Theory of Fuzzy Power Sets", publicado em "Fuzzy Sets and Systems", vol.4, nº1, pag.31-36

18) E.P. KLEMENT: "Fuzzy σ-algebras and Fuzzy Measurable Functions", publicado em "Fuzzy Sets and Systems", vol.4, nº1, pag. 83-93

19) A. KANDEL, W.J. BYATT: "Fuzzy Processes", publicado em "Fuzzy Sets and Systems", vol.4, nº2, pag.117-152

20) A. DI NOLA, A.G.S. VENTRE: "On some Chains of Fuzzy Sets", vol.4, nº2, pag.185-191 da "Fuzzy Sets and Systems" (F.S.S.)

21) R.R. YAGER: "On a General Class of Fuzzy Connectives", vol.4, nº3, pag. 235-242 (F.S.S.)

22) S. FUKAMI, M. MZUMOTO, K. TANAKA: "Some Considerations of Fuzzy Conditional Influence", F.S.S., vol.4, nº3, pag.243-273

23) KH. KIM, F.W. ROUSH: "Generalized Fuzzy Matrices", F.S.S., vol.4, nº3, pag.293-315

24) E.P. KLEMENT, W. SCHWYHLA, R. LOWEN: "Fuzzy Probability Measures", F.S.S., vol.5, nº1, pag.21-30

25) K. HIROTA: "Concepts of Probabilistic Sets", F.S.S., vol.5, nº1, pag.31-46

26) M. EYTAN: "Fuzzy Sets: A Topos-Logical Point of View", vol.5, nº1, pag.47-67

[27] A.G. PORTELA, Conceito de Proximidade em Mecânica, 1º Congresso Nacional de Mecânica Teórica e Aplicada, Dec. 1974, Lisbon

[28] A.G. PORTELA, Aplicação do Conceito de Proximidade à Termodinâmica Macroscópica, 1º Congresso Nacional de Mecânica Teórica e Aplicada, Dec. 1974, Lisbon

[29] A.G. PORTELA, Aplicação de um Sistema de Proximidades a um Sistema Mecânico Articulado, 1º Congresso Nacional de Mecânica Teórica e Aplicada, Dec. 1974, Lisbon

[30] A.G. PORTELA, Certas Classes de Proximidade de Aplicação à Mecânica, 2º Congresso Nacional de Mecânica Teórica e Aplicada, July 1979, Lisbon

(31) J.A. GOGUEN, L - Fuzzy Sets, Journal of Mathematical Analysis and Applications 18, 145-174, 1967

(32) L.A. ZADEH, Probability Measures of Fuzzy Events, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 23, 421-427, 1968

(33) J.A. GOGUEN, The Fuzzy Tychonoff Theorem, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 43, 734-742, 1973

(34) C.K. WONG, Fuzzy Topology: Product and Quocient Theorems, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 45, 512-521, 1974

(35) M. ROBERTS LOWEN, Topologie Générale - Topologies Flcues, C.R.Acad. Sc. de Paris, 278, 1º Avril 1974, Série A-925

(36) BRUCE HUTTON, Normality in Fuzzy Topological Spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 50, 74-79, 1975

(37) R. LOWEN, Initial and Final Fuzzy Topologies and the Fuzzy Tychonoff Theorem, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 58, 11-21, 1977

(38) J.FLACHS and M.A.POLLATSCHEK, Further Results on Fuzzy-Mathematical Programming, Information and Control, 38, 241-357, 1978

(39) T.E. GANTNER and R.C. STEINLAGE, Compactness in Fuzzy Topological Spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 62, 547-562, 1978

(40) A.G. PORTELA, Proximity, paper presented to the 1st. Congress H.B.D.S., held in Lisbon, May 1979

(41) R. LOWEN: "Fuzzy Topological Spaces and Fuzzy Compactness", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 56, 1976

(42) A.A. MONTEIRO: Técnica, Setembro e Outubro, 1978, nº449/50, ano LIII volume XL

Anexo 1 (SUBCONJUNTOS VAGOS)

1) Todos os subconjuntos de um dado conjunto universal de discurso X podem ser especificados por um "caracterizante" (característica ou indicatriz) e este não é mais do que uma aplicação $f : X \longrightarrow R$, onde R representa um reticulado.

Assim, se o reticulado R for o de Boole $R_B \equiv (0,1)$ e associando o valor 1 à frase semântica "o elemento $x \in X$ pertence ao subconjunto A de X" e o valor 0 à frase "o elemento $x \in X$ não pertence ao subconjunto A de X", então R_B é a indicatriz do subconjunto A.

Existe uma relação 1-1 entre os subconjuntos A e as respectivas indicatrizes (ou caracterizantes).

A natureza de X, R, F, onde F representa o conjunto das aplicações f previstas numa dada Teoria de subconjuntos Vagos (SCV), é determinante nas propriedades e estrutura dessa teoria.

O conjunto universal de discurso X mais usado é a recta real, porém conjuntos com um número enumerável ou finito de elementos é usual em aplicações.

Quanto aos reticulados (R), convém distinguir duas classes: A e B.

Sendo $a, b \in \underline{R}$ — a, b são elementos quaiquer do conjunto de base $\underline{R}$ do reticulado R,

e se $\forall (a,b) \in R^2$, for possível definir $\max[a,b] = c$ e $\min[a,b] = d$ e $c, d \in R$

então esta classe será designada de A, ou tal não é possível para alguns pares e então designa-se de B.

Os reticulados (R) do tipo A são munidos das conectivas $(\vee$ e $\wedge)$.

Onde:

$\vee (a,b)$ é interpretado como max (a,b)

$\wedge (a,b)$ é interpretado como min (a,b)

Se o reticulado for complementado ou pseudo-complementado pode definir-se:

$$\neg a = a^c = 1 - a$$

onde 1 é o símbolo do elemento do supremo do reticulado.

0 é o símbolo do elemento ínfimo do reticulado.

Nos reticulados do tipo B, as conectivas mais usuais são:

$\Psi (a, b)$ interpretado como majorante (a, b)

$\pitchfork (a, b)$ interpretado como minorante (a, b)

Estas relações assentam na relação de ordem $(\succ)$ do reticulado R .

Uma classe de reticulados do tipo A muito usada é construída com base nos conjuntos adiante definidos (11, GOTTWALD)

$$R_m = \left(\frac{K}{m-1} \;\middle|\; 0 \leq K \leq m-1 \right\} \qquad m \geqslant 2$$

para $m = 2$ R_2 é o reticulado de Boole usado nos conjuntos usuais.

$m > 2$ R_m obtêm-se reticulados onde é sempre possível definir max e min (como aliás em R_2) e card (R_m) é finito ou enumerável.

Simboliza-se por $R_\infty = [0,1]$.

Repare-se que a relação de ordem dos reticulados do tipo R_m $(\leq)$ vai permitir formar conjuntos

$$R_m(\alpha) = \left\{ z \;\middle|\; z \in R_m \text{ e } (0 \leq z \leq \alpha) \right\}$$

onde $\alpha \in [0,1]$

α simboliza o"grau de pertence" ou "membership level", conceito semântico fundamental nas teorias de S.C.V..

São evidentes as seguintes expressões:

$$R_m(1) = R_m$$

$$R_m(0) = 0$$

$$\alpha \geqslant \beta \qquad R_m(\alpha) \supset R_m(\beta)$$

$$\forall \alpha \qquad R_m(1) \supset R_m(\alpha) \text{ e } R(\alpha) \supset R_m(0)$$

Semânticamente (1) representa a <u>certeza</u> absoluta na verdade da declaração e (0) a certeza absoluta na <u>não</u> verdade de uma declaração.

A dificuldade semântica que os conjuntos vulgares introduzem é esta "absoluta certeza" no sim ou no não, quando a informação recebida ou emitida é apenas verdadeira num <u>certo grau</u>.

2) <u>Sistemas de conectivas</u>

O sistema de conectivas mais usado é max e min mas muitas outras formas têm sido apresentadas e convém referir para mostrar como é vasto o campo por explorar.

Assim, Yager (21) para o reticulado $R = [0\ 1]$, pseudo-complementado, sugere uma intersecção da forma:

$$A \cap_p B = C_p$$

onde

$$C_p(x) = 1 - \min\left\{1, \left([1 - A(x)]^p + [1 - B(x)]^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$$

com $p \geq 1$

de que resultam os seguintes casos particulares:

$$p = \infty \qquad C_p(x) = \min[A(x), B(x)]$$

$$p = 1 \qquad C_p(x) = 1 - \min\{1, 2 - (A(x) + B(x))\}$$

$$= \max\{0, (A(x) + B(x) - 1)\}$$

Esta definição conserva as propriedades de associatividade e comutatividade e $C_p(x)$ é monotonicamente não decrescente com $A(x)$ e ou $B(x)$

$$0 \cap_p A(x) = 0$$

$$1 \cap_p A(x) = A(x)$$

e como propriedades novas

$$A(x) \cap_{p'} A(x) \leq A(x) \cap_{p''} A(x) \text{ se } p' < p''$$

$$A(x) \cap_\infty A(x) = A(x)$$

$$A(x) \cap_p B(x) \leq \min\{A(x), B(x)\} = A(x) \cap_\infty B(x)$$

Yager para definir união $\cup$ usa a pseudo complementaridade de Zadeh definida como:

$$\neg A = \bar{A} = 1 - A$$

então será:

$$\overline{A \cup_p B} = \bar{A} \cap_p \bar{B}$$

Donde ainda

$$D_p = A(x) \cup_p B_x = \min\left\{1, \left[A(x)^p + B(x)^p\right]^{1/p}\right\}$$

Propriedades correspondentes às da intersecção podem ser demonstradas.

Outro exemplo é devido a Gottwald (11) que constrói a sua lógica a partir de R_m e R_ω e define numerosas conectivas:

$$\neg A(x) = 1 - A(x)$$

$$\wedge_\lambda (A(x), B(x)) = \min\{A(x), B(x)\}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}$$

A média e variância são definidas como se segue:

$$m_P(A) = \frac{1}{P(A)} \int_{R^n} x \cdot \mu_A(x) \cdot dP$$

$$VAR_P(A) = \frac{1}{P(A)} \int_{R^n} (x - m_P(A))^2 \mu_A(x) \cdot dP$$

A entropia toma uma forma corrente de :

$$HP(A) = -\sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i) \cdot p_i \log p_i$$

$$\text{com} = P = (p_1, p_2 --- p_n)$$

que terá de ser entendida como a entropia de um conjunto vago A com relação a uma distribuição de probabilidades P.

Assim, se x e y forem duas variáveis aleatórias com distribuições de probabilidade P e Q, será $H(x,y) = H(x) + H(y)$ e

será $$HPQ(A.B) = P(A)\, HP(A) + P(B) + HQ(B)$$

$$PQ = \{ p_i q_j \} \qquad i,j \in (1, --- n)$$

e

$$P(A) = \sum_i \mu_A(x_i) \cdot p_i$$

$$P(B) = \sum_j \mu_B(x_j) \cdot q_j$$

$$HP(A) = -\sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i) \cdot p_i \log p_i$$

$$HQ(A) = -\sum_{j=1}^{m} \mu_B(y_j) \cdot q_j \log q_j$$

Nota final:

Porque: $dP = P'(x) \cdot dx$

será: $P(A) = \int_{R^n} \mu_A(x) \cdot P'(x) \cdot dx$

Hisdal (7) para estender a probabilização de conjuntos vagos a relações vagas define:

- Dois conjuntos universais de discurso: X_1 e X_2
- $Y = (Y_1, Y_2)$ uma variável binária vaga que toma valores em $X_1 \times X_2 = X$
- $\pi_{Y_2 | Y_1}(x_2 | x_1)$ a distribuição da "possibilidade"[1] de Y_2, desde que a Y_1 tenha sido dado um determinado valor $x \in X_1$
- $\pi_{Y_1}(x_1)$ a "possibilidade"[1] marginal para Y_1

Repare-se nas correspondências seguintes:

Possibilidade $\longleftrightarrow$ Probabilidade

Vago (Fuzzy) $\longleftrightarrow$ aleatório

$\pi \longleftrightarrow P$ (probabilidade)

É facil aproveitar esta definição e respectivos teoremas para aplicar a relações vagas entre X_1 e X_2.

Assim, se ρ for uma relação de X_1 para X_2 então é possível calcular

$$\pi(x_2) = \pi(x_1) \circ \rho$$

onde $\circ$ é o operador max.min (tratam-se de reticulados do tipo A).

Nguyen (8) trata de um modo semelhante as distribuições de possibilidades[1], isto é, apoiando-se na teoria das distribuições de probabilidades e de modo que se o caracterizante do subconjunto vago degenerar na indicatriz de um conjunto vulgar, as distribuições de "possibilidades"[1] reduzem-se a distribuições de probabilidades.

Nas condições anteriores,

$$\pi_y(x) \triangleq \text{Possibilidade}\ \{ y = x$$

$$\pi_y(A) = \sup_{x \in A} \pi_y(x)$$

onde: A é um subconjunto vago de X.

Assim, sejam dadas:

Uma função $\pi : X \to [0, 1]$

sendo $\sup_x \pi(x) = 1$

se $T : [0,1]^2 \to [0,1]$

Então Y_1 e Y_2 são T-independentes, sse

$$f_{(Y_1,Y_2)}(x_1,x_2) = T\left[f_{Y_1}(x_1), f_{Y_2}(x_2)\right]$$

$$\text{e} \quad \theta_{x_2}\left[T\left(f_{Y_1}(x_1), f_{Y_2}(x_2)\right)\right]$$

A distribuição condicional será dada por:

$$f_{Y_1/Y_2}(x_1/x_2) = f_{(Y_1,Y_2)}(x_1,x_2) \cdot \alpha\left[f_{Y_1}(x_1), f_{Y_2}(x_2)\right]$$

onde $\alpha : [0,1]^2 \to R^+$ é designada de função de normalização e é escolhida de tal modo que:

a) $f(Y_1/Y_2) \leq 1$

b) $\left[f_{Y_1,Y_2}(x_1,x_2) = T\left(f_{Y_1}(x_1), f_{Y_2}(x_2)\right)\right] \Rightarrow$

(implica) $\Rightarrow \left[f_{Y_1/Y_2}(x_1/x_2) = f_{Y_1}(x_1)\right]$

Finalmente, o operador $\theta(\ )$ pode tomar a forma de <u>Sup</u> ( )

Sobre este tema veja-se também Höhle (9).

Tem interesse referir o trabalho de Klement (18) sobre σ-Algebras--vagas e funções mensuráveis vagas.

Porque os trabalhos apresentados até 1980 foram desenvolvidos em torno de classes de funções vagas da forma:

$$\mu : X \to I$$

X munido de uma σ-Álgebra A e $I \equiv [0,1]$ munido de σ-Álgebra de Borel

Assim, o domínio e contradomínio de μ são os espaços mensuráveis, respectivamente (X, A) e (Y, B) que <u>não</u> são espaços de conjuntos vagos.

O progresso efectuado por Klement consiste em partir de espaços de subconjuntos vagos, apoiando-se nos trabalhos efectuados em Topologia de conjuntos vagos, nomeadamente os de Lowen (41) e (37). Porque neste domínio há copiosa bibliografia, sugerem-se as referências seguintes:

(33), (34), (10), (11), (12), (14), (13), (15) e (26)

Uma medida $\hat{\pi} : \mathcal{P}(x) \rightarrow [0,1]$

satisfazendo a :

$$\hat{\pi}(\phi) = 0 \quad e \quad \hat{\pi}(X) = 1$$

sendo $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de X

Então:

$$\pi\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sup_{i \in I} \hat{\pi}(A_i)$$

onde I é um conjunto de índices.

Donde resulta que $\hat{\pi}$ é:

- $A \subset B \implies \hat{\pi}(A) \leq \hat{\pi}(B)$
- É subaditiva.
- $\hat{\pi}(\{x\}) \doteq \pi(x)$ pode não ser identicamente nulo.

A extensão destes conceitos às distribuições de possibilidades[1] faz-se definindo:

Possibilidade de $\{Y$ ser $A\}$ $=$

$$\doteq \sup \{\mu_A(x) \wedge \pi_Y(x)\}$$

onde $\mu_A(x) \rightarrow$ Caracterizante de A

$\pi_Y(x) \rightarrow$ A função Y

Repare-se:

1) Tanto π_Y como μ_A operam de $X \rightarrow [0,1]$

2) A forma reconduz-se a conceitos clássicos quando o caracterizante degenera na indicatriz de um conjunto usual.

Assim, pode ser introduzida a noção de distribuições condicionais.

Sejam: X_1 e X_2 dois conjuntos universais.

$$f_{(Y_1, Y_2)} : X_1 \times X_2 \rightarrow [0,1]$$

$$f_{Y_1}(x_1) = \theta_{x_2} [f_{(Y_1, Y_2)} (x_1, x_2)$$

$$f_{Y_2}(x_2) = \theta_{x_1} [f_{(Y_1, Y_2)} (x_1, x_2)$$

θ_{X_1} e θ_{x_2} são operações de "mistura" sobre X_1 e X_2, respectivamente.

Dada a extensão deste domínio, preferiu-se produzir duas sínteses que constituem os anexos 3 e 4.

Anexo 3 - Resume os trabalhos de Klement et Alter, (32), (18), (24)

e

Anexo 4 - Resume o trabalho de Hirota (25), em 1981 que lança mão do conceito de espaço paramétrico à abre eventualmente uma nova via à probabilização dos subconjuntos vagos.

(1) O Termo "Possibilidade" descreve um conceito próximo de "Probabilidade" na forma mas distante no significado.

Anexo 3

Este anexo 3 é uma síntese, sem demonstrações, de uma teoria de SCV, sua mensurabilidade, probabilização, abstraída dos trabalhos seguintes:

ZADEH 1968 (32)

KLEMENT 1980 (18)

KLEMENT, SCHWYHLA, LOWEN 1981 (24)

O objectivo é mostrar a similitude dos métodos usados na construção formal de espaços mensuráveis, e espaços medidas tanto em conjuntos vulgares como vagos.

Este anexo 3 tem duas partes. A 1.ª parte, baseada essencialmente em (18), ocupa-se da mensurabilidade do espaço (na teoria de sub-conjuntos vagos). A segunda parte introduz já medidas de probabilidade e resulta sobretudo da síntese de (24) e (32).

1.ª Parte (Mensurabilidade)

X um conjunto não vazio

I o intervalo

B a σ-Álgebra de sub-conjuntos de I

1º) Definição σ - Álgebra-Vaga

$\sigma \subseteq I^X$ é uma σ-Álgebra-Vaga sse:

1) $\forall \alpha$ constante, $\alpha \in \sigma$

2) $\forall \mu \in \sigma \Rightarrow 1-\mu \in \sigma$

3) $\forall \{\mu_n\} \subset \sigma \Rightarrow \operatorname{Sup} \mu_n \in \sigma$, $\forall n \in N$

onde N é um conjunto de índices.

- Os conjuntos vagos pertencentes a σ são designados Conjuntos Vagos Mensuráveis.
- O par (X, σ) um espaço mensurável vago
- A família F de todas as funções mensuráveis f, $(f:(X,A)\to(I,B))$ é uma σ-álgebra.
- Seja a sequência $[\{\mu_n\} \text{ em } \sigma]$, então $[\operatorname{Inf} \mu_n \in \sigma]$ com $n \in N$
- Seja a sequência convergente pontual $[\{\mu_n\} \text{ em } \sigma]$ em $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n \in \sigma$

Prop 1) 1) Sejam: (Y, σ) um espaço mensurável vago, a função

$f : X \to Y$

Então: $f^{-1}(\sigma)$ é σ-álgebra vaga em X

2) Seja (X, σ) um ESP. MENS. VAGO e $Y \subset X$ não vazio, então:

$$\sigma/Y = \{\mu/Y \mid \mu \in \sigma\}$$

é uma σ-álgebra vaga em Y.

Com efeito: $f^{-1}(\alpha) = \alpha$

$$f^{-1}(1 - \mu) = 1 - f^{-1}(\mu)$$

$$f^{-1}(\operatorname{Sup} \mu_m) = \operatorname{Sup} f^{-1}(\mu_m), \quad m \in N$$

Prop 2) Sejam $\{\sigma_j \mid j \in J\}$ a família de todas as σ-álgebras vagas em X.
Então $\bigcap_{j \in N} \sigma_j$ é uma σ-álgebra vaga em X

Introdução de Fuções Importantes

Definição de símbolos:

$T(X)$ Conjunto de todas as Topologias em X

$T_v(X)$ Conjunto de todas as Topologias Vagas em X

$A(X)$ Conjunto de todas as σ-álgebras em X

$A_v(X)$ Conjunto de todas as σ-álgebras vagas em X

$\mathcal{P}(X)$ Conjunto das partes de X

T_r a Topologia assim definida $\{]\alpha, 1] \mid \alpha \in I\} \cup \{I\}$

Definição de Funções

a) $L : \mathcal{P}(I^X) \to T(X)$ com $T(X) : \mathcal{E} \to L(\mathcal{E})$

significando: $L(\mathcal{E}) = \operatorname{Sup} \mu^{-1}(T_r), \ \forall \mu \in \mathcal{E}$

e será a topologia inicial em X para a família de "funções" $\mathcal{E}$ e a Topologia T_r

b) $K : \mathcal{P}(I^X) \to A(X)$ com $A(X) : \mathcal{E} \to K(\mathcal{E})$

onde $K(\mathcal{E}) = \operatorname{Sup}_\mu \mu^{-1}(B), \forall, \mu \in \mathcal{E}$ a mais pequena σ-álgebra em X, tornando as funções contidas em $\mathcal{E}$ mensuráveis em relação a B.

c) $\omega : T(X) \to T_F(X)$ com $T_F(X) : T \to \omega(T)$
sendo $\omega(T) = \mathcal{B}(T, T_r)$ o conjunto de todas as funções de (X, T) para (I, T_r).

d) $\Upsilon : A(X) \to A_F(X)$ com $A_F(X) : A \to \Upsilon(A)$
sendo $\Upsilon(A) = M(A, \mathcal{B})$ o conjunto de todas as funções mensuráveis de (X, A) para $(I, \mathcal{B})$.

e) $T : \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \to T(X)$ com $T(X) : E \to T(E)$
sendo $T(E)$ a mais pequena topologia para X contendo E.

f) $A : \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \to A(X)$ com $A(X) : E \to A(E)$
sendo $A(E)$ a mais pequena σ-álgebra em X contendo E.

g) $\mathcal{T} : \mathcal{P}(I^X) \to T_F(X)$ com $T_F(X) : E \to \mathcal{T}(E)$
sendo $\mathcal{T}(E)$ a topologia vaga em X mais pequena contendo E.

h) $\mathcal{A} : \mathcal{P}(I^X) \to A_F(X)$ com $A_F(X) : E \to \mathcal{A}(E)$
sendo $\mathcal{A}(E)$ a mais pequena σ-álgebra vaga contendo E.

i) $\pi : \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \to \mathcal{P}(I^X)$ com $\mathcal{P}(I^X) : E \to \pi(E)$
sendo: [illegible]

j) $\lambda : \mathcal{P}(I^X) \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ com $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) : E \to \lambda(E)$
sendo: $\lambda(E) = \{\mu^{-1}(]\alpha, 1]) \mid \mu \in E, \alpha \in I - \{1\}\}$

As principais propriedades destas funções são:

1) $\iota, K, T, \mathcal{T}, A, \mathcal{A}, \lambda$ são sobrejecções isotonas
2) Υ, π são injecções isotonas
3) $T, \mathcal{T}, A, \mathcal{A}$ são idempotentes
4) $K \circ \Upsilon = id_{A(X)}$ id (ideal)
5) $\lambda \circ \pi = id_{\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))}$
6) $T \circ \lambda = L \circ \mathcal{T} = \iota$
(7) $A \circ \lambda = K \circ \mathcal{A} = K$

<u>Definição 2</u> $\mathcal{T}$-<u>Álgebra Vaga</u> em X diz-se <u>gerada</u> sse:

$\exists$ $\mathcal{T}$-Álgebra A em X tal que $\mathcal{T} = \Upsilon(A)$

Prop = 2 Se $\begin{cases} \bar{\mathcal{E}} = \omega \circ \bot(\mathcal{E}) \\ \tilde{\mathcal{E}} = \Upsilon \circ K(\mathcal{E}) \end{cases}$ $\forall\, \mathcal{E} \in I^{*}$

então:

1) $\tilde{\mathcal{E}}$ é a mais pequena $\mathcal{T}$-álgebra vaga em X que contem $\bar{\mathcal{E}}$

2) Uma $\mathcal{T}$-álgebra vaga $\mathcal{T}$ é <u>gerada</u> sse $\tilde{\mathcal{T}} = \mathcal{T}$

Donde resultam vários teoremas, como:

$$\omega \circ T = \mathcal{T} \circ \pi$$

$$\Upsilon \circ A = \mathcal{T} \circ \pi$$

$$A \circ \bot = K \circ (\bar{\ })$$

$$\mathcal{T} \circ \omega = \mathcal{T} \circ \pi / T(X)$$

$$\mathcal{T} \circ (\bar{\ }) = (\tilde{\ }) \circ (\bar{\ })$$

onde $(\bar{\ })$ e $(\sim)$ são aplicações isotonas (pseudo-complementações) e ainda os seguintes <u>Diagramas Comutativos</u>

1)
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) & \xrightarrow{T} & T(X) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \omega \\ \mathcal{P}(I^{X}) & \xrightarrow{\mathcal{T}} & T_F(X) \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) & \xrightarrow{A} & A(X) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \Upsilon \\ \mathcal{P}(I^{(X)}) & \xrightarrow{\mathcal{T}} & A_F(X) \end{array}$$

3)
$$\begin{tikzcd} T(X) \arrow[r, "\omega"] \arrow[dr, bend right, "A_{K(X)}"'] & T_F(X) \arrow[d, "K"] \\ & A(X) \end{tikzcd}$$

4)
$$\begin{tikzcd} P(I^X) \arrow[r, "L"] \arrow[d, "(-)"'] & T(X) \arrow[d, "A"] \\ T_F(X) \arrow[r, "K"] & A(X) \end{tikzcd}$$

5)
$$\begin{tikzcd} T(X) \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\pi/_{T(X)}"'] & T_F(X) \arrow[d, "\sigma"] \\ P(I^X) \arrow[r, "\sigma"] & A_F(X) \end{tikzcd}$$

6)
$$\begin{tikzcd} P(I^X) \arrow[r, "(\overline{\ })"] \arrow[d, "(-)"'] & A_F(X) \arrow[d, "\sigma"] \\ T_F(X) \arrow[r, "(\sim)"] & A_F(X) \end{tikzcd}$$

Prop 3) Para cada:

função $f : X \to Y$

sub-conjunto E de $P(Y)$

sub-conjunto vago ε de I^X

σ -álgebra A em Y

Temos:

1) $\lambda(f^{-1}(\varepsilon)) = f^{-1}(\lambda(\varepsilon))$

2) $\pi(f^{-1}(E)) = f^{-1}(\pi(E))$

3) $\mathcal{T}(f^{-1}(\varepsilon)) = f^{-1}(\mathcal{T}(\varepsilon))$

4) $\sigma(f^{-1}(\varepsilon)) = f^{-1}(\sigma(\varepsilon))$

5) $L(f^{-1}(\varepsilon)) = f^{-1}(L(\varepsilon))$

6) $K(f^{-1}(\varepsilon)) = f^{-1}(K(\varepsilon))$

7) $\mathcal{J}(f^{-1}(A)) = f^{-1}(\mathcal{J}(A))$

8) $\overline{f^{-1}(\mathcal{E})} = f^{-1}(\bar{\mathcal{E}})$

9) $\widetilde{f^{-1}(\mathcal{E})} = f^{-1}(\tilde{\mathcal{E}})$

Funções Mensuráveis Vagas

Sejam $(X,\mathcal{E})$ e (Y,σ) dois espaços mensuráveis vagos.

Definição 3 A função $f: (X,\mathcal{E}) \rightarrow (Y,\sigma)$ é mensurável vaga (ou V -mensurável) sse: $f^{-1}(\sigma) \subset \mathcal{E}$

Donde resulta:

1) Sejam: $f:(X,\mathcal{E}) \rightarrow (Y,\sigma)$ e $g:(Y,\sigma) \rightarrow (Z,\sigma)$ funções mensuráveis.

Então $g \cdot f : (X,\mathcal{E}) \rightarrow (Z,\sigma)$ é também uma função V-mensurável

2) Sejam: $f: (X,\mathcal{E}) \rightarrow (Y,\sigma)$ uma função V -mensurável e $(Z, \mathcal{E}/_Z)$ um sub-espaço de $(X,\mathcal{E})$

Então: $f/_Z :(Z, \mathcal{E}/_Z) \longrightarrow (Y,\sigma)$ é também uma função V -mensurável.

3) Sejam: $f: X \rightarrow Y$ uma função e (Y,σ) um espaço V -mensurável.

Então $f^{-1}(\sigma)$ é a mais pequena σ álgebra vaga em X que torna f V -mensurável.

4) Sejam: $\mathcal{E}$ um sub-conjunto I^X e $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \xi$

Então $f: (X,\xi) \rightarrow (Y, \sigma(\mathcal{E}))$ é uma função V -mensurável.

5) Sejam $(X,\mathcal{T})$ e (Y,δ) espaços topológicos vagos.

Se $f:(X,\mathcal{T}) \rightarrow (Y,\delta)$ for uma função contínua e vaga, então $f(X,\sigma(\mathcal{T})) \longrightarrow (Y,\sigma(\delta))$ é uma função V -mensurável.

Prop 4 Se $f: (X,\mathcal{E}) \rightarrow (Y,\sigma)$ for V -mensurável, então $f:(X, k(\mathcal{E})) \rightarrow (Y, k(\sigma))$ será uma função V -mensurável.

Prop 5 Se $f(X,\mathcal{E}) \longrightarrow (Y,\sigma)$ for uma função, então são equivalentes as seguintes propriedades:

1) $f^{-1}(\kappa_1(\sigma)) \subset \kappa(\xi)$

2) $f^{-1}(\tilde{\sigma}) \subset \tilde{\xi}$

3) $f^{-1}(\sigma) < \tilde{\xi}$

Corolário:

σ é uma σ -álgebra vaga gerada e $f: (X,\xi) \longrightarrow (Y,\sigma)$ uma função sse $f^{-1}(\kappa(\sigma)) \subset \kappa(\sigma)$ será f V -mensurável.

Proposição 5 Se (X,A) e (Y,D) forem espaços mensuráveis

$f: (X,A) \longrightarrow (Y,D)$ é mensurável sse $f: (X,\xi(A)) \rightarrow (Y,\xi(D))$

for σ -mensurável.

Produtos de σ -Álgebras Vagas

Sejam: a) X um conjunto não vazio

b) $\{(Y_j,\sigma_j) \mid j \in J\}$ uma família de espaços mensuráveis vagos.

c) $\{f_j : X \longrightarrow Y_j \mid j \in J\}$ uma família de funções.

d) $\sup_{j \in J} f_j^{-1}(\sigma_j)$ a mais pequena σ -álgebra vaga em X que torna $\forall j$ $f_j : X \rightarrow (Y_j,\sigma_j)$ V -mensuráveis,

é facil de ver que:

1) $\sup_{j \in J} f_j^{-1}(\sigma_j) = \sigma\left(\bigcup_{j \in J} f_j^{-1}(\sigma_j)\right)$

2) Se: $\begin{cases} (Z,\sigma) & \text{for um espaço mensurável vago} \\ f: Z \longrightarrow X & \text{uma função} \end{cases}$

$f: (Z,\sigma) \rightarrow (X, \sup_{j \in J} f_j^{-1}(\sigma_j))$

será V -mensurável, sse $(f_j \cdot f): (Z,\sigma) \longrightarrow (Y_j,\sigma_j)$ for uma composição V -mensurável para $\forall j \in J$

3) $\sup_{j \in J} f_j^{-1}(\sigma_j)$ é a maior σ -álgebra vaga em X possuindo V-mensurabilidade.

4) Seja a) X um conjunto não vazio.

b) $\{(Y_j, \sigma_j) \mid j \in J\}$ uma família de espaços mensuráveis vagos.

c) $\{f_j : X \to Y \mid j \in J\}$ uma família de funções.

Então

$$\sup_{j \in J} f_j^{-1}(K(\sigma_j)) = K\left(\sup_{j \in J} f_j^{-1}(\sigma_j)\right)$$

e

$$\sup_{j \in J} f_j^{-1}(J(A_j)) = J\left(\sup_{j \in J} f_j^{-1}(A_j)\right)$$

Definição 4.

Sejam a) $\{(X_j, \sigma_j) \mid j \in J\}$ uma família de espaços mensuráveis vagos

b) $\{p_j : \prod_{j \in J} X_j \to X_j \mid j \in J\}$ uma família de projecções.

Define-se σ -álgebra Produto Vago como:

$\sup_{j \in J} p_j^{-1}(\sigma_j)$ simbolizado por $\prod_{j \in J} \sigma_j$

2º PARTE - Medidas de Probabilidade Vagas

Os dois pontos de partida são as comunicações de:

ZADEH 1968 (32)

KLEMENT, SCHWYHLA e LOWEN 1980 (24)

Definição 5

Uma medida de Probabilidade Vaga (m) é definida como

$$m : \sigma \to I$$

sendo (X, σ) um espaço V -mensurável

$I = [0, 1]$ da σ -álgebra dos sub-conjuntos de Borel de I e satisfazendo a três condições:

1) $m(\phi) = 0$, $m(I) = 1$ (Normalização)

2) $\forall \mu, \nu \in \mathcal{T} : m(\mu \vee \nu) + m(\mu \wedge \nu) = m(\mu) + m(\nu)$ (aditividade)

3) $\forall (\mu_m) \in \mathcal{T}^N, \mu \in \mathcal{T} : ((\mu_m)_{m\in N} \uparrow \mu) \Rightarrow (m(\mu_m)_{m\in N} \uparrow m(\mu))$ (continuidade por baixo)

Ao triplo $(X, \mathcal{T}, m)$ dá-se o nome de espaço de Probabilidade Vago.

Algumas propriedades mais relevantes da definição 5:

a) $\forall \mu, \nu \in \mathcal{T} : (\mu \leq \nu) \Longrightarrow (m(\mu) \leq m(\nu))$

m é monótono

b) $\forall \mu, \nu \in \mathcal{T} : (\mu \wedge \nu = \phi) \Longrightarrow (m(\mu \vee \nu) = m(\mu) + m(\nu))$

c) Se A e B forem disjuntos 1_A, $1_B \in \mathcal{T}$, onde 1_A e 1_B são os supremos de A e B.

Então $m(1_{A\cup B}) = m(1_A) + m(1_B)$

mas não são, em geral, satisfeitas as seguintes propriedades:

$\forall \alpha$ constante : $m(\alpha) = \alpha$

$\forall \mu \in \mathcal{T} : m(1 - \mu) = 1 - m(\mu)$

$\forall (\mu_m)_{m\in N} \in \mathcal{T}^N, \mu \in \mathcal{T} : ((\mu_m)_{m\in N} \downarrow \mu) \Rightarrow (m(\mu_m)_{m\in N} \downarrow m(\mu))$

Para conferir integrabilidade m e para que os conectores a usar na definição sejam apenas os do reticulado $(\vee, \wedge)$ os autores já referidos propuseram:

Condição $(\mathcal{L})$

$$\mathcal{U}(A) = \{(\mu, \alpha) \in \mathcal{T} \times I \mid \mu^{-1}\,]\alpha, 1] = A\}$$

Para $\forall A \in K(\mathcal{T})$ e um dado $(X, \mathcal{T})$

Definição 6

Uma medida de probabilidade vaga m em $(X, \mathcal{T})$ satisfaz $\mathcal{L}$ sse:

$$\left(\mu^{-1}\,]x, 1] = A\right) \Longrightarrow \left(\lim_{\beta \downarrow \alpha} \frac{m(\mu \wedge \beta) - m(\mu \wedge \alpha)}{\beta - \alpha} = p(A)\right)$$

$$\forall A \in K(\sigma) \quad , \quad \mathcal{U}(A) \neq \phi \quad e \quad p(A) \in I \; .$$

Note-se que se se tratar de σ -álgebra gerada vaga a condição $\mathcal{U}(A) \neq \phi$ é desnecessária.

Proposição 6

Seja: $\mathcal{L}(\mathfrak{A})$ uma σ -álgebra gerada vaga

σ uma sub- σ -álgebra de $\mathcal{L}(\mathfrak{A}$

$\mathcal{P}$ uma medida de probabilidade em $(X, \mathfrak{A})$

então:

a medida de probabilidade vaga m

$$m : \sigma \to I \quad e \quad \mu \to \int \mu \, d\mathcal{P}$$

satisfaz à condição $(\mathcal{L})$

Teorema Principal:

Seja (X, σ, m) um espaço de Probabilidade Vago onde $\sigma = \mathcal{L}(\mathfrak{A})$ uma σ -álgebra gerada vaga, então as seguintes declarações são equivalentes:

1) m é um integral, tal que $m(\mu) = \int \mu \, d\mathcal{P}$
2) m satisfaz a condição $(\mathcal{L})$ $\forall \mu \in \sigma$
3) m é linear
4) m é aditivo
5) m é homogéneo

Aditividade com relação a uma t-norm

O problema reside em testar outros conectores para além de $(\wedge, \vee)$
São experimentados dois (T_o, S_o) assim definidos:

$$\mu \, T_o \, \nu(x) = \max\left[\mu(x) + \nu(x) - 1 \; , \; 0\right]$$

e o dual

$$\mu \, S_o \, \nu(x) = \min\left[\mu(x) + \nu(x) \; , \; 1\right]$$

T_c e S_c degeneram em $\cap$ e $\cup$ quando aplicados a conjuntos vulgares.

Teorema 2

Seja: $\mathcal{T} = \mathcal{L}(\mathcal{H})$ uma σ-álgebra gerada vaga e

$m : \mathcal{T} \rightarrow I$

então m é um integral sse

1) Satisfizer a 1) e 3) da Definição 5

2) $\forall \mu, \nu \in \mathcal{T}$: $m(\mu\, T_c\, \nu) + m(\mu\, S_c\, \nu) = m(\mu) + m(\nu)$

Anexo 4

HIROTA (1981) no seu trabalho "Concepts of Probabilistic Sets (25) explora o mesmo terreno mas avança no sentido de uma maior generalidade, uma vez que trata de conjuntos parcialmente ordenados (POSET) e estuda, por inclusões crescentes,

POSETS
RETICULADOS
RETICULADOS MODULARES
RETICULADOS DISTRIBUTIVOS
ÁLGEBRAS PSEUDO-BOOLEANAS
ÁLGEBRAS BOOLEANAS

Hirota introduz o conceito de espaço paramétrico recheado de ambiguidade dos objectos, variabilidade das respectivas propriedades, subjectividade dos observadores e evolutivo no domínio da aprendizagem e conhecimento.

Representa-o por uma tríada $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ que descreve um espaço probabilizado e o outro espaço é $([0,1], \mathcal{B})$ que é simbolizado por $(\Omega_c, \mathcal{B}_c)$ onde c (caracterizante) recorda que $(\Omega_c, \mathcal{B}_c)$ é o espaço mensurável onde os caracterizantes tomam os seus valores.

O conjunto probabilístico no espaço universal X é definido por uma função aleatória com domínio em $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ e contradomínio em $(\Omega_c, \mathcal{B}_c)$ para cada objecto $x \in X$. Assim $f_x : (\Omega, \mathcal{B}, P) \longrightarrow (\Omega_c, \mathcal{B}_c)$ está em correspondência com $x \in X$ e o espaço paramétrico $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ é ajustado a cada caso concreto, exigindo-se apenas que seja um espaço probabilizado ou probabilístico (espaço mensurável, com medida normada).

Definição 1

Sendo $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ o espaço paramétrico

$(\Omega_c, \mathcal{B}_c)$ o espaço caracterizante

$M = \{\mu \mid \mu : \Omega \rightarrow \Omega_c \ (\mathcal{B}, \mathcal{B}_c), \ \mu$ função mensurável$\}$

M será a família de variáveis caracterizantes.

Da definição decorrem as propriedades seguintes:

1) $\min(\mu_1, \mu_2) \in M$

2) $\max(\mu_1, \mu_2) \in M$

3) $\mu = c \in M$, com $c \in \Omega_c$ e μ = função constante

4) $|\mu_1 - \mu_2| \in M$

4) $|\mu_1 - \mu_2| \in M$

5) $\lambda \mu_1 + (1-\lambda)\mu_2 \in M \ , \ 0 \leq \lambda \leq 1$

6) $\mu_i^{\alpha} \in M \quad e \quad \alpha \geq 0$

7) $\mu_1 \cdot \mu_2 \in M$

8) $\mathrm{INF}\ \mu_i \in M \ , \quad i \geq 1$

9) $\mathrm{Sup}\ \mu_i \in M \ , \quad i \geq 1$

10) $\underline{\lim}_{i \to \infty} \mu_i = \mathrm{Sup}_i \cdot \mathrm{Inf}_j\ \mu_j \in M \ , \quad i \geq 1 \ e \ j \geq i$

11) $\overline{\lim}_{i \to \infty} \mu_i = \mathrm{Inf}_i \cdot \mathrm{Sup}_j\ \mu_j \in M \ , \quad i \geq i \ e \ j \geq i$

Definição 2.

O conjunto probabilizado A em X é definido pela função μ_A

e $\mu_A : X \times \Omega \longrightarrow \Omega_c$

com $(x, w) \in X \times \Omega$ e $\mu_A(x, w) \in \Omega_c$ será

$$(x, w) \longmapsto \mu_A(x, w)$$

onde $\mu_A(x, w)$ é a função mensurável $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_c)$ para cada $x \in X$.

a) Inclusão $(\subset)$ $A \subset B$ se para $x \in X$ existir $E \in \mathcal{B}$ que satisfaça a:

$$P(E) = 1$$

$$\mu_A(x, w) \leq \mu_B(x, w) \ ; \quad \forall w \in E$$

b) Equivalência $(\equiv)$ $A \equiv B$ se for $A \subset B$ e $B \subset A$

c) Classe de equivalências $\mathcal{P}(X)$

Representa a classe definida por $(\equiv)$ em X então $(\mathcal{P}(X), \subset)$ é um conjunto munido de uma ordem parcial $(\subset)$ (Poset).

d) <u>União</u> $(\cup)$

Seja A_γ conjuntos probabilísticos em X com $\gamma \in \Gamma$ e Γ finito ou infinito

$\mu_{A_\gamma}(x,\omega)$ respectivas funções definidoras (caracterizantes)

$\cup A_\gamma$ é o conjunto $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ cuja função definidora é $\mu_{\cup A_\gamma}(x,\omega)$ dada pelo seguinte processo construtivo:

Para x dado $\mu_{A_\gamma}(x,\omega)$ é uma função mensurável de ω e porque $P(\Omega) = 1$, é finita e integrável em P.

$$0 \leq \int_\Omega \mu_{A_\gamma}(x,\omega) \, . \, dP(\omega) \leq 1$$

Então, para $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m \in \Gamma$ a função

$$\max\{\mu_{A_{\gamma_i}}(x,\omega) \mid 1 \leq i \leq m\} \in M$$

então é integrável em P

$$0 \leq \int_\Omega \max\{\mu_{A_{\gamma_i}}(x,\omega) \mid 1 \leq i \leq m\} . dP(\omega) \leq 1$$

O majorante $(a(x))$ pode ser calculado

$$a(x) = \sup_{m \in N \text{ (Naturais) e } \gamma_i \in \Gamma} \left\{ \int_\Omega \max\{\mu_{A_{\gamma_i}}(x,\omega) \mid 1 \leq i \leq m\} dP(\omega) \right\}$$

será também $0 \leq a(x) \leq 1$

Existem enumeráveis subsequências em que $\lim_{x \to \infty}$ do integral é $a(x)$

Repetindo o masmo processo construtivo para todo $x \in X$ pode definir-se:

$$\mu_{\cup A_\gamma}(x,\omega) = \sup\left\{\max\left[\mu_{A_{\gamma_i}}(x,\omega) \mid 1 \leq i \leq m_j\right] \mid 1 \leq j < \infty\right\}$$

Note-se que se trata de uma, entre muitas, definições da conectiva $(\cup)$, necessita por isso de uma justificação que se encontra nas propriedades resultantes para $(\cup)$

Propriedades:

1) $\cup A_\gamma$ é única

2) $A_\gamma \subset \cup A_\gamma$

3) $\forall_\gamma \; A_\gamma \subset A$ então $\cup A_\gamma \subset A$

4) Se o conjunto de índices Γ for enumerável, a definição dada para $(\cup)$ pode reduzir-se a

$$\mu_{A \cup B}(x,\omega) = \max\{\mu_A(x,\omega), \mu_B(x,\omega)\}$$

e $$\mu_{\cup A_m}(x,\omega) = \sup\{\mu_{A_m}(x,\omega) \mid 1 \leq m \leq \infty\}$$

e) Intersecção $(\cap)$, operador dual de $(\cup)$ pode ser definido seguindo método construtivo idêntico pelo caracterizante $\mu_{\cap A_\gamma}(x,\omega)$ e este definido como se segue

$$\mu_{\cap A_\gamma}(x,\omega) = \inf\{\min[\mu_{A_{ji}}(x,\omega) \mid 1 \leq i \leq m_j] \mid 1 \leq j < \infty\}$$

As propriedades 1), 2), 3) e 4) são idênticas mas o símbolo $\subset$ é substituído por $\supset$.

f) $\mu_X(x,\omega) = 1$, $\forall x \in X$

$\mu_\phi(x,\omega) = 0$ onde ϕ simboliza o conjunto vazio.

g) $\mu_{A^c}(x,\omega) = 1 - \mu_A(x,\omega)$ (pseudo complementaridade)

h) $\mu_{A-B}(x,\omega) = \max\{0, \mu_A(x,\omega) - \mu_B(x,\omega)\}$ Diferença $(A - B)$

i) $\mu_{A \Delta B}(x,\omega) = |\mu_A(x,\omega) - \mu_B(x,\omega)|$ Diferença simétrica $(A \Delta B)$

j) $\mu_{A \oplus B}(x,\omega) = \mu_A(x,\omega) + \mu_B(x,\omega) - \mu_A(x,\omega) \cdot \mu_B(x,\omega)$

soma algébrica $(A \oplus B)$

k) $\mu_{A (\lambda) B}(x,\omega) = \lambda\, \mu_A(x,\omega) + (1-\lambda)\, \mu_B(x,\omega)$, com $0 \leq \lambda \leq 1$

Soma (λ) $A\,(\lambda)\,B$

l) $\mu_{A^\alpha}(x,\omega) = \mu_A(x,\omega)^\alpha$, com $\alpha \geq 0$

Potencia A^α

m) $\overline{\lim_{m\to\infty}} A_m = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k$ Lim superior de uma sucessão

n) $\underline{\lim_{m\to\infty}} A_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} A_k$

Convem introduzir algumas novas noções antes do estudo dos conjuntos probabilísticos.

1) Produto directo $A \times B$

Define-se como o par ordenado $(\mu_A ; \mu_B)$

2) Conjunto probabilístico holónico (um Ponto) se:

$$\int_\Omega \mu_{A_Y}(x,\omega) \cdot dP(\omega) = \begin{cases} = 0 , & \forall x \neq Y \\ > 0 , & x = Y \end{cases}$$

3) Conjunto probabilístico holónico completo se o integral $\begin{cases} = 0 & \forall x \neq Y \\ 1 & x = Y \end{cases}$

Propriedades dos Conjuntos Probabilísticos

A) A família de conjuntos probabilísticos munida de uma ordem parcial $(\subset)$ constitui um POSET $(\mathcal{P}(X), \subset)$ e porque, conforme foi introduzido, existe um Supremum e um Ínfimo e o poset é um reticulado, na verdade é comutativo, associativo, e verifica-se a lei de absorção $(A \cup (A \cap B)) = A$ e $A \cap (A \cup B) = A$

B) $(\mathcal{P}(x), \subset)$ é pseudo-complementado.

Sejam dados A e B dois conjuntos probabilísticos caracterizados por $\mu_A(x,\omega)$ e $\mu_B(x,\omega)$ e seja

$$\mu_{A^*}(x,\omega) = \begin{cases} 1 & se \ \mu_A(x,\omega) \leq \mu_B(x,\omega) \\ \mu_B(x,\omega) & se \ \mu_A(x,\omega) > \mu_B(x,\omega) \end{cases}$$

porque o conjunto $\{\omega \mid \mu_B(x-\omega) - \mu_A(x-\omega) \geq 0\} \subset B$ então $\mu_{A^*}(x,\omega), \forall x \in X$ é uma função mensurável (B, B_c) e portanto um elemento de M e A^* é um conjunto probabilístico e é o maior que satisfaz a $A \cap C \subset B$ $\forall C \in \mathcal{P}(X)$ e por isso se diz que A^* é o pseudo-complemento de A e simboliza-se por A^C.

C) $(\mathcal{P}(X), \subset)$ é uma álgebra pseudo-booleana. Na verdade é um reticulado, complementado com um elemento mínimo (ϕ).

D) A existência de $\bigcup A_X$ e $\bigcap A_\lambda$ permitiu definir um supremo e um ínfimo o que torna $(\mathcal{P}(X), \subset)$ um reticulado completo.

Donde:

A família de conjuntos probabilísticos $(\mathcal{P}(X), \subset)$ é uma álgebra pseudo Booleana completa.

E) As sub-famílias $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Gamma}$ e $\{B_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$ de $\mathcal{P}(X, C)$ gozam das seguintes propriedades:

1) Associatividade $\left(\bigcup_{\lambda\in\Gamma} A_\lambda\right) \cup \left(\bigcup_{\gamma\in\Lambda} B_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma,\lambda} (A_\lambda \cup B_\gamma)$

2) Distributividade $\left(\bigcup_\lambda A_\lambda\right) \cap \left(\bigcup_\gamma B_\gamma\right) = \bigcup_{\lambda,\gamma} (A_\lambda \cap B_\gamma)$

e $\left(\bigcap_\lambda A_\lambda\right) \cup \left(\bigcap_\gamma B_\gamma\right) = \bigcap_{\lambda,\gamma} (A_\lambda \cup B_\gamma)$

3) Leis de Morgan $\left(\bigcup_\gamma A_\gamma\right)^c = \bigcap_\gamma A_\gamma^c$

e $\left(\bigcap_\gamma A_\gamma\right)^c = \bigcup_\gamma A_\gamma^c$

4) Idempotência $A \cup A = A$ e $A \cap A = A$

5) Involução $(A^c)^c = A$

6) Eliminação $\left.\begin{matrix} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{matrix}\right\} \longrightarrow B = C$

7) Identidade

$$\begin{cases} A \cup X = X \\ A \cap X = A \end{cases}$$
$$\begin{cases} A \cup \phi = A \\ A \cap \phi = \phi \end{cases}$$

8) $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n \subset \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ com $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$

9) $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n^c = \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n^c$

10) e se $A_i \subset A_{i+1}$, $\forall i \in (1, 2, \dots, n)$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

11) e se $A_{i+1} \subset A_i$, $\forall i \in (1, 2, \dots, n)$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_n$$

Convem introduzir algumas novas noções antes do estudo dos conjuntos probabilísticos.

1) Produto directo $A \times B$

Define-se como o par ordenado (μ_A , μ_B)

2) Conjunto probabilístico holónico (um Ponto) se:

$$\int_\Omega \mu_{A_Y}(x, \omega) \cdot d\,P(\omega) = \begin{cases} = 0 , & \forall x \neq Y \\ > 0 , & x = Y \end{cases}$$

3) Conjunto probabilístico holónico completo

se o integral $\begin{cases} = 0 & \forall x \neq Y \\ 1 & x = Y \end{cases}$

Propriedades dos Conjuntos Probabilísticos

A) A família de conjuntos probabilísticos munida de uma ordem parcial $(\subset)$ constitui um POSET $(\mathcal{P}(X), \subset)$ e porque, conforme foi introduzido, existe um Supremum e um Ínfimo e o poset é um reticulado, na verdade é comutativo, associativo, e verifica-se a lei de absorção $(A \cup (A \cap B)) = A$ e $A \cap (A \cup B) = A$

B) $(\mathcal{P}(x), \subset)$ é pseudo-complementado.

Sejam dados A e B dois conjuntos probabilísticos caracterizados por $\mu_A(x, \omega)$ e $\mu_B(x, \omega)$ e seja

$$\mu_{A^*}(x, \omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mu_A(x,\omega) \leq \mu_B(x,\omega) \\ \mu_B(x,\omega) & \text{se } \mu_A(x,\omega) > \mu_B(x,\omega) \end{cases}$$

porque o conjunto $\{\omega \mid \mu_B(x - \omega) - \mu_A(x - \omega) \geqslant 0\} \subset B$

então $\mu_{A^*}(x,\omega), \forall x \in X$ é uma função mensurável (B , B_c) e portanto um elemento de M e A^* é um conjunto probabilístico e é o maior que satisfaz a $A \cap C \subset B$ $\forall C \in \mathcal{P}(X)$ e por isso se diz que A^* é o pseudo-complemento de A e simboliza-se por A^e.

C) $(\mathcal{P}(X) , \subset)$ é uma álgebra pseudo-booleana. Na verdade é um reticulado, complementado com um elemento mínimo (ϕ).

D) A existência de $\bigcup A_X$ e $\bigcap A_k$ permitiu definir um supremo e um ínfimo o que torna $(\mathcal{P}(x), \subset)$ um reticulado completo.

Donde:

A família de conjuntos probabilísticos $(\mathcal{P}(X), \subset)$ é uma álgebra pseudo Booleana completa.

E) As sub-famílias $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Gamma}$ e $\{B_\gamma\}_{\gamma \in \Lambda}$ de $\mathcal{P}(X, c)$ gozam das seguintes propriedades:

1) Associatividade $\left(\bigcup_{\lambda \in \Gamma} A_\lambda\right) \cup \left(\bigcup_{\gamma \in \Lambda} B_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma, \lambda} (A_\lambda \cup B_\gamma)$

2) Distributividade $\left(\bigcup_\lambda A_\lambda\right) \cap \left(\bigcup_\gamma B_\gamma\right) = \bigcup_{\lambda, \gamma} (A_\lambda \cap B_\gamma)$

e $\left(\bigcap_\lambda A_\lambda\right) \cup \left(\bigcap_\gamma B_\gamma\right) = \bigcap_{\lambda, \gamma} (A_\lambda \cup B_\gamma)$

3) Leis de Morgan $\left(\bigcup_\gamma A_\gamma\right)^c = \bigcap_\gamma A_\gamma^c$

e $\left(\bigcap_\gamma A_\gamma\right)^c = \bigcup_\gamma A_\gamma^c$

4) Idempotência $A \cup A = A$ e $A \cap A = A$

5) Involução $(A^c)^c = A$

6) Eliminação $\left.\begin{array}{l} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{array}\right\} \longrightarrow B = C$

7) Identidade

$$\begin{cases} A \cup X = X \\ A \cap X = A \end{cases}$$

$$\begin{cases} A \cup \phi = A \\ A \cap \phi = \phi \end{cases}$$

8) $\underline{\lim}_{n \to \infty} A_n \subset \overline{\lim}_{n \to \infty} A_n$ com $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$

9) $\overline{\lim}_{n \to \infty} A_n^c = \underline{\lim}_{n \to \infty} A_n^c$

10) e se $A_i \subset A_{i+1}$, $\forall i \in (1, 2, \ldots, n)$

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} A_n = \overline{\lim}_{n \to \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

11) e se $A_{i+1} \subset A_i$, $\forall i \in (1, 2, \ldots, n)$

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} A_n = \overline{\lim}_{n \to \infty} A_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_n$$

12) e se $A_{2m+1} = A$ e $A_{2m} = B$

então $\underline{\lim}_{m \to \infty} A_m = A \cap B$

e $\overline{\lim}_{m \to \infty} A_m = A \cup B$

13) Podem formar-se vários semigrupos usando as operações $\cup$, $\cap$, $\oplus$ etc., como por exemplo $(\mathcal{P}(x), \cup)$, $(\mathcal{P}(x), \cdot)$ etc..

14) $\bigcup_{\gamma} \mathcal{P}(x_\gamma) \subset \mathcal{P}\left(\bigcup_{\gamma} X_\gamma\right)$

e $\bigcap_{\gamma} \mathcal{P}(x_\alpha) = \mathcal{P}\left(\bigcap_{\gamma} X_\alpha\right)$

Para $\gamma \in \Gamma$

Correspondências Probabilísticas (Mappings)(C.P.)

Definição

$\mathcal{L}$ é uma CP de X para Y, num espaço paramétrico $(\Omega_m, \mathcal{B}_m, \mathcal{P}_m)$ definido como segue:

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{L} : X \times \Omega_m \longrightarrow Y \\ (x, w_m) \longrightarrow f(x, w_m) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{com:} \\ (x,w) \in X \times \Omega_m \\ \text{e } f(x, w_m) \in Y \end{array}$$

Momentos:

$$M^1(\mu_A)(x) = \int_\Omega \mu_A(x,w) \cdot d\mathcal{P}(w) = E(\mu_A)(x)$$

valor médio

$$M^m(\mu_A)(x) = \int_\Omega \mu_A(x,w)^m \cdot d\mathcal{P}(w)$$

$m \in N$ (Naturais)

$$M_0^m(\mu_A)(x) = \int_\Omega \left[\mu_A(x,w) - E(\mu_A)(x)\right]^m \cdot d\mathcal{P}(w)$$

$$M_0^{-m}(\mu_A)(x) = \int_\Omega \left|\mu_A(x,w) - E(\mu_A)(x)\right|^m \cdot d\mathcal{P}(w)$$

Covariância $(\mathcal{C})$:

$$\mathcal{C}(\mu_A, \mu_B)(x) = \int_\Omega [\mu_A(x,\omega) - E(\mu_A)(x)] \cdot [\mu_B(x,\omega) - E(\mu_B)(x)] \cdot dP(\omega)$$

Coeficiente de Correlação (r)

$$r(\mu_A, \mu_B)(x) = \mathcal{C}(\mu_A, \mu_B)(x) \Big/ \sqrt[2]{V(\mu_A)(x) \cdot V(\mu_B)(x)}$$

onde V é a variância (M_0^2).

Matrix de Momentos $[M]$

$$M(x,y) = [m_{ij}] \text{ com } i,j \in (1,\dots,n)$$

$$\text{e } m_{ij} = \int_\Omega \mu_{A_i}(x,\omega) \cdot \mu_{A_j}(x,\omega) \cdot dP(\omega)$$

Matrix de Variância-Covariância

$$V(x,y) = [\sigma_{ij}] \text{ com } i,j \in [1,\dots,n]$$

$$\text{e } \sigma_{ij} = \int_\Omega [\mu_{A_i}(x,\omega) - E(\mu_{A_i})(x)] \cdot [\mu_{A_j}(x,\omega) - E(\mu_{A_j})(x)] \cdot dP(\omega)$$

Suporte de A espectado e cardinal de A

Define-se como:

$$\mathrm{SUPT}(A) = \left\{ x \in X \,\middle|\, E(\mu_A)(x) = \int_\Omega \mu_A(x,\omega)\, dP(\omega) > 0 \right\}$$

Número Cardinal de A espectado, define-se como:

$$\mathrm{CARD}(A) = \begin{cases} \sum_{x \in \mathrm{SUPT}(A)} \left(\int_\Omega \mu_A(x,\omega)\, dP(\omega) \right), & \text{se } \mathrm{CARD}(\mathrm{SUPT}(A)) \leq \aleph_0 \\ \mathrm{CARD}(\mathrm{SUPT}(A)), & \text{se } \mathrm{CARD}(\mathrm{SUPT}(A)) > \aleph_0 \end{cases}$$

Algumas propriedades mais relevantes sobre as definições dadas:

$M^m(\mu_A)(x)$, $1 \leq m \leq N$ e $x \in X$, temos:

a) $0 \leq M^1 \leq 1$

b) $0 \leq \ldots \leq M^m \leq M^{m-1} \leq \ldots \leq M^1 \leq \ldots \leq (M^{m-1})^{\frac{1}{m-1}} \leq (M^m)^{\frac{1}{m}} \leq \ldots 1$

c) $M_o^2(\mu_A)(x) = M^2(\mu_A)(x) - (M^1(\mu_A)(x))^2$

d) $(m \geq m$ e $m \geq 1) \Longrightarrow (0 \leq \bar{M}_o^m(\mu_A)(x) \leq \bar{M}_o^m(\mu_A)(x) \leq \frac{1}{2})$

e) $\lim_{m \to \infty} M_o^m(\mu_A)(x) = \lim_{m \to \infty} \bar{M}_o^m(\mu_A)(x) = 0$

f) $C(\mu_A, \mu_A)(x) = M_o^2(\mu_A)(x)$

g) $C(\mu_A, \mu_B)(x) = M^1(\mu_A, \mu_B)(x) - M^1(\mu_A)(x) \cdot M^1(\mu_B)(x)$

h) $0 \leq |C(\mu_A, \mu_B)(x)| \leq M^1(\mu_A)(x) \cdot M^1(\mu_B)(x) \leq 1$

i) $0 \leq |r(\mu_A, \mu_B)(x)| \leq 1$

j) Se $r(\mu_A, \mu_B)(x = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$, então existem reais a , b tais que se verifica:

$$r(\mu_A, \mu_B)(x) = a\,\mu_B(x, \omega) + b$$

$\forall\, \omega \in \Omega$ excepto, eventualmente, num conjunto de pontos de medida nula.