ANTÓNIO GOUVÊA PORTELA

"Introdução aos conjuntos vagos" (continuação)

«TÉCNICA»
REVISTA DE ENGENHARIA
Separata do n.º 438 págs. 295 a 310

LISBOA
ASSOCIAÇÃO DOS ESTUDANTES
DO
INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
1977

C.D.U. 519.51

"Introdução aos conjuntos vagos" (*) (continuação)

António Gouvêa Portela
Prof. Catedrático I. S. T.

CAPÍTULO 5

RELAÇÕES BINÁRIAS

5.1 DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES

Se $X \equiv Y \equiv$ então $X \times Y = \mathcal{U} \times \mathcal{U} = \mathcal{U}^2$ e $\mathcal{U}^2$ será o conjunto referencial. De novo (Ω, ∇, Δ) seja um reticulado e $\mathcal{J}$ a família das aplicações funcionais de $\mathcal{U}^2$ em Ω.

As principais propriedades que podem possuir as Relações Binárias são:

5.1.1 *SIMETRIA*

Se $\forall\ (u_1, u_2) \in \mathcal{U}^2\ J_A(u_1, u_2) = J_A(u_2, u_1)$ então A é uma relação simétrica.

5.1.2 *REFLEXIVIDADE*

Se $\forall\ (u, u) \in \mathcal{U}^2$ for $J_A(u, u) = 1$ então A é uma relação reflexiva (repare-se que não basta ser $J_A(u, u) > 0$).

5.1.3 *TRANSITIVIDADE (DIRECTA)*

Se $\forall\ (u_1, u_2), (u_2, u_3) \in \mathcal{U}^2$ for

$$\nabla\left\{ J_A(u_1, u_3),\ \underset{u_j}{\nabla}\left[\Delta\left(J_A(u_1, u_j), J_A(u_j, u_3)\right)\right]\right\} = J_A(u_1, u_3)$$

então A é uma relação transitiva.

Note-se que a transitividade se testa pela composição de A o A; com efeito

$$A \circ A = \underset{u_j}{\nabla}\left\{\Delta\left[J_A(u_1, u_j), J_A(u_j, u_3)\right]\right\}$$

5.1.4 *TRANSITIVIDADE (INVERSA)*

Se $\forall\ (u_1, u_2), (u_2, u_3) \in \mathcal{U}^2$ for:

$$\Delta\left\{ J_{\bar{A}}(u_1, u_3),\ \underset{u_2}{\Delta}\left[\nabla\left(J_{\bar{A}}(u_1, u_j), J_{\bar{A}}(u_j, u_3)\right)\right]\right\} = J_{\bar{A}}(u_1, u_3)$$

então A é transitiva (inversa).

Esta definição só pode ser aplicada se o conjunto reticulado for complementado ou, quando muito, pseudo-complementado (à Zadeh).

Os resultados das duas formas, directa e inversa, não são, em geral, os mesmos.

5.1.5 *ANTI-SIMETRIA*

Se $\forall\ (u_1, u_2) \in \mathcal{U}$ for:

$$\left[J_A(u_1, u_2) \neq J_A(u_2, u_1)\right] U.$$

$$U\left[J_A(u_1, u_2) = J_A(u_1, u_2)\right] = 0$$

então A é anti-simétrica.

5.1.6 *ANTI-SIMETRIA À ZADEH*

Só se aplica a reticulados $(\{0, 1\}, \uparrow, \psi)$.

Se $\forall\ (u_1, u_2) \in \mathcal{U}$ for

$$\left[J_A(u_1, u_2) > 0\right] \Rightarrow \left[J(u_2, u_1) = 0\right]$$

então A é anti-simétrica à Zadeh.

5.1.7 *FECHO TRANSITIVO DUMA RELAÇÃO BINÁRIA*

Seja $A \subseteq \mathcal{U}$ e simbolize-se por $A^2 = A \circ A$. O elemento genérico $J_{A^2}(u_i, u_j) \in A^2$ terá a forma:

(*) Continuação do trabalho «Introdução aos Conjuntos Vagos» publicado na Técnica-433, Fevereiro de 1976, pág. 201 a 217.

$J_{A^2}(u_i, u_j) \in A^2 =$

$$= \underset{u_k}{\nabla} \left\{ \Delta \left[J_A(u_i, u_k),\ J_A(u_k, u_j) \right] \right\}$$

e se A for transitiva directa já vimos que $J_A \ \nabla\ J_{A^2} = J_A$ ou seja $J_A \geqslant J_{A^2}$ ou $A \supseteq A^2$. (veja-se 4.1.3).

Dum modo geral $A^k \supseteq A^{k+1}$.

Chama-se *fecho transitivo* duma relação binária a

$$\underset{t}{A} \bigcup_{i=1} A^i$$

a) Se A for transitivo então $\underset{t}{A}$ é transitivo.

b) Se $A \supseteq \underset{t}{A}$ então A é transitivo.

c) Se $A = A^2$ então A é transitivo.

d) Se a partir da ordem k, $A^{k+1} = A^k$ então

$$\underset{t}{A} = \bigcup_{i=1}^{k} A^i$$

são propriedades que resultam da definição imediatamente.

5.1.8 *CAMINHOS NUM GRAFO FINITO*

Seja dado:

Um grafo $A \subseteq \mathcal{U}^2$, cujo caracterizante $J_A \subseteq (\Omega, \nabla, \Delta)$ reticulado, onde Card $\mathcal{U}$ é finito.

Define-se *caminho finito* c_{ik} de u_i para u_k, num grafo finito A, um q-uplo, com a seguinte forma e propriedades:

a) $c_{ik} = (u_i, \ldots, u_k)$ é um q-uplo *ordenado*, cujos elementos vão ser resimbolizados, passando a escrever-se:

$$c_{ik} = ({}_1u, \ldots, {}_qu)$$

com ${}_1u = u_i$ e ${}_qu = u_k$ ($q \geqslant 2$ e finito).

b) $\forall\, j \in (1, \ldots, q), {}_ju \in \mathcal{U}$

c) $\forall\, j, p \in (1 \ldots q), {}_ju \neq {}_pu$

donde resultará que

$${}_1u = u_i \neq {}_qu = u_k$$

d) $\forall\, i, j + 1 \in (1, \ldots, q-1)$;

$$\nabla \left[J_A({}_ju, {}_{j+1}u), 0 \right] \neq 0$$

onde 0 é o infimo de Ω.

O *comprimento* h de c_{ik} é dado $(q-1)$:

$$h(c_{ik}) = q - 1$$

A *largura* l do caminho c_{ik} é definida da forma seguinte:

$$l(c_{ik}) = \underset{j}{\Delta} [J_A({}_ju, {}_{j+1}u)] \quad \text{com } j \in (1 \ldots q-1),\ l \in \Omega$$

5.1.9 *CAMINHO DE MAIOR LARGURA DE u_i PARA u_k.*

Seja $\mathscr{C}_{ik}$ o conjunto vulgar de todos os caminhos distintos iniciados em u_i e terminados em u_k.

Os caminhos $c^m_{ik} \in \mathscr{C}_{ik}$ e $c^n_{ik} \in \mathscr{C}_{ik}$ dizem-se distintos se os respectivos q-uplos forem *distintos*, isto é, tiverem pelo menos um elemento distinto, ou a ordem é diferente, ou q é diferente. Então o caminho de *maior largura* será o caminho c^r_{ik} tal que:

$$\nabla \left[l(c^r_{ik}),\ l(c^s_{ik}) \right] = l(c^r_{ik})$$

$$\text{e} \quad \Delta \left[l(c^r_{ik}),\ l(c^s_{ik}) \right] = l(c^s_{ik})$$

$$\text{para } \forall\, c^s_{ik} \in \mathscr{C}_{ik} \text{ e } c^s_{ik} \neq c^r_{ik}$$

Simboliza-se $l(c^r_{ik}) = L_{ik}$

5.1.10 *CAMINHOS DE MAIOR LARGURA E DE UM DADO COMPRIMENTO* h.

O conjunto $\mathscr{C}_{ik}$ de todos os caminhos iniciados em u_i e acabados em u_k pode ser dividido em classes de equivalência usando o comprimento h como critério de classificação.

Assim ${}_h\mathscr{C}_{ik}$ representará todos os caminhos iniciados em u_i e terminados em u_k que tenham um comprimento h e

$$\bigcup_h {}_h\mathscr{C}_{ik} = \mathscr{C}_{ik}$$

Pode definir-se a *largura* ${}_hL_{ik}$ do caminho de maior largura e de comprimento h

$${}_hL_{ik} = l(c^r_{ik})$$

que satisfaz ao seguinte conjunto de condições:

a) $c^r_{ik} \in {}_h\mathscr{C}_{ik}$

b) $\nabla \left[l(c^r_{ik}),\ l(c^s_{ik}) \right] = l(c^r_{ik})$

$$\text{e} \quad \Delta \left[l(c^r_{ik}),\ l(c^s_{ik}) \right] = l(c^s_{ik})$$

$$\text{para } \forall\, c^s_{ik} \in {}_h\mathscr{C}_{ik} \text{ e } c^s_{ik} \neq c^r_{ik}$$

5.1.11 *APLICAÇÃO DESTES CONCEITOS A GRAFOS CUJOS RETICULADOS (Ω, ∇, Δ) ASSOCIADOS SÃO TRANSITIVOS, COMO SUCEDE COM OS RETICULADOS DE ZADEH.**

A transitividade exprime-se pela proposição:

$$\forall(\alpha,\beta)\in\Omega^2\left[\left(\Delta(\alpha,\beta)=\alpha\right)\cup\left(\Delta(\alpha,\beta)=\beta\right)\right]\Leftrightarrow\alpha\leqslant\beta$$

Então teremos:

a) $$l(c_{ik})=\underset{j}{\Delta}\left[J_A({}_ju,{}_{j+1}u)\right]\quad j\in(1,\dots,q-1)$$

Haverá *pelo menos um* $J_A({}_lu,{}_{l+1}u)=l(c_{ik})$ com $l\in(1,\dots,q-1)$

b) $$L_{ik}=l(c^r_{ik})=\nabla\left(l(c^r_{ik}),\ l(c^s_{ik})\right)=l(c^r_{ik})$$

$$\forall\ c^s_{ik}\in\mathscr{C}_{ik}$$

é suficiente para definir L_{ik}

c) Há pelo menos um $J_A({}_mu,{}_{m+1}u)=L_{ik}$

$$m\in(1,\dots,q-1)$$

d) porque

$$L_{ik}=\nabla\left\{\Delta\left[J_A({}_ju,{}_{j+q}u)\right]\right\}$$

e da definição de *fecho transitivo* (5.4.3) pode estabelecer-se que:

$$J_{A^h}(u_i,u_k)={}_hL_{ik}\qquad\text{(directamente)}$$

e) $$J_{\underset{t}{A}}(u_i,u_k)=L_{ik}\qquad\text{(directamente)}$$

f) Se $h>\text{Card}\ \mathcal{U}$ então

$${}_hL_{ik}={}_mL_{ik}$$

para $m\leqslant\text{Card}\ \mathcal{U}$. Basta lembrar que o grafo é finito e que caminhos com $h>n$ têem repetições (circulações) que não alteram o resultado devido à idempotência dos operadores Δ e ∇.

g) $$\underset{t}{A}=\bigcup_{i=1}^{n}A_i\quad\text{e}\quad n=\text{Card}\ \mathcal{U}$$

pelas razões já invocadas.

(*) Veja-se Anexo 2.

5.2 — DEFINIÇÕES DE VÁRIOS TIPOS DE RELAÇÕES

5.2.1 *PRE-ORDEM VAGA*

Pre-ordem vaga é uma relação binária, transitiva e reflexiva. Daqui resultam as seguintes propriedades:

a) $A^2=A\circ A$ e

$$J_{A^2}(u_1,u_2)=\underset{u_i}{\nabla}\left[J_A(u_1,u_i)\,\Delta\,J_A(u_i,u_2)\right]$$

mas para $i=1$ será

$$J_A(u_1,u_1)\,\Delta\,J_A(u_1,u_2)$$

e porque $J_A(u_1,u_1)=1$ (reflexividade) será

$$J_A(u_1,u_1)\,\Delta\,J_A(u_1,u_2)=J_A(u_1,u_2)$$

Atendendo à transitividade

$$J_A(u_1,u_2)\geqslant\alpha$$

donde

$$J_{A^2}(u_1,u_2)=J_A(u_1,u_2)$$

e finalmente

$$A^2=A\ \text{(e não apenas } A^2\subset A)$$

b) Dum modo geral $A^k=A$ e $\underset{t}{A}=A$ (feho transitivo)

5.2.2 *SEMI PRÉ-ORDEM VAGA*

Relação binária não reflexiva e transitiva.

5.2.3 *PRÉ-ORDEM ANTI-REFLEXIVA VAGA*

Transitiva mas $\forall\ u\in\mathcal{U}:\ J_A(u,u)=0$

5.2.4 *RELAÇÃO DE SIMILITUDE (OU SEMELHANÇA) VAGA*

É uma relação pré-ordem vaga simétrica.
Porque é simétrica pode escrever-se

$$\alpha=J_A(u_1,u_2)=J_A(u_2,u_1)$$
$$\beta=J_A(u_2,u_3)=J_A(u_3,u_2)$$
$$\gamma=J_A(u_1,u_3)=J_A(u_3,u_1)$$

Dadas as relações de transitividade será:

$$\alpha\geqslant\beta\,\Delta\,\gamma$$
$$\beta\geqslant\alpha\,\Delta\,\gamma$$
$$\gamma\geqslant\alpha\,\Delta\,\beta$$

donde o seguinte conjunto de restrições:

$\alpha \geqslant \beta \wedge \beta \geqslant \alpha \wedge \gamma \geqslant \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$

$\alpha \geqslant \beta \wedge \beta \geqslant \alpha \wedge \gamma \geqslant \beta \Rightarrow \alpha = \beta$

$\alpha \geqslant \gamma \wedge \beta \geqslant \gamma \wedge \gamma \geqslant \alpha \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma$

$\alpha \geqslant \gamma \wedge \beta \geqslant \gamma \wedge \gamma \geqslant \beta \Rightarrow \gamma = \beta$

$\alpha \geqslant \gamma \wedge \beta \geqslant \alpha \wedge \gamma \geqslant \alpha \Rightarrow \gamma = \alpha$

$\alpha \geqslant \gamma \wedge \beta \geqslant \alpha \wedge \gamma \geqslant \beta \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma$

$\alpha \geqslant \gamma \wedge \beta \geqslant \gamma \wedge \gamma \geqslant \alpha \Rightarrow \alpha = \gamma$

$\alpha \geqslant \gamma \wedge \beta \geqslant \gamma \wedge \gamma \geqslant \beta \Rightarrow \beta = \gamma$

Estas propriedades resultam da simetria e podem resumir-se:

$$(\alpha \geqslant \beta = \gamma) \vee (\beta \geqslant \alpha = \gamma) \vee (\gamma \geqslant \alpha = \beta)$$

5.2.5 *SUB-RELAÇÕES DE SIMILITUDE DUMA PRÉ--ORDEM VAGA*

Seja dada uma pré-ordem vaga $A \subseteq \mathcal{U}^2$ e $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$ um sub-conjunto vulgar que constitui um sub-referencial e $J_1 \subset J$ um sub-conjunto de J e relativado a $\mathcal{U}_1$; se

$$J_A(u_1, u_2) = J_A(u_2, u_1) \qquad \forall\, u_1, u_2 \in \mathcal{U}_1$$

os elementos de $\mathcal{U}_1$ formarão uma *sub-relação de similidade*.

Uma sub-relação de similitude é maximal se não estiver contida noutra sub-relação de simllitude.

A classe de todas as sub-relações de similitude maximais se existir numa pré-ordem designa-se por *classe de similitudes da pré-ordem.*

Uma pré-ordem que pode ser decomponível em classes de similitude diz-se uma pré-ordem redutível.

5.2.6 *ANTI-SIMETRIA (VAGA)*

$\forall (u_1, u_2) \in \mathcal{U}^2$ e $u_1 \neq u_2$:

$$[J_A(u_1, u_2) \neq J_A(u_2, u_1)] \text{ ou } [J_A(u_1, u_2) = J_A(u_2, u_1) = 0]$$

diz-se que a relação à anti-simétrica.

5.2.7 *GRAFO ANTI-SIMÉTRICO VULGAR ASSOCIADO A. UMA RELAÇÃO VAGA*

$$\forall\, (u_1, u_2) \in \mathcal{U}^2$$

$$1)\ u_1 \neq u_2 \wedge \left[J_A(u_1, u_2) > J_A(u_2, u_1) \right] \Rightarrow \left[(u_1, u_2) \in G \text{ e } (u_2, u_1) \notin G \right]$$

$$2)\ u_1 \neq u_2 \left[J_A(u_1, u_2) = J_A(u_2, u_1) \right] \Rightarrow \Rightarrow \left[(u_1, u_2) \text{ e } (u_2, u_1) \notin G \right]$$

5.2.8 *ANTI-SIMETRIA PERFEITA (VAGA)*

Define-se $\forall (u_1, u_2) \in \mathcal{U}^2$ e $(u_1 \neq u_2)$

será: se $J_A(u_1, u_2) > 0$ então $J_A(u_2, u_1) = 0$

5.2.9 *RELAÇÃO DE ORDEM VAGA*

É uma relação binária reflexiva, transitiva, anti--simétrica. Porque $J_A(u_1, u_2) \geqslant J_A(u_2, u_1)$ em $\mathcal{U}$ induz-se uma ordem:

$$u_2 \geqslant u_1$$

5.2.10 *RELAÇÃO DE ORDEM TOTAL VAGA*

Se o grafo vulgar associado representa uma ordem total.

5.2.11 *RELAÇÃO DE ORDEM PARCIAL VAGA*

Basta que o grafo vulgar associado seja de ordem parcial.

5.2.12 *RELAÇÃO DE ORDEM PERFEITA (VAGA)*

Se se usar para definição de anti-simetria a definição 5.2.8.

5.2.13 *RELAÇÃO DE ORDEM ESTRICTA (VAGA)*

Relação estricta $\begin{cases} \text{transitiva} \\ \text{anti-reflexiva} \\ \text{anti-simétrica} \end{cases}$

Relação não estricta $\begin{cases} \text{transitiva} \\ \text{reflexiva} \\ \text{anti-simétrica} \end{cases}$

5.3 — OUTRA RELAÇÕES TÍPICAS

5.3.1 *RELAÇÕES ORDINAIS (VAGAS)*

São relações que gozam das seguintes propriedades:

- — reflexiva
- — anti-simétrica (veja-se 5.2-6, 7, 8)
- — não tem circuitos no grafo vulgar associado de comprimento superior a 1.

5.3.2 *FUNÇÃO ORDINAL DUM GRAFO VAGO*

Veja-se Anexo-3 que trata este tema para grafos vulgares.

A definição de relação de ordem vaga ordinal impõe que goze das seguintes propriedades:

— reflexiva

— anti-simétrica

— sem circuitos

— transitiva

É possível definir uma *função ordinal* para a relação de ordem vaga ordinal. Para o efeito usa-se o método descrito no Anexo-3 para onde se remete o leitor interessado nesse método.

5.3.3 *RELAÇÃO DE DISSEMELHANÇA (OU DISSIMILITUDE) VAGA*

Caracteriza-se por ser:

— simétrica

— anti-transitiva

Falta definir o que se entende por anti-transitiva. Anti-transitividade define-se como segue:

$$\forall\ (u,v),\ (v,w),\ (u,w) \subseteq \mathcal{U}^2$$

$$J_A\ (u,w) \leqslant \underset{v}{\Delta}\ [J_A(u,v)\ \nabla\ J_A\ (v,w)]$$

5.3.4. Tem interesse em confrontar a «*dissemelhança*» com a «*semelhança*»

Semelhança: simetria
$$\begin{cases} \alpha = J_A(u,w) = J_A\ (w,u) \\ \beta = J_A(u,v) = J_A\ (v,u) \\ \gamma = J_A(v,w) = J_A\ (w,v) \end{cases}$$

Dissemelhança simetria
$$\begin{cases} \bar{\alpha} = J_{\bar{A}}\ (u,w) = J_{\bar{A}}\ (w,u) \\ \bar{\beta} = J_{\bar{A}}\ (u,v) = J_{\bar{A}}\ (v,u) \\ \bar{\gamma} = J_{\bar{A}}\ (v,w) = J_{\bar{A}}\ (w,v) \end{cases}$$

São ambas simétricas.

Dissemelhança $J_A(u,u) = V$

Semelhança $J_{\bar{A}}\ (u,u) = O$

e $\begin{cases} V\ \Delta\ O = O \\ V\ \nabla\ O = V \end{cases}$

Finalmente

Semelhança $\alpha \geqslant \underset{v}{\nabla}\ (\beta_v\ \Delta\ \gamma_v\ )$

transitividade

Dissemelhança $\bar{\alpha} \leqslant \underset{v}{\Delta}\ (\bar{\beta}_v\ \nabla\ \bar{\gamma}_v\ )$

a aplicação das leis de De Morgan verificam as expressões de transitividade.

Portanto se o reticulado for complementado e se J_A satisfizer as regras de semelhança então $J_{\bar{A}}$ verifica as regras de dissemelhança.

Pode estender-se esta afirmação aos reticulados de Zadeh $([0,1],\ \hat{\ },\ \vee)$ que gozam da propriedade da pseudo complementariedade. A demonstração seguia os mesmos passos.

5.3.5 Relação *parecença é reflexiva* e simétrica.

5.3.6 Relação de *não parecença* é anti-relexiva e simétrica.

5.4 — *RELAÇÕES E SUAS PROPRIEDADES QUANDO O RETICULADO É DE ZADEH* $([0,1],\ \hat{\ },\ \vee)$

Embora se tenham feito algumas referências ao reticulado de Zadeh e porque este é dos mais empregados em conjuntos vagos, convém dedicar uma alínea ao estudo de algumas situações típicas que ocorrem com as relações já apresentadas no caso do reticulado ser de Zadeh.

5.4.1. — *CONCEITO DE DISTÂNCIA MIN MAX (D) ENTRE ELEMENTOS DUMA RELAÇÃO BINÁRIA.*

$$d_A(u,v) = 1 - J_A(u,v)$$

com $\quad u,v \in \mathcal{U}$ e $J_A \in ([0;1],\ \hat{\ },\ \vee)$

e se $\bar{A}$ for o complemento de A

$$d_A\ (u,v) = J_{\bar{A}}\ (u,v)$$

Estas definições serão aplicadas a vários tipos de relações e há que provar, em cada caso, se a definição de d_A satisfaz as regras de uma distância.

Aplicação a uma relação de semelhança (ver)

$$d_A(u,v) = 1 - J_A(u,v)$$

sendo A uma relação de semelhança vaga
A é: transitiva (directa)

reflexiva

simétrica

Porque é <u>*transitiva*</u> teremos:

$$J_A\ (u,v) \geqslant \underset{w}{\vee}\ [J_A\ (u,w)\ \hat{\ }\ J_A(w,v)]$$

ou

$$1 - J_A(u,v) \leqslant \underset{w}{\hat{\ }}\ [1 - J_A(u,w)\ \vee\ (1 - J_A\ (w,v))]$$

ou

$$d_A\ (u,v) \leqslant \underset{w}{\hat{\ }}\ [d_A\ (u,w)\ \vee\ d_A\ (w,v)]$$

Porque é <u>*simétrica:*</u>

$$J_A\ (u,v) = J_A(v,u)$$

donde

$$d_A(u,v) = 1 - J_A(u,v) = 1 - J_A(v,u) = d_A(v,u)$$

Porque é *reflexiva*:

$$J_A\ (u,u) = 1 \qquad \text{(supremo)}$$

donde

$$d_A(u,u) = 1 - J_A(u,u) = 1 - 1 = 0 \qquad \text{(ínfimo)}$$

e $d_A = 0 \Rightarrow 1 - J_A(u,w) = 0$ ou $J_A(u,w) = 1$

e daí que $u = w$

logo é mesmo uma distância.

Finalmente tem interesse em reparar que se designarmos por $\overline{A}$ a relação complementar de A com $J_A = 1 - J_{\overline{A}}$ então $J_A\ (u,v) = J_{\overline{A}}\ (u,v)$ e ainda que o operador que conjuga $d_A\ (u,w)$ com $d_A\ (w,v)$ é:

$$\pitchfork\ [d_A(u,w)\ \psi\ d_A(w,u)]$$

e daí a designação «min . máx».

Aplicação a uma relação de parecença (ver 5.3.5).

Uma relação de parecença A é reflexiva e simétrica; daí que o fecho transitivo A_t é ainda transitiva (directa) portanto A_t é simétrica reflexiva e daí uma relação de similitude (ou semelhança).

Define-se distância entre dois elementos u, v de A, como sendo

$$d_A\ (u,v) = 1 - d_{A_t}(u,v)$$

5.4.2 — *CONCEITO DE DISTÂNCIA MINSOMA D ENTRE ELEMENTOS DUMA RELAÇÃO BINÁRIA.*

Os operadores são agora $\pitchfork$ e $\pm$ (soma disjuntiva)

Se A for o conjunto dado seja A^* o conjunto obtido de A pela operação seguinte:

$$J_{A^*}\ (u,v) = \underset{w}{\pitchfork}\ [J_A\ (u,w) \pm J_{A^*}\ (w,v)]$$

que designaremos por min soma.

Aplicação a uma relação de parecença

$$D_A\ (u,v) = 1 - D_{A_t}\ (u,v)$$

$$J_{A_t}\ (u,v) = J_{A_t}\ (v,u) \Rightarrow D_A\ (u,v)$$

$$J_{A_t}\ (u,u) = 1 \Rightarrow D_{A_t}\ (u,u) = 0$$

e finalmente

$$J_{A_t}\ (u,v) \geqslant \underset{w}{\psi}\ [J_{A_t}\ (u,w)\ .\ J_{A_t}\ (w,v)]$$

ou

$$1 - J_{\overline{A}_t}\ (u,v) \geqslant \underset{w}{\psi}\ [1 - J_{\overline{A}_t}\ (u,w)\ .\ (1 - J_{A_t}\ (w,v))]$$

$$1 - J_{\overline{A}_t}\ (u,v) \geqslant \underset{w}{\psi}\ [1 - (J_{\overline{A}_t}\ (u,w) + J_{\overline{A}_t}\ (w,v) -$$

$$- J_{\overline{A}_t}\ (u,w)\ .\ J_{\overline{A}_t}\ (w,v))]$$

$$J_{\overline{A}_t} < \underset{w}{\pitchfork}\ [J_{\overline{A}_t}\ (u,w) \pm J_{\overline{A}_t}\ (w,v)]$$

como se desejava demonstrar

$$D\ (u,v) \geqslant D\ (u,w) \odot D\ (w,v)$$

onde $\odot$ é a operação minsoma no domínio do reticulado de Zadeh.

5.4.3 — *FECHOS TRANSITIVOS*

a) Fecho transitivo do tipo máx. prod.

Os operadores definidos no reticulado são $(\psi, \bullet)$ ou seja Máx. e prod. vulgares.

Se A for um conjunto vago, numa relação a composição do tipo *máx. prod.* será:

$$J_{A^2} = J_{A \circ A} = \underset{w}{\psi}\ [J_A\ (u,w)\ .\ J_A\ (w,v)]$$

e se Card $A = \gamma$ então o fecho transitivo (max. prod.) será:

$$A_t = \bigcup_{i=1}^{\gamma} A^i$$

Outras formas de compor típicas são:

$$J_{A^2} = J_{(A \circ A)} = \underset{w}{\psi}\ [J_A\ (u,v) \pitchfork J_A\ (w,v)]$$

ou

$$J_{A^2} = J_{(A \circ A)} = \underset{w}{\nabla}\ [J_A\ (u,w)\ \Delta\ J_A\ (w,v)]$$

Note-se que:

$$J_A\ (v,w)\ .\ J_A\ (w,v) \leqslant J_A\ (u,w) \pitchfork J_A\ (w,v)$$

e daí que, se for verdade $A^2 \subset A$ pela operação $(\psi . \pitchfork)$ então também pela operação $(\psi, \bullet)$ será verdade que $A^2 \supseteq A$.

Também se pode concluir que

$$(A < \psi, \pitchfork > A) \supset (A < \psi, \bullet > A)$$

onde $< \psi, \pitchfork >$ e $< \psi, \bullet >$ são os operadores max-min e max-prod. respectivamente.

5.4.4 — *COMPOSIÇÃO E DECOMPOSIÇÃO*

Aplicação destas operações a certos tipos de relações *binárias*.

a) Relação de similitude

Dum modo geral será:

$$R = \underset{\alpha}{\nabla}\ \alpha\ .\ R_\alpha$$

onde $0 < \alpha \leqslant 1$ e $\alpha \cdot R_\alpha$ é o producto vulgar α pelos elementos de R_α. R_α é o conjunto vulgar de nível α.

Demonstrar que se R é uma relação de similitude será:

$$(\alpha_1 > \alpha_2) \Leftrightarrow R_{\alpha_1} \supset (R_{\alpha_2})$$

e que, dum modo geral, R_α é uma relação de equivalência. Para demonstrar que R_α é uma relação de equivalência basta verificar se é reflexiva simétrica e transitiva o que é fácil sabendo que uma relação de similitude é também reflexiva simétrica e transitiva, e que

$$\alpha_1 > \alpha_2 \Leftrightarrow R_{\alpha_1} \supset R_{\alpha_2}$$

é igualmente imediata a demonstração.

b) Relação de ordem perfeita.

É fácil ver que se

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \Rightarrow \underline{R}_{\alpha_1} \subset \underline{R}_{\alpha_2}$$

c) Aplicação das composições ao caso em que $\Omega \equiv [a; b] \subset R$.

Seja

$$J_A(x, y) = \alpha \qquad \alpha \in \Omega$$

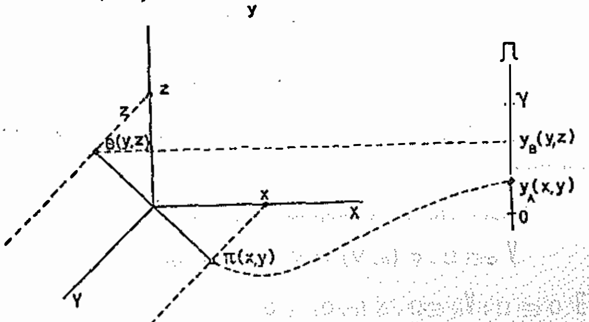
$$J_B(y, z) = \beta \qquad \beta \in \Omega$$

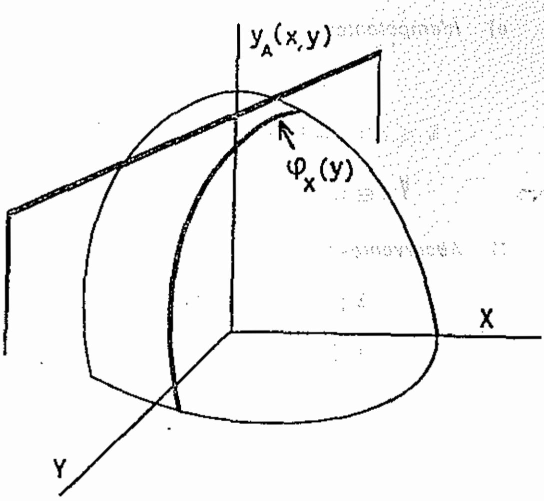
Sejam ψ e $\dot{\gamma}$ as operações definidas em Ω e o operador de composição, por exemplo, $\underset{\psi\,\dot{\gamma}}{\rtimes}$

e

$$\dot{\gamma}\,(J_A, J_B) = J_A$$

$$J_{(A,B)}(x, z) = \underset{y}{\vee}\,[J_A(x, y) \,\Delta\, J_B(y, z)]$$





$$\begin{matrix} {}_xJ_A(y) \\ {}_zJ_B(y) \end{matrix} \searrow \; {}_xJ_A(y) = {}_zJ(y)$$

Sejam P_1 P_2 P_3 os pontos de cruzamento;

há que estudar $[0, P_1]$ $[P_1, P_2]$ $[P_n, V]$

Em cada intervalo tomamos:

$${}_xJ_A(y) \quad \text{se} \quad {}_xJ_A(y) < {}_zJ_B(y)$$

$$\text{ou } {}_zJ_B(y) \quad \text{se} \quad {}_xJ_A(y) > {}_zJ_B(y)$$

as partições $[P_\alpha ; P_\beta]$ são função de (x, z)

ANEXO 1

A1.1 — *Correspondências (relações)*

Sejam dados dois ronjuntos $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$ e forme-se o producto cartesiano $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$; seja $G \subseteq \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ um sub-conjunto dado; então G é o grafo da correspondência Γ estabelecida do conjunto $\mathcal{U}_1$ para o conjunto $\mathcal{U}_2$.

A1.2 — *Aplicação* é toda a correspondência que gosa da propriedade adicional de:

$$\forall\, x \in \mathcal{U}_1 \; \exists\; y \in \mathcal{U}_2 : (x, y) \in G \text{ e } G \subseteq \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$$

A1.3 — Uma aplicação diz-se *funcional* ou função se e só se existir apenas um y para cada x, no grafo G:

$$\forall\, x \in \mathcal{U}_1 \; \exists^1\; y \in \mathcal{U}_2 : (x, y) \in G$$

A1.4 — No texto, para simplicidade de linguagem o vocábulo *aplicação* vai ser usado por *aplicação funcional.*

A1.5 — *Relação binária,* diz-se das relações cujos grafos G estão contidos no producto cartesiano $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ que simbolizaremos por $\mathcal{U}^2$.

A1.6 — *Conjuntos Ordenados.*

Uma relação binária w definida em $\mathcal{U}^2$ diz-se *relação de ordem* se for transitiva e equivalente.

a) Diz-se *transitiva* se:

$$(x, y) \text{ e } (y, z) \in w \text{ então } (x, z) \in w$$

b) Diz-se *equivalente* se:

$$(x, y) \text{ e } (y, z) \in w \text{ então } x = y$$

A1.7 — *Pré-ordem*

Uma relação binária diz-se uma *pré-ordem* se for reflexiva e transitiva.

A *reflexividade* define-se como:

$$\forall\, x \in \mathcal{U}, \; (x, x) \in \omega$$

A1.8 — A noção de *inclusão* ($\subseteq$) permite ordenar o conjunto das partes de $\mathcal{U}$, $\mathcal{P}$ ($\mathcal{U}$).

Com efeito, sendo dados A e B $\in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ como é possível definir B $\subseteq$ A ou A $\subseteq$ B será então possível ordenar os elementos de $\mathcal{P}$ ($\mathcal{U}$).

A1.9 — *Relações de ordem mais usadas e seu significado semântico.*

a) ($\geqslant$) — x é maior ou igual a y : x $\geqslant$ y

b) ($>$) — x é maior que y : x $>$ y

Assim $x \geqslant y = (x > y) \vee (x = y)$

A1.10 — *Cofinal (coinicial)*

Num conjunto ordenado ($\mathcal{U}$, $\geqslant$) ao conjunto $X \subseteq \mathcal{U}$ dá-se o nome de cofinal (ou coinicial) se se verificar:

$$\forall\, y \in \mathcal{U}\ \exists\, x \in X : x \geqslant y \ \text{(ou } y \geqslant x)$$

A1.11 — *Elemento minimal (maximal) em ($\mathcal{U}$, $\geqslant$)*

O elemento $a \in \mathcal{U}$ é minimal (ou maximal) se, sendo $a \geqslant x$ (ou $x \geqslant a$), então tivermos $x = a$

A1.12 — *Elemento menor (maior)*

$a \in$ ($\mathcal{U}$, $\geqslant$) será elemento menor (ou maior) se $\forall\, x \in \mathcal{U}$ for $x \geqslant a$ (ou $x \leqslant a$).

A1.13 — *Conjunto minorante (majorante)*

O elemento $x \in (\mathcal{U}, \geqslant)$ é minorante (ou majorante) do conjunto $A \subseteq \mathcal{U}$ se $\forall\, y \in A$ for $y \geqslant x$ (ou $x \geqslant y$).

O conjunto minorante m (ou majorante M) de A é o conjunto contituído por todos os elementos x tais que $\forall\, y \in A$ tem-se $y \geqslant x$ (ou $x \geqslant y$).

A1.14 — *Limite inferior (superior)*

Limite inferior (superior) é o elemento maior (menor) do conjunto minorante (majorante).

A1.15 — *Conjunto filtrante*

Todo o conjunto A, pré-ordenado, é filtrante à direita (à esquerda) se toda e qualquer parte finita de A não vazia for majorada (minorada).

A1.16 — *Reticulado* (*) é qualquer conjunto ordenado $\mathcal{U}$ onde todo o $A \subseteq \mathcal{U}$ tem limite superior e limite inferior, e esses limites pertencem a $\mathcal{U}$.

ANEXO 2 — CONJUNTOS RETICULADOS

A 2.1 — *Definição*

Seja dada uma triada (Ω, ∇, Δ) onde Ω é um conjunto com dois ou mais elementos e ∇ e Δ são duas operações internas conjugadas definidas em Ω e que gozam das seguintes propriedades:

a) *fechadas e unicidade no resultado*

$$\nabla(\alpha, \beta) = \delta \in \Omega \qquad \forall\, (\alpha, \beta) \in \Omega^2$$

$$\Delta(\alpha, \beta) = \gamma \in \Omega \qquad \forall\, (\alpha, \beta) \in \Omega^2$$

δ e γ são *únicos*.

b) ∇, Δ *são operações associativas*

$$\nabla[\alpha, \nabla(\beta, \gamma)] = \nabla[\nabla(\alpha, \beta), \gamma]$$

$$\Delta[\alpha, \Delta(\beta, \gamma)] = \Delta[\Delta(\alpha, \beta), \gamma]$$

para $\forall\, \alpha, \beta, \gamma \in \Omega$.

c) ∇, Δ *são operações comutativas*

$$\nabla(\alpha, \beta) = \nabla(\beta, \alpha)$$

$$\Delta(\alpha, \beta) = \Delta(\beta, \alpha)$$

para $\forall\, \alpha, \beta \in \Omega$

d) *Existência e unicidade dum supremo e dum ínfimo.*

Existe um só elemento $V \in \Omega$ tal que

$$\forall\, \alpha \in \Omega,\ \nabla(\alpha, V) = V \qquad \text{(supremo)}$$

$$\exists\, 0 \in \Omega : \forall\, \alpha \in \Omega,\ \Delta(\alpha, 0) = 0 \qquad \text{(ínfimo)}$$

e) *Idempotentes*

$$\nabla(\alpha, \alpha) = \alpha$$

$$\Delta(\alpha, \alpha) = \alpha$$

para $\forall\, \alpha \in \Omega$

f) *Absorventes*

$$\Delta[\alpha, \nabla(\alpha, \beta)] = \alpha$$

$$\nabla[\alpha, \Delta(\alpha, \beta)] = \alpha$$

(*) Outras designações para reticulado Vemos, por exemplo:
— LATIS (ou LATA) expressão portuguesa
— REDE ORDENADA.

Para $\forall \alpha, \beta \in \Omega$

Em geral o conceito *semântico* destes símbolos operatórios são respectivamente:

Δ — limite inferior

∇ — limite superior

A 2.2 — *Propriedades mais interessantes dos reticulados*

a) Em consequência da comutatividade e da associatividade é fácil ver o seguinte:

$\Delta \{ \Delta [\Delta (\alpha, \beta), \gamma], \delta \} = \rho$ pode escrever-se simbolicamente $\Delta (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \rho$ tendo esta representação um significado claro.

Se ainda designarmos por $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ e $A \subseteq \Omega$ então

$$\Delta [A] = \rho$$

e se $B = \{\alpha, \gamma, \eta, \theta\}$ com $B \subseteq \Omega$ então podemos escrever expressões tais como:

$$\Delta [(A \cap \bar{B}) \cup \{\gamma\}]$$

O mesmo se diz para o operador ∇. Em qualquer dos casos há que determinar os elementos correspondentes e que satisfazem à expressão entre os parêntesis rectos antes de operar com ∇ ou Δ.

b) Sejam

$$A, B \subseteq \Omega$$

$$\theta, \gamma, \delta \in \Omega$$

e

$$\nabla [B] = \theta$$

$$\nabla [A] = \gamma$$

$$\nabla [A \cup B] = \delta$$

Então é fácil ver que

$$\nabla (\theta, \gamma, \delta) = \delta$$

podendo eventualmente θ e (ou) γ serem iguais a δ. O mesmo com Δ.

c) *Supremo e ínfimo*

Seja:

$$\alpha \in \Omega, \quad A \subseteq \Omega, \quad \text{Card } A > 2$$

Então teremos:

$$\nabla (A, V) = V$$

$$\Delta (A, V) = \Delta (A)$$

$$\nabla (A, 0) = \nabla (A)$$

$$\Delta (A, 0) = 0$$

$$\nabla (\alpha, 0) = \alpha$$

$$\Delta (\alpha, 0) = 0$$

$$\nabla (\alpha, V) = V$$

$$\Delta (\alpha, V) = \alpha$$

d) *Relações de ordem e pre-ordem parciais*

Vamos estabelecer a seguinte equivalência entre as operações internas (∇), (Δ) e a relação de ordem $(\leqslant)$.

Sendo $(\alpha, \beta) \in \Omega^2$ seja

$$[(\Delta (\alpha, \beta) = \alpha) \cup (\nabla (\alpha, \beta) = \beta)] \Leftrightarrow [\alpha \leqslant \beta]$$

Está assim definido um nexo entre os referidos símbolos operatórios e a relação de ordem.

Só quando for verdade o primeiro membro é possível definir uma relação de ordem e nem para todos os pares $(\alpha, \beta) \in \Omega^2$, $\Delta (\alpha, \beta)$ e/ou $\nabla (\alpha, \beta)$ são α e/ou β; em muitos casos $\nabla (\alpha, \beta) = \delta$ e/ou $\Delta (\alpha, \beta) = \gamma$ sendo $\delta \neq \alpha$ e β $\gamma \neq \alpha$ e β. Então entre (α, β) não se pode estabelecer uma relação de ordem: daí que esta ordem seja parcial.

Mais adiante demonstrar-se-à a transitividade, equivalência e reflexividade da relação $(\leqslant)$ e ainda que ela não é total em geral, mas o seu grafo não é vazio.

Antes de passar a essas demonstrações é fácil de verificar a verdade das seguintes expressões:

$$[\Delta (\alpha, \beta) = \delta] \Rightarrow [(\delta \leqslant \alpha) \cap (\delta \leqslant \beta)]$$

$$[\nabla (\alpha, \beta) = \gamma] \Rightarrow [(\alpha \leqslant \gamma) \cap (\beta \leqslant \gamma)]$$

Com efeito:

$$\delta = \Delta (\alpha, \beta) = \Delta (\Delta (\alpha, \alpha), \beta) =$$

$$= \Delta (\Delta (\alpha, \beta), \alpha) = \Delta (\delta, \alpha)$$

mas

$$[\Delta (\delta, \alpha) = \delta] \Leftrightarrow [\delta \leqslant \alpha]$$

Repetia-se igual raciocínio para β e obtinha-se $[\delta \leqslant \beta]$ q. e. d.

O mesmo para a operação (∇).

Vejamos agora se o operador $\leqslant$ é efectivamente uma *relação de ordem parcial* e uma *pré-ordem parcial.*

Com efeito

I — Transitividade

Se for $(\alpha \leqslant \beta)$ e $(\beta \leqslant \gamma)$ então $(\alpha \leqslant \gamma)$

Com efeito

$$(\alpha \leqslant \beta) \Leftrightarrow [(\Delta (\alpha, \beta) = \alpha) \cup (\nabla (\alpha, \beta) = \beta)]$$

$$(\beta \leqslant \gamma) \Leftrightarrow [(\Delta (\beta, \gamma) = \beta) \cup (\nabla (\beta, \gamma) = \gamma)]$$

Há as quatro seguintes hipóteses a estudar:

$$[\Delta (\alpha, \beta) = \alpha] \cap [\Delta (\beta, \gamma) = \beta]$$

$$[\Delta (\alpha, \beta) = \alpha] \cap [\nabla (\beta, \gamma) = \gamma]$$

$$[\nabla (\alpha, \beta) = \beta] \cap [\Delta (\beta, \gamma) = \beta]$$

$$[\nabla (\alpha, \beta) = \beta] \cap [\nabla (\beta, \gamma) = \gamma]$$

Vejamos para a primeira:

$$\Delta(\alpha,\gamma) = \Delta[\Delta(\alpha,\beta),\gamma] = \Delta[\alpha,\Delta(\beta,\gamma)] =$$
$$= \Delta(\alpha,\beta) = \alpha$$

e se

$$[\Delta(\alpha,\gamma) = \alpha]$$

Para as formas $\nabla(\beta,\gamma) = \gamma$ basta recordar que

$$\Delta[\beta,\nabla(\beta,\gamma)] = \beta$$

ou

$$\Delta(\beta,\gamma) = \beta$$
$$[\nabla(\beta,\gamma) = \gamma] \Rightarrow \Delta(\beta,\gamma) = \beta$$

Pode acontecer que nem $\Delta(\alpha,\beta) = \alpha$ nem $\nabla(\alpha,\beta) = \beta$ e então não se pode declarar que $(\alpha \leqslant \beta)$. Isto significa que haverá pares (α,β) que não pertencem ao grafo da relação de ordem e daí que a ordem não é total, em geral.

Por outro lado existirão sempre um V e um O tais que

$$\left.\begin{array}{l} \nabla(\alpha, V) = V \\ \Delta(\alpha, O) = O \end{array}\right\} \forall\, \alpha \in \Omega$$

e pelo menos se poderá declarar que

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \leqslant V \\ O \leqslant \alpha \end{array}\right\} \forall\, \alpha \in \Omega$$

daí a existência de uma ordem parcial.

II — Equivalência

Esta propriedade expressa-se pela seguinte frase

$$[(\alpha \leqslant \beta) \cap (\beta \leqslant \alpha)] \Leftrightarrow [\alpha = \beta]$$

Com efeito

$$[(\Delta(\alpha,\beta) = \alpha) \cup (\nabla(\alpha,\beta) = \beta)] \Leftrightarrow (\alpha \leqslant \beta)$$
$$[(\Delta(\alpha,\beta) = \beta) \cup (\nabla(\alpha,\beta) = \alpha)] \Leftrightarrow (\beta \leqslant \alpha)$$
$$(\alpha \leqslant \beta) \cap (\beta \leqslant \alpha) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [(\Delta(\alpha,\beta) = \alpha) \cap (\Delta(\alpha,\beta) = \beta)] \cup$$
$$\cup [(\Delta(\alpha,\beta) = \alpha) \cap (\nabla(\alpha,\beta) = \alpha)] \cup$$
$$\cup [(\nabla(\alpha,\beta) = \beta) \cap (\Delta(\alpha,\beta) = \beta)] \cup$$
$$\cup [(\nabla(\alpha,\beta) = \beta) \cap (\nabla(\alpha,\beta) = \alpha)]$$

ou

$$(\alpha = \beta) \cup (\alpha = \beta) \cup (\alpha = \beta) \cup (\alpha = \beta)$$

Logo

$$(\alpha = \beta) \Leftrightarrow [(\alpha \leqslant \beta) \cap (\beta \leqslant \alpha)]$$

III — Reflexividade

$$\forall\, \alpha \in \Omega, \Delta(\alpha,\alpha) = \alpha \quad \text{e} \quad \nabla(\alpha,\alpha) = \alpha$$

Daí que $(\leqslant)$ seja também uma pré-ordem. A pré-ordem e a ordem definidas são *parciais*, como já se disse.

e) *Conceito de máximo e mínimo*

Quando for:

$$\forall\, (\alpha,\beta) \in \Omega^2 \;\; \text{e} \; \begin{cases} \Delta(\alpha,\beta) = \alpha & \nabla(\alpha,\beta) = \beta \\ \Delta(\alpha,\beta) = \beta & \nabla(\alpha,\beta) = \alpha \end{cases}$$

então os símbolos Δ e ∇ serão substituídos por, respectivamente, $\rotatebox[origin=c]{180}{ψ}$ e ψ e correspondem ao conceito semântico «máximo» e «mínimo».

Note-se que se β e $\alpha \in \{\alpha,\beta\}$ e jogando com as propriedades da associatividade e comutatividade, temos que:

$$\Delta(A) = \delta \qquad \delta \in \Omega \qquad (\text{em geral } \delta \in A)$$

mas

$$\rotatebox[origin=c]{180}{ψ}(A) = \varepsilon \qquad \varepsilon \in A \subseteq \Omega$$

Identicamente

$$\psi(A) = \gamma \qquad \gamma \in A \subseteq \Omega$$

com Card $A \geqslant 2$

Pode ainda escrever-se:

$$\begin{array}{lcl} \rotatebox[origin=c]{180}{ψ}(\Omega) = O & \text{em vez de} & \Delta(\Omega) = O \\ \psi(\Omega) = V & & \nabla(\Omega) = V \end{array}$$

A.2.3 — *Propriedades adicionais dos operadores* Δ *e* ∇.

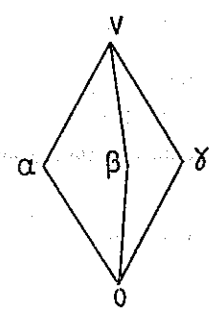
A.2.3.1 — Distributividade

Os reticulados dizem-se distributivos se:

$$\nabla[\alpha,\Delta(\beta,\gamma)] = \Delta[\nabla(\alpha,\beta),\nabla(\alpha,\gamma)]$$
$$\text{e} \quad \Delta[\alpha,\nabla(\beta,\gamma)] = \nabla[\Delta(\alpha,\beta),\Delta(\alpha,\gamma)]$$

quaisquer que sejam α,β,γ pertencentes a Ω.

O grafo seguinte *não* é distributivo



A2.3.2 — Complementariedade

β é complementar de α se for

$$\nabla(\alpha,\beta) = V$$
$$\text{e} \quad \Delta(\alpha,\beta) = O$$

Se β for único para cada α então β diz-se o complementar de α e representa-se por $\bar{\alpha}$.

Caso esta propriedade e respectiva unicidade seja verdadeira para todos os elementos de Ω, (Ω,∇,Δ) diz-se complementado.

A principal propriedade daqui resultante é a da involução:

$$\overline{\overline{(\alpha)}} = \alpha \qquad \forall\, \alpha \in \Omega$$

Com efeito

$$\nabla\,(\alpha, \overline{\alpha}) = V$$

$$\Delta\,(\alpha, \overline{\alpha}) = 0 \qquad \text{(por definição)}$$

donde

$$\nabla\,[\overline{\overline{(\alpha)}}, \overline{(\alpha)}] = V$$

$$\Delta\,[\overline{\overline{(\alpha)}}, \overline{(\alpha)}] = 0$$

mas o complementar de $\overline{\alpha}$ é único, logo

$$\overline{\overline{(\alpha)}} = \alpha \qquad \forall\, \alpha \in \Omega$$

A2.3.3. — Pseudo-complementariedade

Se $\tilde{\alpha} \in \Omega$ for um elemento relacionado com $\alpha \in \Omega$ de tal modo que $\tilde{\tilde{(\alpha)}} = \alpha$, isto é, a aplicação sucessiva do operador $(\sim)$ reproduz o elemento de partida (ou seja, $(\sim)$ goza da propriedade da involução), então diz-se que se pode definir em (Ω, ∇, Δ) uma pseudo-complementaridade.

É evidente que se *não* exige que

$$\nabla\,(\tilde{\alpha}, \alpha) = V \quad \text{e} \quad \Delta\,(\tilde{\alpha}, \alpha) = 0$$

A2.3.4. — Teoremas de Morgan

Os teoremas apresentam-se da forma seguinte:

Teorema 1 — $\overline{\nabla\,(\alpha, \beta)} = \Delta\,(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$

Teorema 2 — $\overline{\Delta\,(\alpha, \beta)} = \nabla\,(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$

Para que se verifiquem os teoremas de De Morgan é necessário que:

— O reticulado seja complementado.

$\forall\, \alpha \in \Omega$, existe um só elemento $\beta \equiv \overline{\alpha}$ em Ω tal que:

$$\nabla\,(\alpha, \overline{\alpha}) = V$$

$$\Delta\,(\alpha, \overline{\alpha}) = 0$$

— Se designarmos por

$$\nabla\,(\alpha, \beta) = \gamma\,, \quad \gamma \in \Omega$$

$$\Delta\,(\alpha, \beta) = \delta\,, \quad \delta \in \Omega$$

como (Ω, ∇, Δ) é complementado γ e δ existem e são únicos.

— Finalmente

$$\nabla\,(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) = \psi\,, \quad \psi \in \Omega$$

$$\Delta\,(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) = \rho\,, \quad \rho \in \Omega$$

ρ e ψ são igualmente únicos.

Em resumo:

$\forall\, (\alpha, \beta) \in \Omega^2$ existirão e serão únicos: $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \gamma, \delta, \rho, \psi$, ao todo oito elementos contando com α e β. Estes oito elementos estão entre si vinculados por oito proposições:

$$\nabla\,(\overline{\alpha}, \alpha) = V$$

$$\Delta\,(\overline{\alpha}, \alpha) = 0$$

$$\nabla\,(\overline{\beta}, \beta) = V$$

$$\Delta\,(\overline{\beta}, \beta) = 0$$

$$\nabla\,[\nabla\,(\alpha, \beta),\ \Delta\,(\overline{\alpha}, \overline{\beta})] = V \quad \text{ou} \quad \nabla\,[\gamma, \rho] = V$$

$$\Delta\,[\nabla\,(\alpha, \beta),\ \Delta\,(\overline{\alpha}, \overline{\beta})] = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta\,[\gamma, \rho] = 0$$

$$\nabla\,[\Delta\,(\alpha, \beta),\ \nabla\,(\overline{\alpha}, \overline{\beta})] = V \quad \text{ou} \quad \nabla\,[\delta, \psi] = V$$

$$\Delta\,[\Delta\,(\alpha, \beta),\ \nabla\,(\overline{\alpha}, \overline{\beta})] = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta\,[\delta, \psi] = 0$$

Não há muitos reticulados que satisfaçam às condições de De Morgan. Como exemplos teremos:

fig. 1

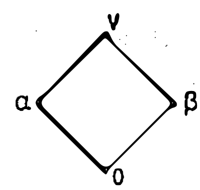


fig. 2

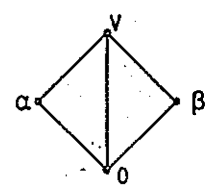


fig. 3

Por simples verificação é fácil de ver que são complementados e que as leis de De Morgan se aplicam.

O reticulado da figura 1 é o reticulado de Bool.

Os teoremas de De Morgan também se aplicam a certos reticulados pseudo-complementados, como o reticulado de Zadeh assim definido:

$([0, 1], \psi, \varphi)$, distributivo e pseudo-complementado.

Este reticulado goza das propriedades de lhe ser aplicável os teoremas de De Morgan.

Com efeito, definindo

$$\forall\, \alpha \in \Omega : \tilde{\alpha} = 1 - \alpha \quad \text{e} \quad \tilde{\tilde{(\alpha)}} = \alpha$$

$(\sim)$ símbolo do pseudo-complemento.

então:

$$\psi\,(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \psi\,(1 - \alpha, 1 - \beta) =$$

$$= 1 - \varphi\,(\alpha, \beta) =$$

$$= \widetilde{\varphi\,(\alpha, \beta)}$$

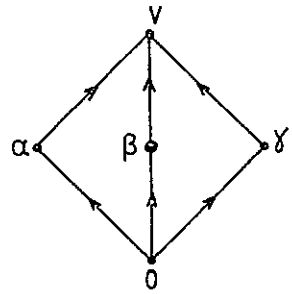
o mesmo se podendo fazer em relação a $\varphi\,(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$.

A2.3.5 — Reticulado Modular

Se $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \Omega$ for:

$$(\alpha \leqslant \beta) \Rightarrow \quad \alpha \triangledown (\beta \vartriangle \gamma) = (\alpha \triangledown \beta) \vartriangle \gamma$$

diz-se que $(\Omega, \triangledown, \vartriangle)$ é um reticulado modular.
Como exemplo temos:



A2.3.6 — Conceito de dominância e comparabilidade

Seja dado o produto cartesiano $\overset{n}{\underset{i=1}{\times}} A_i$ e sejam igualmente dados dois elementos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ onde x_i e $y_i \in A_i$, $\forall_i \in (1 \ldots n)$.
Diz-se que $(x_1, \ldots, x_n)$ domina $(y_1, \ldots, y_n)$ se:

$$\forall_i \in \{1, \ldots, n\}, \quad x_i \geqslant y_i$$

e domina estrictamente se

$$\forall_i \in \{1, \ldots, n\}, \quad x_i > y_i$$

Se nem $(x_1, \ldots, x_n)$ domina $(y_1, \ldots, y_n)$ nem $(y_1, \ldots, y_n)$ domina $(x_1, \ldots, x_n)$ então dizem-se dois elementos não comparáveis.

A2.3.7 — Producto de Reticulados

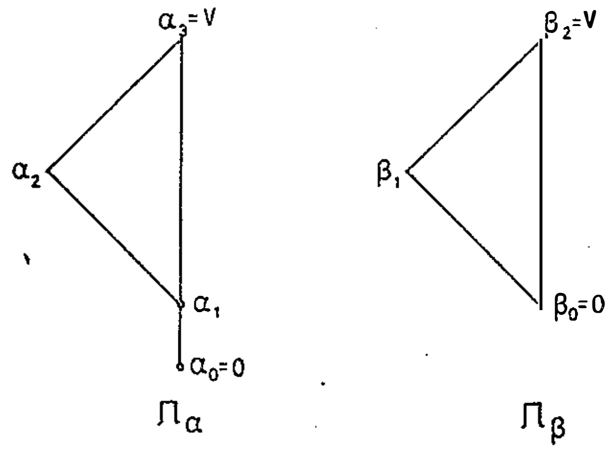
Sejam dados dois reticulados $(\Omega_\alpha, \triangledown, \vartriangle)$ e $(\Omega_\beta, \triangledown, \vartriangle)$. Forma-se o producto cartesiano $\Omega_\alpha \times \Omega_\beta$. Consideremos um conjunto $G \subseteq \Omega_\alpha \times \Omega_\beta$. Se quaisquer 2 elementos de G forem comparáveis entre si, G é ordenado pela relação de ordem *dominância* (estricta ou lata conforme o caso).

A2.3.8 — Cadeias Maximais

Empregando a relação de ordem ω definido num reticulado é possível partindo de (O) ou (V) atingir respectivamente (V) ou (O). Escolhendo entre todas as cadeias assim construídas aquelas que não tenham elementos comuns (com excepção de O e de V) obtém-se o conjunto de cadeias maximais do grafo.

Esta definição autoriza que existam mais do que um conjunto distinto de cadeias maximais.

A2.3.9 — Exemplo de um producto cartesiano de reticulados



Forme-se o producto cartesiano $\Omega_\alpha \times \Omega_\beta$. Os pares que pertencem a esse producto são:

$$(\alpha_0, \beta_0) \; (\alpha_1, \beta_0) \; (\alpha_2, \beta_0) \; (\alpha_3, \beta_0)$$

$$(\alpha_0, \beta_1) \; (\alpha_1, \beta_1) \; (\alpha_2, \beta_1) \; (\alpha_3, \beta_1)$$

$$(\alpha_0, \beta_2) \; (\alpha_1, \beta_2) \; (\alpha_2, \beta_2) \; (\alpha_3, \beta_2)$$

Vamos usar o critério de dominância $(\geqslant)$ — não estricta —.

$$(\alpha_3, \beta_2) \geqslant (\alpha_3, \beta_1) \geqslant (\alpha_3, \beta_0) \geqslant (\alpha_2, \beta_0) \geqslant (\alpha_1, \beta_0) \geqslant (\alpha_0, \beta_0)$$

O conjunto $G \subseteq (\Omega_\alpha \times \Omega_\beta)$ formado por estes pares está ordenado pelo critério da dominância não estricta $(\geqslant)$.

Note-se:

i) Se Ω_α e Ω_β forem totalmente e estrictamente ordenadas, então obtém-se um reticulado vectorial (ver A2.4.3).

ii) Se Ω_α e Ω_β forem distributivos também $G \subseteq (\Omega_\alpha \times \Omega_\beta)$ será distributivo

A2.4 — ESTUDO DE ALGUNS CONJUNTOS RETICULADOS MAIS USADOS

2.4.1 — *Conjunto de Zadeh* $([0, 1], \curlywedge, \psi)$

Verifica-se facilmente que $([0, 1], \curlywedge, \psi)$ tem as seguintes propriedades:

a) Fechado

b) Associativo

c) Comutativo

d) Existência e unicidade de supremo e ínfimo

e) Idempotente

f) Absorvente

g) Distributivo

h) Pseudo-complementado

i) Aplicam-se os Teoremas de De Morgan

« $\dot{\varphi}$ » significa «o mínimo de»

«ψ» significa o «máximo de»

Neste conjunto [0, 1], e para qualquer elemento $\alpha_i \in \Omega \equiv [0, 1]$ é possível definir duas operações internas fechadas: o producto e a soma disjuntiva.

A2.4.1.1 — *Producto (*)*

$$\alpha_i * \alpha_j = \alpha_k = \alpha_i \cdot \alpha_j$$

onde (.) é o símbolo do producto vulgar.

Esta operação interna (*) definida em [0, 1] é:

— fechada

— associativa

— comutativa

— «0» é o elemento absorvente

— «1» é o elemento neutro

A2.4.1.2 — *Soma disjuntiva (T)*

$$\alpha_i \mathrm{T} \alpha_j = \alpha_m = \alpha_i + \alpha_j - \alpha_i \cdot \alpha_j$$

onde

«+» é a soma usual

«—» é a diferença usual

«.» é o producto usual

Note-se que sendo α_i e $\alpha_j \in [0, 1]$,

$$\alpha_i + \alpha_j \geqslant \alpha_i \ \alpha_j$$

donde o símbolo (—) pode aplicar-se e daí resulta

$$\alpha_m \in [0, 1].$$

A soma disjuntiva é uma operação interna definida em [0, 1]:

— fechada

— comutativa

— associativa

— 0 é o elemento neutro.

A2.4.1.3 — *As operações (*) e (T) são distributivas*

A2.4.1.4 — Tem interesse escrever a expressão de aplicação sucessiva da soma disjuntiva:

$$\alpha_1 \mathrm{T} \alpha_2 \mathrm{T} \dots \mathrm{T} \alpha_u =$$

$$= (-1)^0 \sum_{i=1}^{u} \alpha_i + (-1)^1 \sum_{i,j=1}^{u} (\alpha_i \ \alpha_j) + \dots +$$

$$+ (-1)^{k-1} \sum_{i,\dots,l=1}^{u} \underbrace{(\alpha_i \cdot \dots \cdot \alpha_l)}_{k} +$$

$$+ (-1)^{u-1} (\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_u)$$

A2.4.1.5 — Pode definir-se o operador (—), significando $\alpha_i - \alpha_j$ a diferença vulgar, mas apenas se $\alpha_i \geqslant \alpha_j$

A2.4.2 — *Conjunto de Bool.*

Para este suporte $\Omega \equiv \{0, 1\}$ o reticulado $(\{0, 1\}, \dot{\varphi}, \psi)$ é:

a — fechado

b — associativo

c — comutativo

d — Existem supremo e ínfimo, sendo únicos

e — idempotente

f — Absorventes

g — Distributivo

h — Complementado:

$$\dot{\varphi}\ (0, 1) = 0 \quad \text{e} \quad \psi\ (0, 1) = 1$$

i — Aplicam-se as leis de De Morgan

A2.4.3 — *Reticulado Vectorial* [1]

Sejam dados n conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ qualquer deles completamente ordenado pela relação de ordem estrita (>) — $\alpha > \beta$ significa $\alpha \neq \beta$ — e tendo um supremo e ínfimo.

Forme-se o producto cartesiano

(1) Ver exemplo em A2.3.9

$$\mathscr{A} = \overset{n}{\underset{i=1}{\times}} A_i$$

Se usarmos a relação de dominação assim definida:

$$(a_1, \ldots, a_n) \geqslant (b_1, \ldots, b_n)$$

$$\text{com} \quad (a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in A$$

$$\text{se} \quad a_i \geqslant b_i \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\},$$

então o conjunto $\mathscr{A}$ é um reticulado distributivo mas não complementado. Com efeito:

a) — Fechado

$$\nabla [(\ldots, a_i, \ldots), (\ldots, b_i, \ldots)] = (\ldots, c_i, \ldots)]$$

onde $\forall_i$, $c_i = \nabla (a_i, b_i)$ e como A_i é completa e estritamente ordenado $(c_i = a_i)$ ou $(c_i = b_i)$.

Identicamente para (Δ).

b — Associativo (*)

c — Comutatividade (*)

d — Todos os A_i têm um supremo e um ínfimo

e — Idempotentes (*)

f — Absorventes (*)

g — Distributividade

g — Distributividade

$$\nabla\Big[(\ldots, a_i, \ldots) \;\Delta\; [(\ldots, b_i, \ldots), (\ldots, c_i, \ldots)]\Big] =$$

$$= \Delta\Big[\nabla \; [(\ldots, a_i, \ldots), (\ldots, b_i, \ldots)], \nabla$$

$$\nabla \; [(\ldots, a_i, \ldots), (\ldots, c_i, \ldots)]\Big] =$$

$$= \Delta[(\ldots, b_i, \ldots), (\ldots, c_i, \ldots)] = (\ldots, g_i, \ldots)$$

em que

$$g_i = \Delta (b_i, c_i), \; \forall i$$

e

$$\nabla [(\ldots, a_i, \ldots), (\ldots, g_i, \ldots)] = (\ldots, h_i, \ldots)$$

$$h_i = \nabla [a_i, \Delta (b_i, c_i)]$$

Por outro lado

$$\nabla [(\ldots, a_i, \ldots), (\ldots, b_i, \ldots)] = (\ldots, l_i, \ldots)$$

$$l_i = \nabla (a_i, b_i), \; \forall i$$

$$\nabla [(\ldots, a_i, \ldots), (\ldots, c_i, \ldots)] = (\ldots, m_i, \ldots)$$

$$m_i = \nabla (a_i, c_i), \; \forall i$$

e

$$\Delta[(\ldots, l_i, \ldots), (\ldots, m_i, \ldots)] = (\ldots, n_i, \ldots)$$

$$n_i = \Delta (l_i, m_i) = \Delta[\nabla (a_i, b_i), \nabla (a_i, c_i)]$$

mas A_i é completa e estritamente ordenado e portanto distributivo e daí

$$h_i = \nabla [a_i, \Delta (b_i, c_i)] =$$

$$= \Delta[\nabla (a_i, b_i), \nabla (a_i, c_i)] = h_i$$

h — Não é complementado em geral a não ser que cada A_i o seja (conjuntos de Bool).

2.4.4 — *Reticulado Lexicográfico*

Será um reticulado vectorial com os elementos totalmente ordenados.

ANEXO 3

A3.1 — *Funções ordinais de um grafo vulgar sem circuitos.*

Seja $G \subseteq \mathcal{U}^2$, finito, anti-simétrico e sem circuitos.

Ψ a família de todas as aplicações (funcionais ou não) de $\mathcal{U}$ em $\mathcal{U}$

$\psi \in \Psi$ um membro da família ψ.

ψ^{-1} a aplicação inversa de ψ.

Define-se, de um modo geral, N_i, um sub-conjunto vulgar, do seguinte modo:

$$N_i = \left\{ u_j : \psi_G^{-1} (u_j) \subset \bigcup_{k=0}^{p-1} N_K \right\}$$

onde

$$u_j \in \mathcal{U} \text{ e } 0 \leqslant K \leqslant p-1 \quad K_1 p \in N$$

$$N_0 = \left\{ u_j : \psi_G^{-1} (u_j) = \varnothing \right\}$$

e $p \in N$, mais pequeno, tal que:

$$\psi_G (N_p) = \varnothing$$

(*) É óbvio a partir da definição.

Os sub-conjuntos (vulgares) N_i , $i \in \{0, \ldots, r\}$ formam uma partição de $\mathcal{U}$ e estão estrita e totalmente ordenados, isto é:

$$(k < l) \Leftrightarrow (N_k < N_l)$$

Função ordinal dum grafo vulgar sem circuitos é definida como segue:

Nível de partição é dado pelo índice da partição. Assim, N_k tem o nível ou ordem) k.

$$O(u_i) = k \text{ se } u_i \in N_k$$

A3.2. — *Extensão da noção de função ordinal a grafos com circuitos*

Para o efeito formam-se as classes de equivalência do grafo G dado, onde a relação de equivalência é: «existe um caminho de u_i para u_j e de u_j para u_i ». Os conjuntos assim formados e máximos formam classes de equivalência e constituem uma ordem total ou parcial. Se for total teremos a função ordinal desejada. Se for parcial construa-se o grafo vulgar *sem circuitos* a partir dessas classes e a função ordinal desse grafo sem circuitos será a função ordinal desejada.

Na figura está representado uma parte de um grafo onde existe uma circulação entre os pontos u_1, u_2, u_3, u_4.

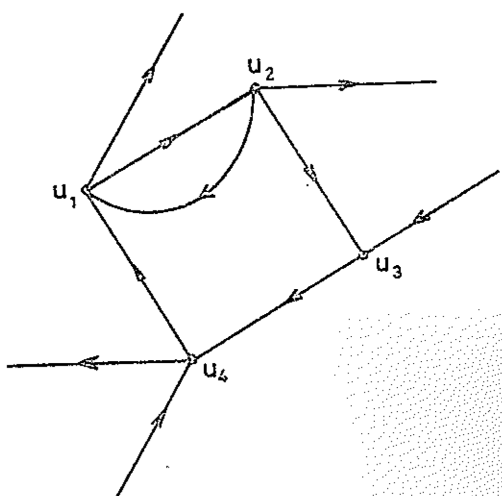


FIG. 1

Esta circulação pode descrever-se pela *equivalência* referida ao princípio: «existe um caminho de u_i para u_j e de u_j para u_i ».

Não sendo possível declarar quem *precede* quem, os quatro elementos u_1, u_2, u_3, u_4 são tratados como se se «fundissem» num único elemento u_0^* e a figura acima pode ser substituída por esta outra

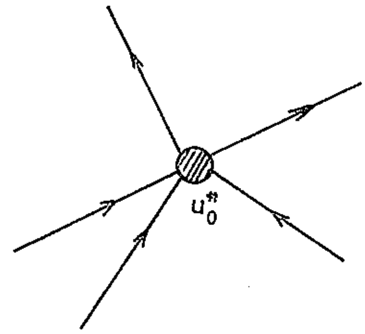


FIG. 2

Desta forma suprimem-se os circuitos e então cai-se na situação geral de grafos sem circuitos.

Por exemplo, na fig. 3

1, 2 e 3 é um circuito (I)

9, 10 e 11 é um outro circuito (II)

4, 5, 6 e 7 é outro circuito (III)

7, 6 e 8 *não* é circuito

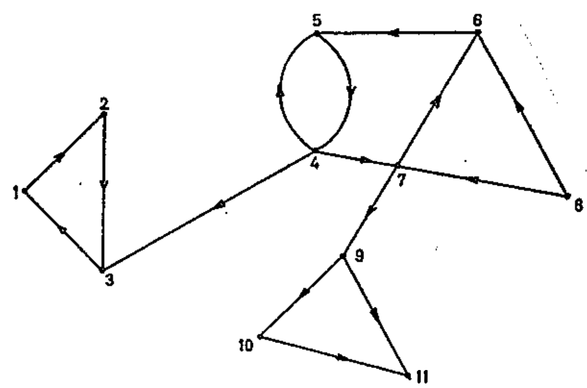


FIG. 3

Na fig. 4 está repreentado a forma simplicada e sem circuitos do grafo dado.

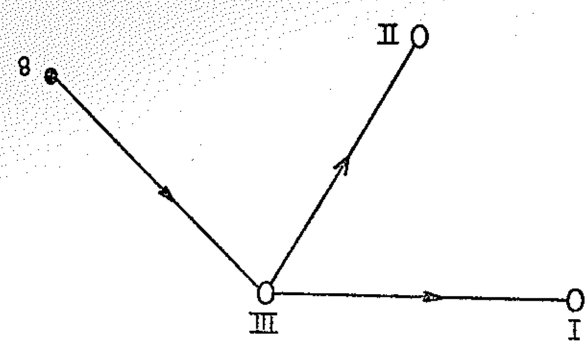


FIG. 4