Tenorde

Medarde

TEORIA DE MEDIDA

1) INTRODUÇÃO:

A teoria dos conjuntos é construída a partir de conceitos muito simples e básicos.

As operações fundamentais da teoria de conjuntos são a Reunião $\cup$, a intersecção $\cap$ e a complementaridade $\sim$.

Estas operações têm correspondência com as do reticulado de Bool, uma vez que pode estabelecer-se uma aplicação funcional entre o Conjunto das Partes do Conjunto Universal e o referido reticulado de Bool.

É usual estruturar-se conjuntos, impondo certas leis de Composição interna e externa, e, assim, formar, por exemplo, grupos, aneis, corpos, etc.

Podem conceber-se relações (nomeadamente aplicações funcionais), que têm por 1º membro conjuntos contidos no conjunto Universal, e por 2º membro elementos desses anéis ou corpos.

Entre essas aplicações há uma classe que goza da propriedade de aditividade. O conceito de aditividade pode apresentar-se, singelamente, do modo seguinte:

Sejam dados dois conjuntos A e B , ambos contidos em $\mathcal{U}$, verificando-se que $A \cap B \equiv \phi$, isto é, A e B são disjuntos.

Por outro lado, sejam α e β dois elementos da estrutura algébrica (anel ou corpo), que resultam da aplicação $\mathcal{F}$, ou seja:

$$\mathcal{F}(A) = \alpha \quad e \quad \mathcal{F}(B) = \beta$$

Pode acontecer que:

$$\mathcal{F}(A \cup B) = \alpha + \beta$$

e esta propriedade seja verificada para todo o par (A, B) contido em $\mathcal{U}^2$ e disjunto; então, diz-se que a aplicação $\mathcal{F}$ goza da propriedade da aditividade, (ou é uma aplicação aditiva).

Convém agora verificar se há na Natureza muitas situações destas e as propriedades que daí decorrem. Para tanto apresentam--se alguns exemplos .

- Cardinal de um Conjunto: o cardinal de um conjunto é uma aplicação de $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ nos inteiros positivos, e fornece o nº de elementos pertencentes a um dado conjunto.

Assim se:
$$\left\{\begin{array}{l} \text{Card}(A) = a \in I^+ \\ \text{Card}(B) = b \in I^+ \\ \text{e} \quad A \cap B = \phi \end{array}\right.$$

então, $\text{Card}(A \cup B) = a + b \in I^+$

A aplicação (Card) gosa de aditividade.

- Massa de objectos físicos:

Uma balança faz (materialmente) a aplicação de objectos físicos nos Reais positivos; vejamos se esta aplicação é aditiva:

Sejam dados dois conjuntos de objectos:

$$A \equiv \{A_1, A_2, \cdots, A_m\} \qquad \forall_{ij} \quad A_i \cap A_j = \phi$$

$$B \equiv \{B_1, B_2, \cdots, B_k\} \qquad \forall_{kl} \quad B_k \cap B_l = \phi$$

então, $A \cap B = \phi$

$$m(A) = \sum_{i=1}^{m} m(A_i)$$

$$m(B) = \sum_{j=1}^{k} m(B_j)$$

e

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B)$$

Se a propriedade física Massa não fosse aditiva, não existiria a Lei da Conservação da Massa.

- Propriedades extensivas da Física, tal como a massa, o volume, a energia interna, e a entropia em termodinâmica reversível, são aplicações de objectos físicos nos reais, que gozam da propriedade da aditividade.

- Propriedades Intensivas da Física

A densidade $\left(\frac{m}{v}\right)$ pode servir de exemplo.

Assim, se $A \cap B = \phi$, será:

$$m(A) + m(B) = m(A \cup B)$$

$$v(A) + v(B) = m(A \cup B)$$

e as densidades respectivas são:

$$d(A) = \frac{m(A)}{v(A)} \qquad d(B) = \frac{m(B)}{v(B)}$$

e $d(A \cup B) = \frac{m(A \cup B)}{v(A \cup B)}$, em geral $d(A) \neq d(B) \neq$
$\neq d(A \cup B)$

Mas, se o sistema for massicamente homogéneo $d(A) = d(B)$ para $\forall A, B \subseteq U$ então, nesse caso, teremos:

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B)$$

$$v(A \cup B) = v(A) + v(B)$$

$$d(A \cup B) = \frac{m(A) + m(B)}{v(A) + v(B)} = \frac{m(A \cup B)}{v(A \cup B)} = d(A) = d(B)$$

(x)

Daqui resulta que, em sistemas físicos homogéneos, as propriedades intensivas são invariantes por todo o sistema, e, conversamente, a invariância das propriedades intensivas significa homogeneidade do sistema físico.

(x) Com efeito, $d(A) = d(B)$ então, se $m(A) = \alpha . m(B)$ será $v(A) = \alpha . v(B)$ e daí:

$$\frac{m(A)+m(B)}{v(A)+v(B)} = \frac{(\alpha+1)\, m(B)}{(\alpha+1)\, v(B)} = d(B) = d(A)$$

—————— // ——————

Repare-se que as propriedades intensivas são relações de propriedades extensivas que gozam de aditividade.

Outros exemplos de propriedades intensivas:

$$T = \frac{\partial (u)}{\partial (S)} \qquad \frac{\text{energia interna}}{\text{entropia}}$$

$$p = \frac{\partial (u)}{\partial (v)} \qquad \frac{\text{energia interna}}{\text{volume}}$$

$$\mu = \frac{\partial (u)}{\partial (N)} \qquad \frac{\text{energia interna}}{\text{número de moles}}$$

- Funções homogéneas de grau 1

Esta referência é feita para recordar que só este tipo de funções garante a hereditariedade da aditividade .

Com efeito,

Seja $m(A)$ uma aplicação do conjunto $P(\mathcal{U})$ no corpo dos Reais, onde $A \subset \mathcal{U}$

$v(A)$ outra aplicação do mesmo tipo

Admita-se que m e v são aditivos.

Seja $w = f(m, v)$ uma função homogénea de grau 1, é fácil de ver que w também é aditiva.

Com efeito, por definição de homogeneidade de 1º grau, teremos:

$$\alpha w = f(\alpha . m, \alpha . v) \quad se \quad w = f(m, v)$$

Seja: $$m(A) + m(B) = m(A \cup B)$$
$$v(A) + v(B) = v(A \cup B)$$

Se o sistema físico for homogéneo , será:

$$m(A \cup B) = \alpha . m(A)$$
$$v(A \cup B) = \alpha . v(A)$$

e sendo: $$w(A) = f(m, v) = f\big(m(A), v(A)\big)$$
$$w(A \cup B) = f\big(m(A \cup B), v(A \cup B)\big)$$
$$= f\big(\alpha . m(A), \alpha\, m(A)\big)$$
$$= \alpha\, w(A)$$

o que conclui a prova de que, em sistemas físicos homogêneos, as funções homogêneas de grau 1 de aplicações aditivas são, por seu turno, aplicações aditivas.

- Probabilidades:

Se A for um conjunto de acontecimentos e B outro conjunto de acontecimentos, e os acontecimentos de A , sendo independentes dos acontecimentos de B (isto é, $A \cap B \equiv \phi$), então:

$$p(A) + p(B) = p(A \cup B)$$

onde p é uma aplicação aditiva do conjunto $\mathcal{P}(U)$ no intervalo $[0, 1]$ e onde A e $B \in \mathcal{P}(U)$.

2) Capítulo Medidas

Dá-se o nome de <u>medida</u> a uma classe de aplicações funcionais aditivas, que têm uma generalidade e aplicação prática muito vastas.

Vão ser apresentadas em várias etapas:

Medidas em Anéis

Medidas em Intervalos

Medida à Lebesgue

Nos capítulos seguintes desenvolver-se-á estes conceitos de medida.

2,1) Medidas em Anéis

a) Função dum Conjunto

São funções que têm por domínio uma classe de conjuntos, isto é, um conjunto cujos elementos são conjuntos.

Um exemplo típico é o Conjunto das partes de um conjunto referencial dado, tal como:

$$\mathcal{U} = \{a, b, c\} \qquad a, b, c \text{ são elementos de } \mathcal{U}$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{U}) = \Big\{ \phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} \Big\}$$

b) Aditividade

Uma função real μ cujo domínio é a "classe de conjuntos" E e contradomínio é o corpo dos Reais $\mathbb{R}$, diz-se:

- Aditiva se para $\forall_{i\,j}\ E_i\,,\ E_j \in \mathcal{E}$, satisfazendo às condições de:

$$E_i \cup E_j \in \mathcal{E} \quad e \quad E_i \cap E_j \equiv \phi \in \mathcal{E}$$

se verificar que:

$$\mu\,(E_i \cup E_j) = \mu\,(E_i) + \mu\,(E_j) \qquad (1)$$

- Finitamente aditiva se para $\forall_{i\,j}\ E_i\,,\ E_j \in \mathcal{E}$ satisfazendo às condições de:

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \mathcal{E} \quad e \quad \forall_{\begin{cases} i\,j \in (1,\dots,n) \\ i \neq j \end{cases}} (E_i \cap E_j) \equiv \phi \in \mathcal{E}$$

se verificar que:

$$\mu\left[\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mu\,(E_i) \qquad (2)$$

- Numeravelmente aditiva se para $\forall_{i\,j}\ E_i\,,\ E_j \in \mathcal{E}$ satisfazendo às condições de:

$$\bigcup_{i \in Int} (E_i) \in \mathcal{E} \quad e \quad \forall_{\substack{i \in Int \\ i \neq j}} (E_i \cap E_j) \equiv \phi \in \mathcal{E}$$

se verificar que:

$$\mu\left[\bigcup_{i \in Int} (E_i)\right] = \sum_{i \in Int} \mu\,(E_i)$$

c) Medida : é uma função cujo domínio é um Anel $\mathcal{A}$ e contra-domínio é o $\mathbb{R}^+$ (Reais positivos) e que é numeravelmente aditiva, sendo $\mu\,(\phi) = 0$ (Veja-se a nota da pag.9)

Tem interesse apresentar algumas definições relacionadas com as medidas:

c,1) <u>Medida finita</u>: um conjunto $F \in \mathcal{R}$ diz-se que tem uma medida finita se $\mu(F) < \infty$.

Se esta propriedade se verificar para $\forall F \in \mathcal{R}$, então, μ é uma medida finita.

c,2) <u>Medida σ-finita</u>: um conjunto $F \in \mathcal{R}$ diz-se que tem uma medida σ-finita se existir uma sequência $\{F_n\} \in \mathcal{R}$ tal que: $F \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ e $\mu(F_n) < \infty$

Se esta propriedade se verificar para $\forall F \in \mathcal{R}$, então, μ é uma medida σ-finita.

c,3) <u>Medida totalmente finita</u>, (ou <u>totalmente σ-finita</u>), se, em vez de um Anel $\mathcal{R}$, for uma álgebra $\mathcal{R}e$ as definições c,1) e c,2) dizem-se, respectivamente, totalmente finitas e totalmente σ-finitas.

Recorda-se que uma álgebra $\mathcal{R}e$ é um Anel que possui mais as seguintes propriedades:

Se E e $F \in \mathcal{R}e$ então $E \cup F \in \mathcal{R}e$

Se $E \in \mathcal{R}e$ então $\bar{E} \in \mathcal{R}e$

c,4) <u>Medida Completa</u>, uma medida diz-se completa se:

$$E \in \mathcal{R}$$
$$F \subset E$$
$$\mu(E) = 0$$

então for $F \in \mathcal{R}$

Nota: Admite-se, pois, Que a <u>classe de conjuntos</u> $(\mathcal{C})$ está estruturada algebricamente com a estrutura de um Anel $(\mathcal{A})$. Assim, se as leis de composição interna forem $\cup$ e $\cap$, por exemplo, o Anel $\mathcal{A} \equiv (\mathcal{C}, \cup, \cap)$.

A tríade $\mathcal{C}, \cup, \cap$ terá de gozar das propriedades de um Anel ou de uma Álgebra, etc.

2,2) Medidas em Intervalos

Seja dado como referencial a recta real $\mathbb{R}$.

Forme-se o conjunto assim definido:

$$q_i \equiv \{ x \in : -\infty < a_i \leq x < b_i < \infty \}$$

isto é, q_i é um intervalo de Recta real fechado à esquerda e aberto à direita $q_i \equiv [a_i , b_i)$, onde a_i e b_i são finitos.

Forme-se o conjunto φ seguinte:

$$\varphi \equiv \bigcup_{i=1}^{m} q_i \equiv \bigcup_{i=1}^{m} \{ x \in : -\infty < a_i \leq x < b_i < \infty \}$$

Defina-se uma medida μ da forma:

$$\mu\ (q_i) = b_i - a_i$$

Esta medida é a do intervalo $[a_i , b_i]$ e note-se que:

$$\mu\ [a_i - a_i) = \mu\ (0) = 0$$ porque o conjunto $[a_i - a_i)$ é vazio

Designe-se por $\mathcal{P}$ a classe de todos os conjuntos q_i atrás definidos, e forme-se o anel $(\mathcal{P}, \cup, \cap)$.

Se $C \equiv \{ q_1 , q_2 , \cdots , q_i , \cdots , q_j \cdots q_m \}$ for uma classe de conjuntos disjuntos, $\forall_{i,j}\ q_i \cap q_j \equiv \phi$ e $\forall_i\ q_i \in \mathcal{P}$

tome-se um $q_0 \in \mathcal{P}$ tal que:

Se $\forall_i\ (q_i \subseteq q_0 \in \mathcal{P})$

então será $\sum_{i=1}^{m} \mu\ (q_i) \leq \mu\ (q_0)$ — o que é fácil de demonstrar

Além disso, para $m \to \infty$, a desigualdade continua a verificar-se, isto é, μ é numeravelmente aditiva.

Existirá então uma medida $\bar{\mu}$ única e finita no anel $\mathcal{P}$ tal que;

$$\forall_i\ (q_i \in \varphi) \quad \text{será} \quad \bar{\mu}\ (q_i) = \mu\ (q_i)$$

Define-se deste modo uma medida no intervalo.

Vejamos agora mais algumas definições e propriedades.

b) <u>Propriedades das medidas</u>

b,1) <u>Monotonia</u>

A medida μ em E, é monótona se para $\forall_{ij}\; F_i, F_j \in E$ e $F_i \subset F_j$ for: $\mu(F_i) \leq \mu(F_j)$

b,2) <u>Subtractividade</u>

medidas X d Sinal

A medida μ é subtractiva se, para $\forall_{ij}\; F_i, F_j \in E$ e $F_j \supset F_i$

$F_j - F_i \in E$ e $|\mu(F_i)| < \infty$,

for:

$$\mu(F_j - F_i) = \mu(F_j) - \mu(F_i)$$

b,3) <u>Monotonia e Subtractividade</u>

Se E for um anel, então, μ é monótona e subtractiva.

b,4) Uma função do conjunto $F_i \in E$, contínua por baixo e por cima, é uma medida.

c) <u>Algumas Medidas típicas e suas propriedades</u>

c,1) <u>Medida Exterior</u>

É uma função Real não negativa, monótona, numeravelmente sub-aditiva, definida num σ-anel hereditário H, e onde

$$\mu^*(\phi) = 0$$

Nota: 1) E^* é <u>hereditário</u> se $F \in E^*$ e $G \subset F$ então for $G \in E^*$

2) Se $\mu(E \cup F) \leq \mu(E) + \mu(F)$ então, μ é sub-aditiva.

c,2) Conjuntos Mensuráveis

Seja μ^* uma medida exterior sobre um σ-anel hereditário $\mathbf{H}$

Um conjunto $F \in \mathbf{H}$ é μ^*-mensurável se for, para $\forall A \in \mathbf{H}$:

$$\mu^*(F) = \mu^*(A \cap F) + \mu^*(\bar{A} \cap F)$$

c,3) Medida Completa

Seja: μ^* uma medida exterior sobre um σ-anel hereditário.

$\bar{S}$ a classe de todos os conjuntos μ^*-mensuráveis.

Então se, $\forall E \in \bar{S}$, for $\bar{\mu}(E) = \mu^*(E)$ diz-se que a medida $\bar{\mu}$ é uma medida completa definida em $\bar{S}$.

A medida $\bar{\mu}$ foi induzida por μ^*. Assim, uma medida μ induz uma medida exterior μ^* e esta por seu turno, induz uma medida completa $\bar{\mu}$.

c,4) Medida Regular

O ciclo podia ter sido iniciado por uma medida exterior μ^*, a qual induziria uma medida completa $\bar{\mu}$ e, finalmente, desta obtia-se uma medida $\bar{\mu}^*$.

Se $\mu^* = \bar{\mu}^*$ então, a medida diz-se regular.

c,5) Medidas Exteriores e Interiores

Seja μ uma medida sobre o σ-anel S .

Defina-se uma Função sobre o σ-anel hereditário $H(S)$ como segue:

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(F): E \subset F \in S\}$$

μ^* é uma medida exterior.

Identicamente se podia definir:

$$\mu_*(E) = \sup\{\mu(F): F \subset E \in S\}$$

μ_* é uma medida interior.

c,6) Núcleo mensurável

Seja: $E \in H(S)$ e $F \in S$ e $F \subset E$ e $G \subset E - F$.

Se for $\mu(G) = 0$, então, F é um núcleo mensurável.

d) Medida à Lebesgue

Seja: $\mathbb{R}$ a recta real

q um intervalo de $\mathbb{R}$, fechado à esquerda e aberto à direita.

P a classe de todos os qq .

S um σ-anel gerado por P ,

e, finalmente, $\mu([a,b)) = b - a$ [a,b)

Os conjuntos do σ-anel S são chamados os conjuntos de de Borel sobre a recta real, e μ é definido para todos os conjuntos de Borel. (completamente)

Se $\bar{\mu}$ sobre $\bar{S}$ for o complemento de μ sobre S , então, os conjuntos pertencentes a $\bar{S}$ são os conjuntos de Lebesgue mensuráveis, e $\bar{\mu}$ é uma medida à Lebesgue.

3) Capítulo: Espaços Mensuráveis e funções mensuráveis

3,1) Espaço Mensurável:

Um espaço mensurável é um conjunto X e um σ-anel S de sub-conjuntos X, tendo este σ-anel a propriedade de $\bigcup S = X$

Assim, dum mesmo conjunto podem construir-se, eventualmente, vários σ-anéis S com esta propriedade, e, assim, formar vários espaços mensuráveis.

Simbolisa-se um espaço mensurável por (X, S).

Um sub-conjunto $A \subset X$ diz-se mensurável se $A \in S$

3,2) Espaço medida:

É um espaço mensurável, no qual foi definida uma medida no σ-anel S.

Simbolisa-se pela tríada: (X, S, μ)

Assim, os diversos tipos de medidas já referidos no Capítulo 2, podem ser aplicados ao espaço mensurável dado e vão dar origem a variadas designações para os espaços medidas resultantes, como por exemplo:

Espaço medida, σ-finito, finito completo, etc, segundo a medida for respectivamente σ-finita, finita ou completa, etc.

3,3) Conjunto de Borel e Funções de Borel

Convém recordar a noção de espaço topológico e, em particular, de espaço de Hansdorf.

a) Um espaço topológico é construido a partir de um conjunto X (referencial), e a classe T dos sub-conjuntos de X, designados de conjuntos abertos, satisfazendo às seguintes condições:

- Na classe T existem os conjuntos: vazio ϕ (também simbolisado, às vezes, por O) e o conjunto referencial X.

- As operações $\cup$ e $\cap$ são fechadas para um número arbitrário de uniões $\cup$ e um número finito de intersecções $\cap$. A operação é fechada se o conjunto resultante pertence a T.

Um espaço topológico simbolisa-se, geralmente, da forma seguinte: (X, T)

b) Espaço de Hausdorf

Um espaço topológico (X, T) diz-se um espaço de Hausdorf se, para todos os pares de elementos de X, existirem vizinhanças disjuntas.

c) Conjuntos de Borel

Seja dado um espaço de Hausdorf localmente compacto X.

- $\mathcal{C}$ a classe de todos os sub-conjuntos compactos de X.
- S o σ-anel gerado por $\mathcal{C}$
- $\mathcal{U}$ a classe de todos os conjuntos abertos pertencentes a S

Os conjuntos pertencentes a S designam-se por os conjuntos de Borel de X.

3,) Funções mensuráveis

Sejam dados: o conjunto X

o conjunto $M \subset \mathbb{R}$ (reta real)

a função f real que aplica X em M.

Introduz-se a função f^{-1} que aplica M em X, assim:

$$f^{-1}(M) = \{ x : f(x) \in M \}$$

e que se designa de <u>imagem inversa.</u>

Convém chamar a atenção para as seguintes propriedades:

a) $f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(M_i)$

b) $f^{-1}(M - N) = f^{-1}(M) - f^{-1}(N)$

Introduzindo a definição do conjunto $N(f)$ como sendo:

$$N(f) = \{ x : f(x) \neq 0 \} ,$$

é possível definir uma <u>função mensurável</u> como sendo aquela em que $N(f) \cap f^{-1}(M)$ for um conjunto mensurável.

Como propriedades importantes, temos: (X, S)

a) Se $\begin{cases} S & \text{for a classe de conjuntos de Borel} \\ \bar{S} & \text{for a classe de conjuntos mensuráveis à Lebesgue} \\ \boxed{\mathcal{A} \text{ um } \sigma\text{-anel,}} \end{cases}$

obtemos, respectivamente, as seguintes funções:

função mensurável à Borel

" " à Lebesgue

" "

b) Se $\{f_n\}$ for uma sequência de funções Reais num espaço mensurável, então, são mensuráveis as seguintes funções:

$$h(x) = \text{Sup.}\{ f_n(x) : n = 1, 2, \ldots \}$$

$$g(x) = \text{Inf.}\{ f_n(x) : n = 1, 2, \ldots \}$$

$$f^*(x) = \text{Lim Sup } f_n(x) , \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$f_*(x) = \text{Lim Inf. } f_n(x) , \quad n = 1, 2, \ldots$$

4) Capítulo : Convergência e Integração

4,1) Convergência

O conceito de convergência é básiço nesta matéria e precede o de integração.

Há várias formas de testar a convergência o que dá origem a vários tipos de convergência.

4,1.1) Convergência quase em toda a parte (q.t.p.)

Seja dado um espaço medido (R, S, μ) e seja declarada certa proposição em relação aos elementos desse espaço que é verdadeira, excepto para alguns elementos, os quais formam um conjunto de medida μ nula; então, a proposição diz-se verdadeira quase em toda a parte (q.t.p.).

- Assim, se uma sequência $\{f_n\}$ converge para f uniformemente q.t.p ., tal significa que o conjunto dos termos f_K onde tal proposição não se verifica, constituem um conjunto cuja medida μ é nula.

- Assim, se $E_i = \{x : |f(x) - f_i(x)| \geq \varepsilon\}$, para que a sequência $\{f_i\}$ convirja q.t.p. , é necessário e suficiente que:

$$\lim_{n \to \infty} \mu \left(E \cap \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i \right) = 0$$

E q.t.p.

4,1. 2) Convergência em medida (m)

A sequência $\{f_n\}$ converge em medida em f se para $\varepsilon > 0$ e arbitrário for:

$$\lim_{n \to \infty} \mu \{ x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \} = 0$$

4,2) Integração

A introdução deste conceito faz-se a partir de uma classe de funções designadas por funções simples, e, depois, é estendido a funções mais complexas e irregulares.

4,2.1) Função simples

Esta classe de funções tem a forma geral seguinte:

$$f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \; \chi_{E_i}$$ onde χ_{E_i} é a função característica dum conjunto E_i que, como é sabido, toma dois valores: 0 e 1.

Sendo $$\chi_{E_i}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E_i \\ 0 & \text{se } x \notin E_i \end{cases}$$
e é definida num espaço medida (X, S, μ)

4,2.2) Integral de uma função simples

Para que uma função simples seja integrável é necessário e suficiente que $\mu(E_i) < \infty$, para todo o i onde $\alpha_i \neq 0$ com $E_i \in S$.

Simbolisa-se o integrável respectivo da forma seguinte:

$$\int f(x) \, . \, d\mu(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, . \, \mu(E_i)$$

Assim, teremos os seguintes casos típicos:

$$\int \chi_E \, f \, d\mu = \int_E f \, d\mu$$

$$\int \chi_E \, d\mu = \int_E d\mu = \mu(E)$$

$$\int_E (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int_E f \, d\mu + \beta \int_E g \, d\mu$$

- Se f for não negativa q.t.p., então:

$$\int_E f \, d\mu \geqslant 0$$

- Se $f \geq g$ q.t.p., então:

$$\int f \, d\mu \geq \int g \, d\mu$$

- $\int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$

- $\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu$

- Se $\alpha \leq f \leq \beta$ com α e $\beta \in$ Reais, então:

$$\alpha \, \mu(E) \leq \int_E f \, d\mu \leq \beta \, \mu(E)$$

4,2.3) Integral indefinido de f: (V)

$\forall E$ mensurável, $V(E) = \int_E f \, d\mu$

- Se $f \geq 0$, então, V é monótono

- V é absolutamente contínuo se f for integrável

- V é numeravelmente aditivo.

4,2.4) Distância de funções

A distância entre as funções f e g é definida pela expressão seguinte:

$$\rho(f, g) = \int |f - g| \, d\mu$$

É fácil de provar que se trata efectivamente de uma distância.

4,2.5) Sequência de funções simples integráveis e sua integração

A primeira generalisação consiste em estudar a classe de funções que são limites de sequências de funções simples; estas funções limites não são necessariamente funções simples.

- Sequência fundamental em média

Sejam dados um espaço medida (X, S, μ) e uma sequência $\{f_m\}$ de funções simples, tal que $\rho(f_m, f_m) \to 0$ quando m e m tendem para ∞.

Simbolisa-se a função limite dessa sequência fundamental por f.

$$f = \lim_{m \to \infty} f_m \qquad \rho(f, f_n) \Rightarrow 0 \quad n \to \infty$$

- Integral de f

O integral de f é definido como se segue:

$$\int f \, d\mu = \lim_{m \to \infty} \int f_m \, d\mu \quad \text{onde } f_m \in \{f_m\}$$

$$- \int_E f \, d\mu = \int \chi_E f \cdot d\mu$$

- O integral de f é absolutamente contínuo e o integral indefinido é numeravelmente aditivo.

- As restantes propriedades referidas para funções simples integráveis em 4,2.2), 4,2.3), e 4,2.4) aplicam-se a f.

4,2.6) Convergência em média

Diz-se que $\{f_m\}$ converge em média para f se:

$$\rho(f_m, f) = \int |f_m - f| \cdot d\mu \to 0 \quad \text{com } m \to \infty$$

4,2.7) Convergência limitada à Lebesgue

Sejam dados:

- Uma sequência $\{f_n\}$ que converge em ~~medida~~ média em f

- Uma função g integrável

Se $|f_n| \leq g$ q.t.p., então, f é integrável

e $\{f_n\}$ ~~converge em média em f~~.

Se f for mensurável e g integrável e $|f| \leq |g|$ q.t.p. então f é integrável.

- Se $\{f_n\}$ for uma sequência crescente de funções mensuráveis e não negativas e

$\lim_n f_n(x) = f(x)$, q.t.p., então:

$$\lim_n \int f_n(x)\, d\mu(x) = \int f(x)\, d\mu(x)$$

- Uma função mensurável só é integrável se os seus valores absolutos também o forem.

- Se f for uma função integrável e g for uma função essencialmente limitada, então, $f \cdot g$ é integrável.

Uma função g é essencialmente limitada se a medida do conju junto onde g não for limitado é zero.

- Se f for uma função essencialmente limitada em E, e E um conjunto mensurável de medida finita, então, f é integrável em E.

4,2.8) Lema de Fatou

Se $\{f_n\}$ for uma sequência de funções não negativas e integráveis, e $\liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu < \infty$ então $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ é integrável e $\int f \cdot d\mu \leq \liminf_n \int f_n\, d\mu$

5) Capítulo: Medidas com sinal, complexas, derivadas e generalisação a espaços produtos cartesianos

5,1) Medidas com sinal

As medidas, tal como introduzidas, são essencialmente não negativas.

Estende-se o conceito de medida a medidas com sinal da forma seguinte:

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu_i(E)$$

onde μ_i é uma medida, tal como definida inicialmente, e α_i um real (portanto positivo ou negativo).

Para conservar o sentido de uma medida com sinal da forma

$\mu(E) = \mu_1 - \mu_2$ quando μ_1 e $\mu_2 = \infty$, impõe-se que, pelo menos uma das duas medidas seja finita.

Vejamos algumas propriedades das medidas com sinal.

- Se E e F forem dois conjuntos mensuráveis e μ uma medida com sinal, $E \subset F$, e $|\mu(F)| < \infty$, então $|\mu(E)| < \infty$.

- Se $\{E_m\}$ for uma sequência disjunta, μ uma medida com sinal e $\left|\mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m\right)\right| < \infty$, então, a série $\sum_{m=1}^{\infty} \mu(E_m)$ será absolutamente convergente.

- Se $\exists_m\ |\mu(E_m)| < \infty$ e $\{E_m\}$ for decrescente, então

$$\mu\left(\lim_m E_m\right) = \lim_m \mu(E_m)$$

5,2) Medidas Complexas

A passagem ao espaço complexo faz-se com facilidade a partir das medidas com sinal, da forma seguinte:

$$\mu(E) = \mu_1(E) + i\,\mu_2(E)$$

As propriedades resultantes decorrem das propriedades com sinal que serviram para a respectiva construcção, como por exemplo:

A medida conjugada de $\mu^c(E)$ será dada por:

$$\mu^c(E) = \mu_1(E) - i\,\mu_2(E).$$

5,3) Medida com sinal, absolutamente contínua

Seja dado um espaço mensurável (X, S) e μ e V duas medidas com sinal sobre S. Diz-se que V é absolutamente contínua em relação a μ e simbolisa-se $V \ll \mu$, se $V(E) = 0$ para todo o conjunto E mensurável de (X, S), para o qual for

$$|\mu|(E) = 0$$

Assim, são equivalentes as expressões seguintes:

$$V \ll \mu \qquad V^+ \ll \mu \qquad V^- \ll \mu \qquad |V| \ll |\mu|$$

O operador $\ll$ é reflexivo e transitivo.

Com efeito, por exemplo:

Se $$(V \ll \mu) \wedge (\mu \ll V) \Longleftrightarrow (V \equiv \mu)$$

- Teorema de Radon-Nikodym

Se (X, S, μ) for um espaço medido e σ-finito, e se $V \ll \mu$ então existirá uma função f, tal que: $(\forall E)$.

$$V(E) = \int_E f \, d\mu \qquad \text{e } f \text{ é única.}$$

5,4) Derivada de medidas com sinal

A partir do teorema de Radon-Nikodym, pode introduzir-se o conceito de derivada.

Com efeito, a função f referida no teorema é a derivada de V

em relação a μ , e simbolisa-se da forma seguinte:

$$f = \frac{d\nu}{d\mu} \quad \text{ou} \quad d\nu = f \cdot d\mu$$

Vejamos algumas propriedades mais relevantes:

- Se $\nu \ll \mu \ll \lambda$ então,

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\lambda}$$

- e, então será ainda:

$$\int f \, d\mu = \int f \cdot \frac{d\mu}{d\lambda} \cdot d\lambda$$

5,5) <u>Generalisação do Conceito a espaços produtos cartesianos</u>

- <u>Espaços produtos cartesianos mensuráveis</u>

Se (X, S) e (Y, T) forem dois espaços mensuráveis, então, o espaço $(X \times Y, S \times T)$ também é mensurável.

- Espaços produtos cartesianos medida (e σ-finitos)

Se (X, S, μ) e (Y, T, ν) forem dois espaços medida (e σ-finitos), então, o espaço produto cartesiano $(X \times Y, S \times T)$ goza das seguintes propriedades:

- Se $E \subset X \times Y$, for mensurável e for:

$$f(x) = \mu(E_x) \quad e \quad g(y) = \nu(E^y)$$

Sendo f e g mensuráveis e não negativas, e onde :

$$\begin{cases} E_x = \{ y : (x, y) \in E \} & (\text{corte de } E \text{ por } x) \\ e \\ E^y = \{ x : (x, y) \in E \} & (\text{corte de } E \text{ por } y) \end{cases}$$

então $\int f \, d\mu = \int g \, d\nu$

- Produto de medidas

Se $\lambda(E)$ for uma função definida em $E \in S \times T$, pela expressão:

$$\lambda(E) = \int \nu(E_x) \cdot d\mu(x) = \int \mu(E^y)\, d\nu(y)$$

então, $\lambda(E)$ é uma medida σ-finita, tal que:

se $A \times B = E \in S \times T$ será:

$$\lambda(A \times B) = \lambda(E) = \mu(A) \cdot \nu(B)$$

e λ diz-se o produto das medidas μ e ν, ou seja $\lambda = \mu \times \nu$

Então, o espaço mensurável $(X \times Y, S \times T)$ tem uma medida produto (λ).

5,6) Integral Duplo

Seja dada uma função $h(x, y)$, onde $(x, y) \in X \times Y$ e é integrável, então:

$$\int h(x, y) \cdot d\lambda(x, y) = \int h(x, y) \cdot d[(\mu \times \nu)(x, y)]$$

Daqui decorrem algumas propriedades, nomeadamente as seguintes:

Se $\int h_x(y)\, d\nu(y) = f(x)$

e $\int f(x)\, d\mu(x)$, forem ambas definidas, então:

$$\int f\, d\mu = \iint h(x, y) \cdot d\nu(y) \cdot d\mu(x)$$

$$= \int d\mu(x) \int h(x, y)\, d\nu(y)$$

$$\int_E h\, d\lambda = \iint_E h\, d\mu \cdot d\nu = \iint_E h\, d\nu \cdot d\mu$$

São diversas as formas de simbolisar o integral duplo:

$$\int h(x,y) \cdot d(\mu \times \nu) = \int f(x)\, d\mu(x) = \int g(y)\, d\nu(y)$$

onde: $f(x) = \int h(x,y) \cdot d\nu(y)$

e $g(y) = \int h(x,y)\, d\mu(x)$

- Os conceitos definidos podem ser generalisados para espaços produtos cartesianos em número finito e até ∞ mas numerável.

6) Capítulo: Transformadas

Às aplicações de um conjunto X num outro Y, ambos não vazios, vai aqui dar-se a designação genérica de Transformadas.

Por demais conhecidas, não se faz aqui referência às principais propriedades das aplicações em geral e funções em particular.

6,1) Transformadas mensuráveis

Sejam dados dois espaços mensuráveis (X, S) e (Y, T), θ será uma transformada mensurável de (X, S) em (Y, T) se: "A imagem inversa de todo o conjunto mensurável for mensurável".

6,2) Se θ for uma transformada mensurável de (X, S) em (Y, T), e g for uma função real mensurável sobre Y, então, $g \cdot \theta$ é mensurável em relação ao σ-anel $\theta^{-1}(T)$

6,3) Se θ transforma o espaço medida (X, S, μ) em (Y, T), e g for uma função real mensurável em Y, então:

$$\int g \, d(\mu \theta^{-1}) = \int (g \theta^{-1}) \, d\mu$$

isto é, se qualquer dos dois integrais existir, o outro também existe, e são iguais.

6,4) Se θ transforma (X, S, μ) em (Y, T, ν), e o segundo espaço medida for σ-finito, e ainda $\mu \theta^{-1}$ for absolutamente contínuo em relação a ν, então existirá uma função ϕ em Y, tal que:

$$\int g(\theta(x)) \cdot d\mu(x) = \int g(y) \cdot \phi(y) \cdot d\nu(y)$$

6,5) Se θ for uma transformada $(1,1)$ de (X, S) em (Y, T) e se θ e θ^{-1} forem ambos mensuráveis, então: diz-se que θ preserva a mensurabilidade.

6,6) Se, nas condições anteriores, mas tratando-se de espaços medidas, (X, S, μ) e (Y, T, ν), então, diz-se que θ preserva a medida.

7) Capítulo : Estruturas algébricas típicas, espaços de funções, funções de conjuntos e funções de ponto.

Neste capítulo recapitulam-se alguns conceitos que interessam à introdução da teoria formal das probabilidades.

Só esta circunstância justifica incluir, num capítulo, matérias tão distintas.

7,1) Estruturas algébricas típicas

7,1.1) Anel de Bool

Um conjunto não vazio B e duas leis de composição interna $\vee$ e $\wedge$, ambas comutativas e associativas, e $\wedge$ distributiva em relação a $\vee$, constituem um anel de Bool $(B, \vee, \wedge)$, o qual goza das seguintes propriedades fundamentais:

- Tem um elemento neutro único O em relação a $\vee$, donde resulta que se $E \in (B, \vee, \wedge)$, então, $E \vee O = E$

- Se $E \in (B, \vee, \wedge)$, então $\begin{cases} E \vee E = O \\ e \\ E \wedge E = E \end{cases}$

Designa-se: $\vee$ por Soma

e $\wedge$ por Produto.

7,1.2) σ-anel de Bool

Trata-se de um anel de Bool $(B, \vee, \wedge)$ com mais as seguintes propriedades:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = E \in (B, \vee, \wedge) \text{ e onde } \forall_i \; E_i \in (B, \vee, \wedge)$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = E^* \in (B, \vee, \wedge) \text{ e onde } \forall_i \; E_i \in (B, \vee, \wedge)$$

7,1.3) Álgebra de Bool

É um anel de Bool que contém um elemento E_0 , tal que, para $\forall_i E_i \in (B, V, \wedge)$ se verifica que $E_i \subseteq E_0$

7,1.4) ∇-Álgebra de Bool

Definição idêntica à anterior (6,1.3) mas a partir de um ∇ -anel de Bool.

7,1.5) Conceitos de funções, mensurabilidade e de medida

Todos estes conceitos podem aplicar-se a estas estruturas algébricas e, a seguir, apresenta-se um exemplo:

7,1.6) Definição de uma medida positiva num ∇-anel.

Seja dado um ∇-anel e defina-se uma medida positiva μ que é sempre positiva, excepto para o elemento O que é nula.

O que se disse para ∇ -anéis diz-se para ∇ -álgebras.

Tem interesse recordar que se se verificar $\mu(E_0) = 1$ a medida diz-se normada, como sucede na medida de probabilidade.

Veja-se a definição de E_0 em 7,1.3).

7,2) Espaços de funções

Certas classes de funções podem ser estruturadas formando espaços algébricos. Algumas destas classes têm aplicação na teoria das probabilidades, e, por isso, tem interesse apresentar alguns exemplos.

7,2.1) Classe de funções $\mathcal{L}_1$

$\mathcal{L}_1$ é a classe de funções reais e integráveis sobre o espaço medida (X, S, μ)

- O integral de módulo de f, com $f \in \mathcal{L}_1$, será simbolisado por: $\|f\| = \int |f| \, d\mu$.

- A distância entre duas funções f e g de $\mathcal{L}_1$ será definida por:

$$\rho(f, g) = \|f - g\| = \int |f - g| \, d\mu$$

- Por ρ ser uma distância, gozava da propriedade importante seguinte:

Se $\rho(f, g) = 0$ então $f \equiv g$

7,2.2) Classe de funções $\mathcal{L}_p$

Esta classe de funções goza da propriedade seguinte que as define:

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

7,2.3) Desigualdade de Hölder

- Sejam dados dois reais maiores do que a unidade, p e q e satisfazendo à condição seguinte:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \qquad \begin{matrix} p > 1 \\ q > 1 \end{matrix}$$

Sejam dadas ainda duas funções f e g respectivamente das classes $\mathcal{L}_p$ e $\mathcal{L}_q$, então, será:

a) $f \cdot g \in \mathcal{L}_1$

b) $\|f \cdot g\| \leq \|f\|_p + \|g\|_q$

Se f e g pertencem à classe $\mathcal{L}_p$ e $p > 1$, então, será:

a) $f + g \in \mathcal{L}_p$

b) $\| f + g \| \leq \| f \|_p + \| g \|_p$

Estas desigualdades correspondem às regras do triângulo próprias da definição de distância ρ .

7,3) <u>Funções de conjuntos</u> e <u>funções do Ponto</u>

Tem interesse na teoria das probabilidades fazer o confronto entre funções cujo domínio são <u>conjuntos</u>, e funções cujo domínio são <u>elementos</u> (Pontos), e procurar encontrar certas correspondências entre elas.

7,3.1) <u>Aplicação à recta real</u>

Sejam simbolisados:

Por X o conjunto de elementos (Pontos) da <u>recta real</u>.

Por S a <u>classe</u> de todos os <u>conjuntos de Borel</u> da referida recta real.

Por μ uma <u>medida de Lebesgue</u> definida sobre S.

Por f uma função cujo domínio é X e que tem as seguintes propriedades: <u>monótona</u> $f(x) \leq f(y)$ se $x \leq y$ onde $x, y \in X$

<u>limitada</u> $f(x)_{x \to \infty}$ e $f(y)_{y \to -\infty}$ existem e são finitos

<u>contínua à esquerda</u>

Então, se $f(-\infty) = 0$, existirá uma medida ν em S , tal que $f = f_\nu$

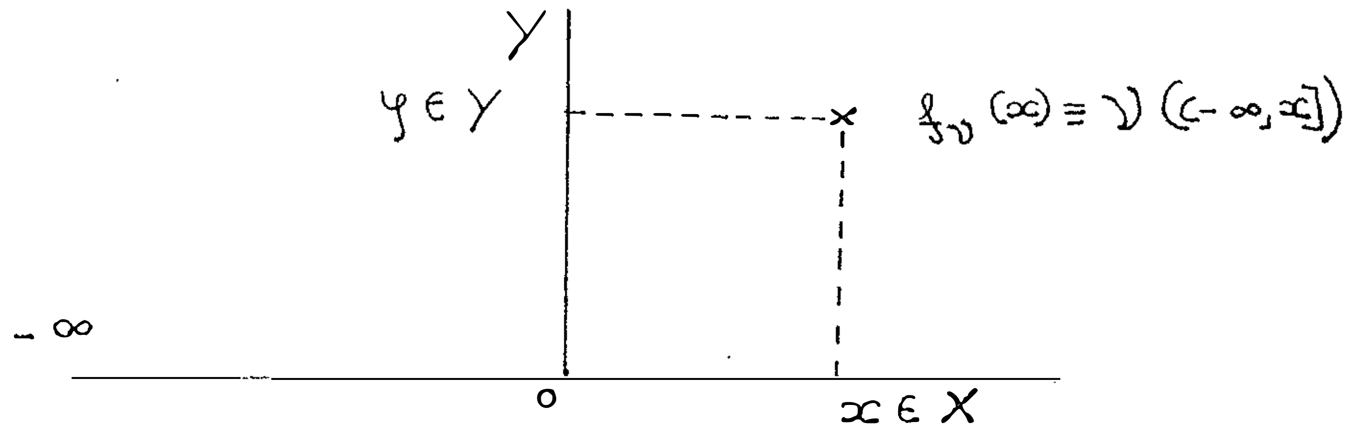
Se ν for medida finita em S e ainda se para todo o real x for:

$$f_\nu(x) = \nu(\{t : -\infty < t < x\})$$

então, f_ν é uma função limitada monótona, contínua à esquerda e $f_\nu(-\infty) = 0$

Estes dois resultados mostram a existência de uma correspondência entre $f(x)$, função do ponto (elemento x de X) e a medida ν, função do conjunto $(-\infty, x] \in S$.

- Este resultado pode ter uma representação gráfica que ilustra razoavelmente essa correspondência:



No gráfico temos representadas:

uma <u>função</u> $f_\nu(x)$, cujo domínio é X (Real) e contradomínio é Y (Real)

e uma <u>medida</u> $\nu((-\infty, x])$, cujo domínio é S, classe de conjuntos da forma genérica $(-\infty, x]$ e contradomínio Y (Real)

Assim, o mesmo real $y \in Y$ é o resultado da aplicação de $f_\nu(x)$ e de $\nu((-\infty, x])$.

Portanto, o ponto x (elemento de X) e a <u>função</u> $f_\nu(x)$ e o conjunto $(-\infty, x]$ e a <u>medida</u> $\nu((-\infty, x])$ têm por valor o mesmo real $y \in Y$.