C. D. U. 007.51.951

Introdução aos conjuntos vagos

António Gouvêa Portela
Prof. Catedrático do I. S. T.

RESUMO

Trata-se duma introdução à Teoria dos Conjuntos Vagos com vista a aplicações a vários domínios nomeadamente à Engenharia.

SUMMARY

An Introduction to the Theory of Fuzzy Sets, in view of applications to various domains, namely to Engineering Science.

1.° CAPÍTULO

JUSTIFICAÇÃO DO CONCEITO DE CONJUNTO VAGO.

Na descrição do universo real o Homem usa espaços artificiais para neles projectar imagens desse real. As vantagens deste procedimento são variadas:

> Na imagem foi abstraído tudo o que no real não é relevante para a resolução do problema em causa.
> Isto significa que foi usado um operador-filtrante para projectar o objecto real nesse espaço imagem.
>
> As imagens porque são formas «purificadas» têm propriedades mais uniformes e sujeitam-se a operações formais rigorosas.
> O real só depois de convertido em imagem tem tratamento formal.

Por outro lado, sucede que certas conclusões extraídas de processos e raciocínios formais realizados sobre imagens, ao serem reconvertidas no domínio dos objectos reais não se adequam aos factos observados.

Com efeito, as «purificações» e filtrações feitas ao objecto real para criar a imagem desejada foram levadas ao ponto de uma, ou várias, informações relevantes terem sido perdidas no processo.

Este inconveniente força a criação de novos espaços-imagem gozando de novas propriedades e onde as imagens não perderam as tais informações relevantes para a resolução do problema.

Os conjuntos vagos foram desenvolvidos com a finalidade de solucionar certas situações reais onde os conjuntos usuais e respectivas teorias se mostravam inadequados.

Pela apresentação de alguns problemas e casos típicos vão ilustrar-se as insuficiências da teoria clássica dos conjuntos e simultaneamente justificar-se a teoria dos conjuntos vagos (*).

Exemplo 1:

O «experimentador», engenheiro, físico, médico, sociólogo, etc., é o indivíduo responsável pela sondagem do universo real e pela criação da «imagem» do real para posteriores manipulações formais.

Foi um «experimentador» encarregado de formar o conjunto dos objectos reais de cor verde existentes no laboratório e atribuir-lhes um símbolo $(a_1, a_2, \dots)$. Esta instrução simples, aparentemente, tem a dificuldade da definição do que se entende por um objecto de cor verde.

Verde é toda a radiação compreendida entre duas frequências dadas.

Um objecto é verdo se 60% da radiação reflectida cai na banda do verde? e se for só 40% ainda se designa de verde?

Numa lógica vulgar a resolução deste problema envolvia a definição de um conjunto de propriedades $P_1, P_2, \dots, P_k$ e o estabelecimento de um especificador que permitiria formar o conjunto (X_v) dos objectos verdes. Assim

$$X_v = \{ x;\ P_1, P_2, \dots, P_k \}$$

e o conjunto referencial dos objectos do laboratório era dividido em dois sub-conjuntos: os verdes X_v, e os não verdes $\overline{X}_v$.

Outra forma de resolver este problema seria simplesmente pedir ao experimentador que meça a percen-

(*) A expressão «conjuntos vagos» corresponde às expressões «Fuzzy Sets» referida na literatura inglesa e «Ensembles Flous» referida na literatura francesa. Trata-se de um neologismo.

tagem de energia na janela do espectro considerado verde e forneça uma tabela onde a cada objecto se faz corresponder essa percentagem de verde dada pelo aparelho empregado.

O resultado toma a forma seguinte:

$$\{a_1/v_1,\ a_2/v_2,\ \ldots\quad\} = X_v$$

onde: a_i é o símbolo dos objectos do laboratório; v_i é a percentagem de verde de um objecto ($0 \leqslant v_i \leqslant 1$) e X_v será designado o «conjunto vago» dos objectos existentes no conjunto universal do laboratório - U. Feito agora o pedido ao experimentador de formar o conjunto dos objectos «pesados» existentes no mesmo conjunto universal - U o experimentador não terá mais do que munir-se de um instrumento adequado (balança) e proceder à pesagem dos objectos que pertencem a U. O experimentador fornecerá um conjunto X_e especificado da seguinte forma:

$$X_e = \{a_1/e_1,\ a_2/e_2,\ \ldots\}$$

onde e_i é a percentagem do peso do objecto a_i para o peso total do conjunto U.

Novamente, o experimentador não teve que decidir se um objecto se deve considerar «pesado» ou «leve», mas apenas indicar o peso, relegando para a teoria o tratamento de informação colhida.

Uma teoria de conjuntos vagos terá de ser constituída para resolver problemas tais como

$$X_e \cap X_v$$

$$X_e \cup X_v$$

$\overline{X}_e$ (complementar de X_e)

etc., etc.,...

Neste primeiro exemplo não resta dúvida que o problema e a dificuldade foram transferidos do experimentador para o formalista.

Num conjunto vago, a cada um dos pares $\{a/\alpha\}$ dá-se o nome de «caracterizante» e corresponde à tradução de «membership» da literatura inglesa e «appartenance» da literatura francesa.

Ao conjunto de todos os α_i dos elementos a $/\alpha_i$ dá-se o nome de característica do conjunto vago.

Exemplo 2:

Um conjunto U de três caixas (*A*, *B* e *C*) com 100 parafusos cada, é encarado, classicamente, como um conjunto de três elementos $\{a, b, c\} = U$.

Um subconjunto será, por exemplo; {a, b}, ou seja, {1 elemento *a*, 1 elemento *b*, 0 elemento *c*} e a característica do sub-conjunto {a, b} será {1, 1, 0}.

Vejamos agora como descrever o conjunto usual X, constituído por 20 parafusos do tipo *a*, 30 do tipo *b* e zero do tipo *c*.

Este conjunto não tem descrição clássica no referencial $U = \{a, b, c\}$ porque se consideram *a*, *b* e *c* como *atómicos*, isto é, *indivisíveis*.

O processo usual de resolver o problema consiste em construir um conjunto U* formado por 300 elementos, (300 parafusos), susceptíveis estes de se agruparem em 3 classes de equivalência a, b, e c, com 100 elementos cada. O conjunto proposto seria descrito como:

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{20}, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{30}\} = X$$

com

$$\alpha_i \in a$$

$$\beta_i \in b$$

$$X \subseteq U^*$$

Usando o conceito de «conjunto vago» a descrição de X tomava a forma

$$\left\{ a \Big/ \frac{20}{100}\ ,\ b \Big/ \frac{30}{100}\ ,\ c \Big/ \frac{0}{100} \right\} = X$$

ou

$$\{ a/0{,}2\ .\ b/0{,}3\ .\ c/0 \} = X$$

Repare-se que as fracções

$$\frac{20}{100}\ ,\ \frac{30}{100}\ ,\ \text{etc.}$$

podem descrever-se de um modo geral como

$$\frac{\text{card } \{a'\}}{\text{card } \{a\}}$$

onde {a} é, neste caso, o conjunto de parafusos da caixa *A* (100 parafusos) e {a'} é um sub-conjunto de a, neste caso, 20 parafusos. Ora:

$$\text{card } \{a'\} = 20$$

$$\text{card } \{a\} = 100$$

Repare-se que, como $\{a'\} \subseteq \{a\}$ se tivermos:

$$\text{card } \{a'\} \leqslant \text{card } \{a\}$$

e daí que

$$0 \leqslant \frac{\text{card } \{a'\}}{\text{card } \{a\}} \leqslant 1$$

Esta forma de representar o conjunto é menos precisa (mais vaga) do que a anterior, porque não exige a nomeação, ou identificação, dos elementos.

Os resultados também são diferentes quando se opera com estes conjuntos. Com efeito, seja definido outro conjunto

$$Y \subseteq U^*$$

constituído por 5 elementos de *A*, 7 elementos de *B* e 10 elementos de *C*, isto é:

$$Y = \{\alpha_{21}, \ldots \alpha_{25}, \beta_{31}, \ldots \beta_{37}, \gamma_1, \ldots \gamma_{10}\}$$

$$\alpha_i \in a$$
$$\beta_i \in b$$
$$\gamma_i \in c$$

A reunião X U Y será:

$$Z = XUY = \{\alpha_1, \ldots \alpha_{25}, \beta_1, \ldots \beta_{37}, \gamma_1, \ldots \gamma_{10}\}$$

Note-se que houve o cuidado de fazer $X \cap Y = \varnothing$, mas se Y fosse especificado como se segue

$${}_{*}Y = \{\alpha_1, \ldots \alpha_5, \beta_{14}, \ldots \beta_{20}, \gamma_1, \ldots \gamma_{10}\}$$

então a sua reunião com X forneceria o seguinte resultado:

$${}_{*}Z = XU{}_{*}Y = \{\alpha_1, \ldots \alpha_{20}, \beta_1, \ldots \beta_{30}, \gamma_1 \ldots \gamma_{25}\}$$

Desta observação resulta que

$$XUY \neq XU_{*}Y$$

No entanto, se definissemos os «conjuntos vagos» correspondentes a Y e ${}_{*}Y$, teríamos em ambos os casos

$$Y \equiv {}_{*}Y \equiv \{a/0{,}05,\ b/0{,}07,\ c/0{,}10\}$$

logo o processo é *cego* na descrição atómica dos conjuntos Y e ${}_{*}Y$, e daí resulta, antecipando conhecimentos, que

$$X \cup Y = X \cup {}_{*}Y = \{a/0{,}2 ; b/0{,}3 ; c/0{,}1\}$$

expressão que mostra uma aproximação entre os conjuntos vagos e clássicos.

Exemplo 3:

Tem interesso neste exemplo chamar a atenção para o contexto em que é descrito um conjunto vago.

«Um leão atacou e mordeu um homem». Geralmente admite-se que foi definido previamente um *conjunto universal*, assim, neste caso ele poderia ser o seguinte:

$$\text{Conjunto Universal} \quad U = \left\{ \begin{array}{ccc} a & , \ b & , \ c \\ \text{leão} & \text{elefante} & \text{rato} \end{array} \right\}$$

O sub-conjunto vago A de animais de U que atacam o homem pode ser definido deste modo

$$A = \{a/0{,}9;\ b/0{,}7;\ c/0{,}01\}$$

O conjunto vago B dos animais que *usam morder* para atacar

$$B = \{a/0{,}8;\ b/0{,}01;\ c/0{,}8\}$$

o conjunto intersecção $A \cap B$ será dado, antecipando conhecimentos, por:

$$A \cap B = \{a/0{,}8;\ b/0{,}01;\ c/0{,}01\}$$

o que aponta para o leão (a) como o animal culpado do acto.

Exemplo 4:

Neste exemplo vai chamar-se a atenção para as relações entre conjuntos.

Seja, por exemplo, o conjunto usual constituído pelos elementos: cão (a), pato (b), foca (c), pombo (d), e o cojunto de atributos «viver na água» (Ag), «viver na terra» (Te), «viver no ar» (Ar).

Em conjuntos clássicos o modo de descrever a relação entre o conjunto {a, b, c, d} e o conjunto {Ag, Te, Ar} é, por exemplo, o seguinte:

	Ag	Te	Ar
a	0	1	0
b	0	1	0
c	1	0	0
d	0	0	1

se atendermos que as focas e os pombos também vivem em terra, e que o cão também pode nadar, e que o pato não só voa como nada, outra forma de descrever a relação será a seguinte:

	Ag	Te	Ar
a	1	1	0
b	1	1	1
c	1	1	0
d	0	1	1

Qualquer das duas formas de descrever a relação não satisfaz o experimentador encarregado da descrição:

— a primeira é muito restricta

— a segunda é muito lata

Mas se aceitarmos que a percentagem do tempo que, em média, os animais referidos gastam em terra, na água, ou no ar, é uma resposta ao problema então a descrição já pode ser mais consentânea com a realidade:

	Ag	Te	Ar
a	0,01	0,99	0,00
b	0,60	0,30	0,10
c	0,70	0,30	0,00
d	0,00	0,70	0,30

Este exemplo mostra como o conjunto vago, como conceito, descreve melhor o real, em certas situações, do que os conjuntos usuais.

Se se desejar descrever, por exemplo, um conjunto A constituído pelos pares: (a, Ag), (b, Ar), (d, Ag) deverá usar-se a forma seguinte:

$$A = \{\ (a, Ag)/0{,}01;\ (b, Ar)/0{,}10;\ (d, Ag)/0{,}0;\ \text{restantes}/0{,}0\}$$

Exemplo 5:

Este exemplo procura chamar a atenção para o caso do referencial U não ser discreto.

Seja então um registador de som que grava uma fita magnética. O resultado é obtido quanto ao nível sonoro foi indicado na figura A.

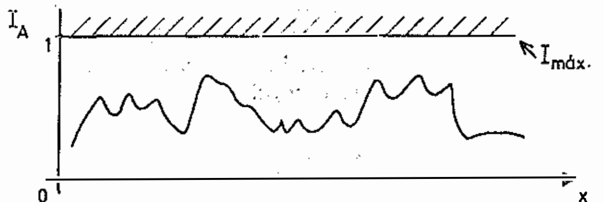


Figura A

Tomou-se nota do valor máximo ($I_{máx}$) que é possível registar na fita.

Desgravando e tornando a gravar outro registo sonoro na mesma fita obtém-se a figura B.

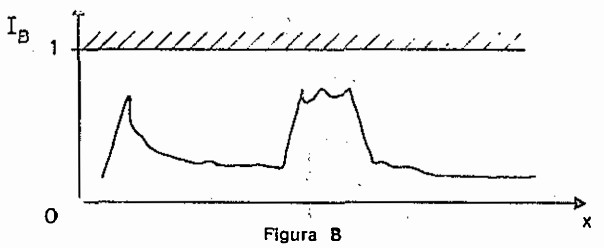


Figura B

Estes dois registos efectuados podem entender-se como a descrição do dois conjuntos vagos A e B definidos sobre o referencial U.

Podem reunir-se, interceptar-se, complementar-se, etc.

Exemplo 6:

Até aqui, nos exemplos apresentados os valores que afectavam os elementos do conjunto referencial U eram sempre colhidos no intervalo [0,1].

Aqui, procura-se fugir a esta regra porque não é forçoso que assim seja.

Vejamos o seguinte problema:

«Falar verdade» será simbolizado por α.

«Falar mentira» será simbolizado por β.

«Falar parcialmente verdade» será simbolizado por γ.

Admite-se que $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$

$\{a, b, c\} = U$ é um conjunto de três pessoas que declararam, cada uma, uma proposição.

O valor do conjunto das três proposições é o conjunto vago X assim descrito:

$$X \equiv \{a/\alpha \, ; b/\gamma \, ; c/\alpha\}$$

Outro conjunto de três proposições foi feito e seja ele representado por Y

$$Y = \{a/\beta \, ; b/\gamma \, ; c/\gamma\}$$

Então, por exemplo, a intersecção será:

$$X \cap Y = \{a/\beta \, ; b/\gamma \, ; c/\gamma\}$$

A creditibilidade da conjunção das proposições $(X \cap Y)$ é efectivamente muito pequena. A não ser *a* que fala uma vez parcialmente verdade no conjunto $(X \cap Y)$, *b* e *c* falam falso e daí a declaração que a conjunção dos dois conjuntos de proposições feitas pelos três indivíduos é «praticamente falsa».

Já a reunião se apresentaria de outra forma:

$$X \cup Y = \{a/\alpha \, ; b/\gamma \, ; c/\alpha\}$$

Pode estabelecer-se um paralelo entre este exemplo e a situação de um exame onde:

Na visão $(X \cap Y)$ o que se procura são os *erros* (falsidades).

Na visão $(X \cup Y)$ o que se procura são as coisas *certas* (verdades).

Os exemplos apresentados mostram que há vasta cópia de situações reais onde se afiguram mais ajustadas as imagens projectadas em «conjuntos vagos» do que em conjuntos vulgares.

Os exemplos apontam para o seguinte esquema de construção dos «conjuntos vagos»:

1. Um conjunto referencial U (conjunto vulgar);
2. Um outro conjunto ordenado Ω onde se projectam as imagens dos elementos de U por meio de:
3. Uma injecção funcional J, ou seja $UJ\Omega$ donde

   $J(x \in U) = (\alpha \in \Omega)$;
4. Cada conjunto vago é descrito por meio de um J que lhe é próprio.

Tem interesse reconhecer U, J, Ω nos vários exemplos apresentados anteriormente:

1.º Exemplo

$U = \{a_1, a_2, \ldots\}$ os objectos do laboratório;

$\Omega = [0,1]$ percentagem de radiação verde;

o conjunto [0,1] é ordenado como se requere para Ω.

Para X_v temos:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = J_v \, (a_1) \\ v_2 = J_v \, (a_2) \end{array}\right\} \text{espectrografo}$$

....

Para X_e temos:

$$\left.\begin{array}{l} e_1 = J_e \, (a_1) \\ e_2 = J_e \, (a_2) \end{array}\right\} \text{balança}$$

....

2.º Exemplo

$U = \{a, b, c\}$ caixas de 100 parafusos

$$\Omega = \left\{ \frac{0}{100}, \frac{1}{100}, \ldots, \frac{100}{100} \right\}$$

percentagem de parafusos tomados.

Para X temos:

$$0{,}2 = J_x \, (a)$$
$$0{,}3 = J_x \, (b)$$
$$0{,}0 = J_x \, (c)$$

para Y temos: $0{,}05 = J_y(a)$

$0{,}07 = J_y(b)$

$0{,}10 = J_y(c)$

3.° Exemplo

$U = \{a, b, c\}$

$\Omega = [0{,}1]$

Para A temos: $0{,}9 = J_A(a)$

$0{,}7 = J_A(b)$

$0{,}01 = J_A(c)$

Para B temos: $0{,}8 = J_B(a)$

$0{,}01 = J_B(b)$

$0{,}01 = J_B(c)$

Para $A \cap B$ temos: $0{,}8 = J_{A\cap B}(a)$

$0{,}01 = J_{A\cap B}(b)$

$0{,}01 = J_{A\cap B}(c)$

O animal *a* (leão) é o que toma maior relevo porque tem a dupla propriedade de «atacar o homem» e de «morder».

4.° Exemplo

O conjunto universal U é *o* produto cartesiano de {a, b, c, d} e {Ag, Te, Ar} ou seja:

(a, Ag), (a, To), (a, Ar)

(b, Ag), (b, Te), (b, Ar)

(c, Ag), (c, Te), (c, Ar)

(d, Ag), (d, Te), (d, Ar)

Assim, Card $(U) = 4 \times 3 = 12$

$\Omega = [0{,}1]$ é o conjunto onde se projectam as imagens.

5.° Exemplo

As funções

$$I_A = I_A(x)$$
$$I_B = I_B(x)$$

com $I \in [0{,}1]$, são as funções que caracterizam respectivamente os conjuntos A e B.

6.° Exemplo

O conjunto universal é

$$U = \{a, b, c\}$$
$$\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma\} \qquad (\alpha \geqq \beta \geqq \gamma)$$

isto é, Ω é um conjunto ordenado por $\geqslant$, significando

$$J(M) \geqq J(N)$$

que *M* falou mais verdade do que *N*

$$J_x \Rightarrow \begin{cases} J_x(a) = \alpha \\ J_x(b) = \gamma \\ J_x(c) = \alpha \end{cases} \qquad J_y \Rightarrow \begin{cases} J_y(a) = \beta \\ J_y(b) = \gamma \\ J_y(c) = \gamma \end{cases}$$

2.° CAPÍTULO

CONJUNTOS VAGOS; SUA FORMALIZAÇÃO

2.1 — INTRODUÇÃO

Os «conjuntos vagos» constituem uma extensão ao conceito de «conjunto».

Ao expor-se a teoria dos «conjuntos vagos» supõem-se esclarecidos os seguintes temas:

— A Teoria dos Conjuntos (vulgares), bem como as teorias e conceitos dela decorrentes;

— Os motivos semanticos que conduziram à necessidade de estender o conceito de conjunto vulgar foram já expostos no Cap. I;

— A teoria dos conjuntos vagos deve incluir como caso particular a teoria dos conjuntos vulgares.

2.2 — SIMBOLOGIA

a) Quanto à simbologia oferece-se uma alternativa:

ou os conjuntos vagos vêem afectados de um indicativo os símbolos que os representam, como por exemplo, em vez de A, B, X teríamos $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$, $\underset{\sim}{X}$ para significar que os conjuntos A, B, X são vagos;
ou se faz o inverso, os símbolos dos conjuntos que não são vagos, por se tratarem de conjuntos vulgares, vêem os símbolos respectivos afectados de um indicativo, como, por exemplo, $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{X}$.

Porque o conjunto vulgar é um caso particular de conjunto vago, as expressões e fórmulas aplicáveis a conjuntos vagos também são verdadeiras para conjuntos vulgares, e daí que se uma preposição ou frase só for válida para conjuntos vulgares se anotará esse facto sublinhando com um traço os símbolos respectivos.

b) Quanto a símbolos usaremos os seguintes:

Símbolos latinos:

Letras maiúsculas para representar referênciais (conjuntos referenciais) e dum modo geral conjuntos que podem ser indistintamente vagos ou vulgares;

Letras minúsculas para representar elementos de conjuntos (os elementos nunca são sublinhados porque não são conjuntos).

Símbolos gregos:

Letras maiúsculas simbolizam referenciais ou conjuntos vulgares apenas;

Letras minúsculas simbolizam elementos.

Símbolos góticos:

Segue-se um procedimento idêntico ao dos símbolos gregos.

Em geral, a diferença entre letras góticas e gregas está no seguinte:

Letras *gregas* servem para descrever simbolicamente *reticulados* e seus elementos.

Letras *góticas* para representar conjuntos referenciais (vulgares) e seus elementos.

Finalmente, usar-se-ão mas raramente os símbolos colocados inferiormente (~) e (—) para significar *expressamente* que certa letra representa um conjunto vago ou vulgar (como por exemplo $\underline{A}$ ou $\underset{\sim}{A}$).

2.3 — DEFINIÇÃO DE CONJUNTO VAGO

Sejam dados:

— Um conjunto-referencial, não vazio, $\mathfrak{U}$. Este conjunto é *vulgar*.

— Um reticulado (vulgar) $\{\Omega, \Delta, \nabla\}$ onde Ω é um conjunto vulgar com dois ou mais elementos e Δ, ∇, são duas operações internas, fechadas, comutativas, associativas, existindo e sendo únicos um supremo e um ínfimo, idempotentes e absorventes. (Veja-se anexo 2).
Podem ainda gozar de mais propriedades nomeadamente: complementaridade e distributividade, e aplicarem-se os teoremas de Morgan.

— O conjunto Γ das aplicações (funcionais) de $\mathfrak{U}$ em Ω, isto é, $\Gamma \equiv \Omega^{\mathfrak{U}}$. A cada aplicação $\Gamma \in \Gamma$, dá-se o nome de «caracterizante» ou «função de aparentamento» ou ainda «função de pertença».

— Define-se «Sub-conjunto Vago» A do referencial $\mathfrak{U}$, ao grafo Γ_A duma aplicação funcional de $\mathfrak{U}$ em Ω.

Assim teremos:

$\Gamma_A \in \Gamma$ • também $\Gamma_A \in \mathfrak{U} \times \Omega$ e se $\alpha_i = \Gamma_A(u_i)$

onde: $\begin{cases} u_i \in \mathfrak{U} \\ \alpha_i \in \Omega \end{cases}$ e $i \in \{1, \ldots, \text{Card}\,\mathfrak{U}\}$

então:

$$\Gamma_A = [u_1/\alpha_1;\ u_2/\alpha_2;\ \ldots\ldots]$$

Γ_A será o *caracterizante do conjunto vago A*.

A *função semântica* do caracterizante é fazer corresponder a cada elemento $u_i \in \mathfrak{U}$ um (e só um) elemento $\alpha_i \in \Omega$.

Deste modo toda a informação a respeito de A está contida em Γ_A, e daí a designação de caracterizante.

O modo de escrever frases com os símbolos operatórios definidos no reticulado Ω é do conhecimento e âmbito da Teoria de conjuntos e é recordado no *Anexo 2*.

Aqui limita-se a uma apresentação de algumas expressões, a título de exemplo:

$\nabla\ (\alpha, \beta)$ também se escreve $\alpha \nabla \beta$

$\nabla(\alpha, (\beta \nabla \gamma))$ também se escreve $\nabla(\alpha, \beta, \alpha)$ ou $\alpha \nabla \beta \nabla \alpha$

Quanto ao símbolo Δ procede-se dum método idêntico.

As propriedades das operações ∇, Δ bem como d'outras $\dot{\psi}$ ou $\dot{\varphi}$ encontram-se revistas no referido Anexo 2.

2.4 — DEFINIÇÃO DE ALGUNS SÍMBOLOS

Pertencer $(\in)$

Se for A um sub-conjunto de $\mathfrak{U}$ e Γ_A o respectivo caracterizante e se u_i for um elemento de $\mathfrak{U}$ então: $u_i \in A$ se e só se $\Gamma_A(u_i) \neq 0$, caso contrário u não pertence a A e escrever-se-á $u_i \notin A$.

Estar Contido $(\subset)$ ou $(\subseteq)$

Sejam dados dois sub-conjuntos A e B de $\mathfrak{U}$; o sub-conjunto A *está contido* no sub-conjunto B e escreve-se $A \subset B$ se:

$$\forall u_i \in \mathfrak{U} \ : \ [\Gamma_A(u_i) \nabla \Gamma_B(u_i) = \Gamma_B(u_i)] \wedge$$
$$\wedge [\Gamma_A(u_i) \Delta \Gamma_B(u_i) = \Gamma_A(u_i)]$$

Uma forma mais fraca poderá ser definida e simbolizada por $A \subseteq B$ quando for:

$$\forall u_i \in \mathfrak{U} : [\Gamma_A(u_i) \nabla \Gamma_B(u_i) = \Gamma_B(u_i)] \vee$$
$$\vee [\Gamma_A(u_i) \Delta \Gamma_B(u_i) = \Gamma_A(u_i)]$$

Finalmente é fácil de ver que $A \subset \mathfrak{U}$ e $A \subseteq \mathfrak{U}$.

Igualdade $(=)$

$A = B$ dizem-se conjuntos iguais se $\forall u_i \in \mathfrak{U}$ for

NOTA: em francês diz-se «appartenance» e na literatura inglesa «member Slip».

NOTA: Para reduzir a extensão da expressão «Sub-conjunto Vago», diz-se «Conjunto Vago» ou «C. Vago» ou até «Conjunto» se tal não introduzir ambiguidade.

$$r_A\ (u_i) = r_B\ (u_i).$$

Conjunto Vazio ($\varnothing$)

O conjunto definido como segue:
$\forall u_i \in \mathcal{U}$: $r(u_i) = 0$, onde 0 é elemento ínfimo de Ω, diz-se *conjunto vazio* e simboliza-se por $\varnothing$.

União (U)

O conjunto C=A U B define-se como segue:

$$r_C = r_{AUB} = r_A \triangledown r_B$$

onde: A, B, C $\subset \mathcal{U}$

r_A, r_B e r_C os respectivos caracterizantes.

Intersecção ($\cap$)

Dum modo idêntico:

$$C = A \cap B \quad \text{se} \quad r_C = r_{A\cap B} = r_A \vartriangle r_B$$

2.5 — PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES U e ∩

As principais propriedades são:

a) *Fechadas e unicidade*

$$\forall\ A \text{ e } B \subset \mathcal{U}: \begin{cases} AUB = C \subseteq \mathcal{U} \\ A\cap B = D \subseteq \mathcal{U} \end{cases}$$

C e D são únicos.

b) *Comutativas:*

$$A \text{ e } B \subseteq \mathcal{U} \text{ será } \begin{cases} AUB = BUA \\ A\cap B = B\cap A \end{cases}$$

c) *Associativas:*

$$\forall\ A, B \text{ e } C \subseteq \mathcal{U} \quad \text{será} \begin{cases} AU(BUC) = (AUB)UC \\ A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C \end{cases}$$

d) Operações com os *conjuntos* $\mathcal{U}$ e $\varnothing$:

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{U}\cap A = A \\ \mathcal{U} UA = \mathcal{U} \end{Bmatrix}, \ \forall\ A \subseteq \mathcal{U}$$

$$\begin{Bmatrix} \varnothing\cap A = \varnothing \\ \varnothing UA = A \end{Bmatrix}, \ \forall A \subseteq \mathcal{U}$$

e) *Idempotência:*

$$\forall A \subseteq \mathcal{U}: \begin{cases} AUA = A \\ A\cap A = A \end{cases}$$

f) *Absorventes:*

$$\forall\ A \text{ e } B \subseteq \mathcal{U}: \begin{cases} A\cap(AUB) = A \\ AU(A\cap B) = A \end{cases}$$

As propriedades a) a f) dos operadores U e ∩ resultam directamente das propriedades correspondentes de r_A e $r_B \in \Omega$; reticulado onde as operações internas $\triangledown$ e $\vartriangle$ nele definidas têem propriedades equivalentes:

$\triangledown$ e $\vartriangle$ são operações fechadas, únicas, comutativas, associativas, os elementos O e V existem e são únicos e têm propriedades correspondentes a $\varnothing$ e $\mathcal{U}$, idempotência e absorventes.

g) *Distributividade:*

Se o reticulado (Ω, $\triangledown$, $\vartriangle$) for *distributivo*, pode ainda ser:

$$\forall\ A, B \text{ e } C \subseteq \mathcal{U}: \begin{cases} AU(B\cap C) = (AUB)\cap(AUC) \\ A\cap(BUC) = (A\cap B)\ U\ (A\cap C) \end{cases}$$

Resulta directamente da distributividade do reticulado.

h) *Complementariedade:*

Se o reticulado (Ω, $\triangledown$, $\vartriangle$) for complementarizado, pode fazer-se $\forall$ A $\subseteq \mathcal{U}$ corresponder a um outro conjunto B $\subseteq \mathcal{U}$ tal que:

$$(AUB = \mathcal{U}) \wedge (A \cap B = \varnothing)$$

e B é *único* e represnta-se por $\overline{A}$. Com efeito: Se $r_A = \alpha$

e $r_B = \overline{\alpha}$ $\quad r_{(AUB)} = r_A \triangledown r_B = \alpha \triangledown \overline{\alpha} = V = r_u$

$$r_{(A\cap B)} = r_A \vartriangle r_B = \alpha \vartriangle \overline{\alpha} = 0 = r_\varnothing$$

Donde $AUB = \mathcal{U}$ $\quad$ onde $B = \overline{A}$
$A\cap B = \varnothing$

Porque $(\overline{\overline{\alpha}}) = \alpha$ $\qquad \overline{B} = (\overline{\overline{A}})$

2.6 — CONJUNTOS VULGARES

Convém provar que é possível definir um conjunto vulgar usando o formalismo dos c. vagos.

Seja dado o reticulado de Bool (ver anexo 2): ({0,1}, $\Uparrow$, $\Downarrow$) o conjunto de Bool só tem dois elementos 0 e 1 ou seja O e V.

Os operadores $\Uparrow$ $\Downarrow$ têem as propriedades usuais deste tipo de reticulados; nomeadamente:

$$\Downarrow(0,0) = 0 \qquad \Uparrow(0,0) = 0$$
$$\Downarrow(0,1) = 1 \qquad \Uparrow(0,1) = 0$$
$$\Downarrow(1,0) = 1 \quad \text{e} \quad \Uparrow(1,0) = 0$$
$$\Downarrow(1,1) = 1 \qquad \Uparrow(1,1) = 1$$

o reticulado de Bool é *complementado* e $\begin{cases} \overline{0} = 1 \\ \overline{1} = 0 \end{cases}$

e *distributivo*, por exemplo:

$0 \vee (1 \wedge 0) = (0 \vee 1) \wedge (0 \vee 0) = 1 \wedge 0 = 0$

Qualquer conjunto vulgar $\underline{A} \subseteq \mathcal{U}$ tem por caracterizante $\Gamma_{\underline{A}}$ que toma valores em $\{0,1\}$ e é usual fazer a seguinte correspondência: Se

$$\begin{cases} (x \in \underline{A}) \longleftrightarrow \Gamma_{\underline{A}}(x) = 1 \\ (x \notin \underline{A}) \longleftrightarrow \Gamma_{\underline{A}}(x) = 0 \end{cases}$$

ora esta regra é a usada para construir a «indicatriz» dum conjunto vulgar $\underline{A} \subseteq \mathcal{U}$.

O caracterizante dum conjunto $\underline{A}$ que usa o reticulado de Bool é afinal a *indicatriz* do conjunto A vulgar.

Assim os conjuntos vulgares são um caso particular dos conjuntos vagos.

2.7 — RETICULADOS ZADEH

Os conjuntos vagos podem ser descritos em variados reticulados mas o reticulado onde $\Omega = [0,1]$ e os operadores são ψ e $\pitchfork$ (máximo de... e mínimo de...) é tão fundamental na teoria dos conjuntos vagos que convém reproduzir os principais resultados.

Reticulado de Zadeh $([0,1], \psi, \pitchfork)$ tem as propriedades descritas no anexo 2, e que se recapitulam:

- — Operações são fechadas e únicas;
- — Comutativas;
- — Associativas;
- — O supremo é 1 e o ínfimo é 0;
- — Idempotente;
- — Absorvente;
- — Pseudo complementado.

Os conjuntos vagos do referencial $\mathcal{U}$ construídos com um reticulado de Zadeh como conjunto onde os caracterizantes tomam valores, gozam das seguintes propriedades:

Se A, B e $C \subseteq \mathcal{U}$ então, os operadores $\cap$ e $\cup$ têm as seguintes propriedades:

1) $A \cap B = C \subseteq \mathcal{U}$ — *fechada*
$A \cup B = C' \subseteq \mathcal{U}$ — C e C' são únicos.

2) $A \cap B = B \cap A$ — *Comutatividade*
$A \cup B = B \cup A$

3) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ — *Associatividade*
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

4) $A \cup A = A$ — *Idempotência*
$A \cap A = A$

5) Operações com $\varnothing$ e $\mathcal{U}$:

$$\begin{cases} \varnothing \cup A = A \\ \varnothing \cap A = \varnothing \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathcal{U} \cup A = \mathcal{U} \\ \mathcal{U} \cap A = A \end{cases}$$

6) *Destributividade*

$$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$$

Convém mostrar que assim é,

$\Gamma_{(B \cap C)} = \Gamma_B \pitchfork \Gamma_C$ e $\Gamma_{A \cup (B \cap C)} = \Gamma_A \psi (\Gamma_B \pitchfork \Gamma_C)$

$\Gamma_{(A \cup B)} = \Gamma_A \psi \Gamma_B$

$\Gamma_{(A \cup C)} = \Gamma_A \psi \Gamma_C$

mas $\Gamma_A \psi (\Gamma_B \pitchfork \Gamma_C) = (\Gamma_A \psi \Gamma_B) \pitchfork (\Gamma_A \psi \Gamma_C)$

7) *Pseudo-Complementado*

$(\bar{\bar{A}}) = A \quad \Gamma_{\bar{A}} = 1 - \Gamma_A$ donde $\Gamma_{(\bar{\bar{A}})} = 1 - (1 - \Gamma_A) = \Gamma_A$

8) *Teoremas de Morgan*

$$\begin{cases} \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \\ \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \end{cases}$$

também é fácil de verificar que estes teoremas se aplicam.

Tem interesse ainda apresentar dois operadores $(\pm)$ e $(\dot{-})$, soma disjuntiva e producto que têem aplicação frequente nestes conjuntos vagos que empregam na sua definição o conjunto reticulado de Zadeh.

$$A \pm B \Rightarrow \Gamma_A \pm \Gamma_B = \Gamma_A + \Gamma_B - \Gamma_A \cdot \Gamma_B$$

onde + é o símbolo de soma vulgar, e $\bullet$ é o símbolo do producto vulgar.

$$A \dot{-} B \Rightarrow \Gamma_A \dot{-} \Gamma_B = \Gamma_A \cdot \Gamma_B \text{ (producto vulgar)}$$

é fácil de ver que;
são operações *fechadas* e *únicas*.

$$\left.\begin{matrix} A \pm B = B \pm A \\ A \dot{-} B = B \dot{-} A \end{matrix}\right\} \text{— Comutativas}$$

$$\left.\begin{matrix} A \pm (B \pm C) = (A \pm B) \pm C \\ A \dot{-} (B \dot{-} C) = (A \dot{-} B) \dot{-} C \end{matrix}\right\} \text{— Associativas}$$

$$\begin{cases} A \pm \varnothing = A \text{ isto é, } \varnothing \text{ é o elemento neutro } (\pm). \\ A \dot{-} \varnothing = \varnothing \text{ isto é, } \varnothing \text{ é absorvente de } (\dot{-}). \end{cases}$$

$$\begin{cases} A \pm \mathcal{U} = \mathcal{U} \\ A \dot{-} \mathcal{U} = A \end{cases}$$

$(\bar{\bar{A}}) = A$ involução.

$$\begin{cases} \overline{A \dot{-} B} = \bar{A} \pm \bar{B} \\ \overline{A \pm B} = \bar{A} \dot{-} \bar{B} \end{cases} > \text{Teoremas de Morgan}$$

ε.º CAPÍTULO

DESENVOLVIMENTO DA TEORIA DOS SUB-CONJUNTOS VAGOS

3.1 — CONCEITO DE DISTÂNCIA ENTRE CONJUNTOS

a) seja dado um referencial $\mathcal{U}$, um reticulado $(\Omega, \vee, \Delta)$, o conjunto das aplicações funcionais de $\mathcal{U}$ em $\Omega\ \Gamma \equiv \Omega^{\mathcal{U}}$ e dois conjuntos vagos A e $B \subseteq \mathcal{U}$ cujos caracterizantes são Γ_A e $\Gamma_B \in \Omega^{\mathcal{U}}$.

Para definir uma distância D entre A e B é necessário que D satisfaça aos seguintes requisitos:

$$D(\Gamma_A, \Gamma_B) \in R^+$$

1) $D(\Gamma_A, \Gamma_B) \geqslant 0$

2) $D(\Gamma_A, \Gamma_B) = D(\Gamma_B, \Gamma_A)$

3) $D(\Gamma_A, \Gamma_B) = 0 \Longleftrightarrow \Gamma_A = \Gamma_B$

b) *Distância normalizada a 1*

É possível a partir de D definir uma outra distância d normalizada a 1.

Para tanto defina-se $\underline{\overline{D}}$ da forma seguinte:

$$\underline{\overline{D}} = \underset{x \in \mathcal{U}}{\text{Max.}}\ D(\Gamma_A(x), \Gamma_B(x))$$

então:

$$d(\Gamma_A, \Gamma_B) = \frac{D(\Gamma_A, \Gamma_B)}{\underline{\overline{D}}}$$

c) *Distância normalizada a 1 numa classe de conjuntos*

Seja dada a classe C de conjuntos

$$C = \{A_1, A_2 \dots An\},\ \forall_i\ A_i \subseteq \mathcal{U}$$

Seja $\underline{\overline{D}}_{ij} = \underset{x \in \mathcal{U}}{\text{Máx.}}\ (A_i, A_j)$

e $\underline{\overline{\delta}} = \underset{ij}{\text{Máx}}\ \underline{\overline{D}}_{ij}$

então

$$\delta(\Gamma_A, \Gamma_B) = \frac{D(\Gamma_A, \Gamma_B)}{\underline{\overline{\delta}}}$$

d) *Forma genérica de definir uma distância*

Seja $\Delta(x)$ uma distância eventualmente normalizada a 1 e definida em relação a $\Gamma_A(x)$ e $\Gamma_B(x)$ isto é

$$\Delta(x) = \Delta(\Gamma_A(x), \Gamma_B(x)) \qquad x \in \mathcal{U}$$

$$\Delta_{AB} = \frac{1}{\text{Card}\ \mathcal{U}} \sum_{x \in \mathcal{U}} \Delta(x) \qquad \text{para Card } \mathcal{U} \text{ finito}$$

É fácil de ver que sa $\Delta(x)$ for uma distância normalizada a 1, Δ_{AB} será igualmente uma distância normalizada a 1.

Se Card $\mathcal{U}$ for contínuo pode igualmente definir-se uma distância porém *não normalizável*, da forma seguinte:

$$\Delta_{AB} = \int_{x \in \mathcal{U}} \Delta(x)\,.\,dx$$

Identicamente para Card $\mathcal{U} = \infty$, pode definir-se

$$\Delta_{AB} = \sum_{x \in \mathcal{U}} \Delta x$$

e) *Distância entre famílias de Conjuntos Vagos*

Seja $\mathcal{U}$ uma família de θ (finito) conjuntos $\mathcal{U}_i$.

A cada conjunto $\mathcal{U}_i$, corresponderá o seu reticulado $(\Omega_i \vee, \Delta)$, em geral distinto, e respectivo conjunto de aplicações funcionais $\Gamma_i \equiv \Omega_i^{\mathcal{U}_i}$.

Defina-se em cada $\mathcal{U}_i$ uma distância eventualmente normalizada a 1, Δ_i.

Sejam A e $B \subseteq \mathcal{U}$ duas famílias de conjuntos onde:

$$\forall_i\ A_i \subseteq \mathcal{U}_i \quad \text{e} \quad \forall_i\ B_i \subseteq \mathcal{U}_i$$

$$\Delta_{A,B} = \Delta\ \{A_1, A_2 \dots\},\ \{B_1, B_2 \dots\} =$$

$$= \frac{1}{\theta} \sum_i \Delta\ A_i\ B_i \qquad \theta = \text{Card}\ \mathcal{U}$$

Se θ for infinito, ou $\mathcal{U}$ um contínuo, poderá definir-se respectivamente:

$$\int \Delta_{A_i B_i}(x)dx \quad \text{e} \quad \sum_i \Delta_{A_i B_i}$$

f) *Alguns exemplos de distâncias*

Distância de Hamming, aplica-se a um reticulado de Zadeh $\equiv ([0,1], \psi\ \phi)$.

$$\Delta(x) = \left| \Gamma_A(x) - \Gamma_B(x) \right|$$

e $$\Delta_{AB} = \frac{\sum_{x \in \mathcal{U}} \Delta(x)}{\text{Card}\ \mathcal{U}} \qquad \text{Card } \mathcal{U} \text{ finito}$$

é fácil de verificar que se trata duma distância normalizada a 1.

Também se definem distâncias de Hamming não normalizadas pela expressão:

$$\Delta_{AB} = \sum_{x \in \mathcal{U}} \Delta(x)$$

e no caso de $\mathcal{U}$ ser contínuo será:

$$\Delta_{AB} = \int_{x \in \mathcal{U}} \Delta(x) \bullet dx$$

que não é uma distância normalizada.

Distância quadrática

Igualmente definida no reticulado de Zadeh

$$D(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i) \right)^2}$$

$$\text{e} \quad \Delta(A\,B) = \frac{D(A, B)}{\sqrt{n}}$$

no contínuo

$$D(A, B) = \sqrt{\int_{x \in \mathcal{U}} \left(\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i) \right)^2 dx}$$

É fácil de provar, aplicação directa, que todas as distâncias apresentadas satisfazem às condições que permitem declará-las como tal.

3.2) *Conjuntos vulgares de nível α*

Este conceito aplica-se a Conjuntos Vagos cujo reticulado é o de Zadeh. Sendo dado um conjunto vago A, define-se conjunto vulgar de nível α, e simboliza-se $\underline{A}_{\alpha}$, o conjunto cujos elementos $x \in U$ satisfazem a seguinte regra:

$$x \in \underline{A}_{\alpha} \text{ se } \mu_A(x) \geqslant \alpha \in [0,1]$$

ou lançando mão de indicatriz de $A\alpha$ será

$$\begin{cases} \mu_{\underline{A}_\alpha}(x) = 1 & \text{se } \mu_A(x) \leqslant \alpha \\ \mu_{\underline{A}_\alpha}(x) = 0 & \text{se } \mu_A(x) \leqslant \alpha \end{cases}$$

Quando $\alpha = 0{,}5$, diz-se de $A_{0,5}$ que é o conjunto vulgar «*mais próximo*» do conjunto vago A.

3.3) *Índice de Vago*

O conceito de «Conjunto Vulgar mais próximo» permite introduzir a noção de *índice vago* para medir a «*distância*» do *conjunto vago* ao *conjunto vulgar mais próximo*.

Assim, o índice de vago pode ter as seguintes definições:

$$n = \text{Card}\,\mathcal{U} \begin{cases} I(A) = \dfrac{2}{n}\, d(A, A_{0,50}) & \text{Hamming} \\ I^*(A) = \dfrac{2}{\sqrt{n}}\, d(A, A_{0,50}) & \text{Quadrática} \end{cases}$$

$$N = \text{Card}\,(A \times \bar{A}) \quad I^{\#}(A) = \frac{4}{N} \sum_{i=1}^{N} \mu_{A \times \bar{A}}(x_i)$$

Admite-se que o reticulado é de Zadeh mas podem definir-se índices semelhantes imaginados para outros reticulados.

3.4) *Decomposição e recomposição*

Decomposição de um conjunto vago:

Seja dado um conjunto vago A, cujo caracterizante é $\mu_A(x) \in \Omega^{\mathcal{U}}$, $x \in \mathcal{U}$ e $\text{Card}\,\mathcal{U} = n$ (finito). Seja, dum modo geral, $\underline{A}_{\alpha_i}$ o conjunto vulgar de nível α_i e $\alpha_i = \mu_A(x_i)$ com $x_i \subseteq \mathcal{U}$. Os conjuntos vulgares de níveis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ representam a decomposição do conjunto vago A, nomeadamente $\underline{A}\alpha_1, \underline{A}\alpha_2, \ldots \underline{A}\alpha_n$.

A operação inversa designa-se de *recomposição* ou *composição*.

Para o efeito faça-se:

$$\forall x_i \in \mathcal{U} \rightarrow \mu_A(x_i) = \alpha_i \; \mu_{\underline{A}_{\alpha_i}}(x_x)$$

onde:

$$\mu_{\underline{A}_{\alpha_i}}(x_g) \triangledown \mu_{\underline{A}_{\alpha_i}}(x_K) = \mu_{\underline{A}_{\alpha_i}}(x_g)$$

$$\forall x_k \in \mathcal{U}$$

Na verdade, para $\alpha \neq 0$ $\mu_{\underline{A}_{\alpha_i}}$ tem pelo menos um elemento igual a 1, pois trata-se de um conjunto vulgar obtido de A e de nível α.

3.5) *Conjuntos vagos potentes (ou das partes)*

Sejam os conjuntos:

referencial $\mathcal{U}$

reticulado $(\Omega, \triangledown, \Delta)$

O conjunto das partes de $\mathcal{U}$, simbolizado $P(\mathcal{U})$, tem $2^{\text{Card}\,\mathcal{U}}$ elementos.

A generalização para conjuntos vagos introduz o Card Ω, que, em geral, é maior ou igual a 2 e teremos:

$$(\text{Card}\,\Omega)^{\text{Card}\,\mathcal{U}} = \text{Card}\,P(\mathcal{U})$$

$P(\mathcal{U})$ poderá ser simbolizado também desta forma: $\Omega^{\mathcal{U}}$ e então $\text{Card}\,\Omega^{\mathcal{U}} = (\text{Card}\,\Omega)^{\text{Card}.\mathcal{U}}$.

As propriedades do reticulado $(\Omega, \triangledown, \Delta)$ induzem propriedades em $\Omega^{\mathcal{U}}$. Seja então dado o reticulado $(\Omega, \triangledown, \Delta)$

e os conjuntos vagos C, A, B, D $\subseteq \mathcal{U}$ (ou C, A, B, D $\in \Omega^{\mathcal{U}}$).

Ora o reticulado (Ω, ∇, Δ) permitiu introduzir as operações U e ∩ (e eventualmente—) de forma que:

$$\left.\begin{array}{l} A \cup B = C \\ A \cap B = D \end{array}\right. \text{ onde } C \text{ e } D \subset \mathcal{U}$$

então; duas operações internas foram definidas em $\Omega^{\mathcal{U}}$

$$(\Omega^{\mathcal{U}}, \cap, \cup)$$

e se A, B, forem elementos de $\Omega^{\mathcal{U}}$, então teremos:

$$A \cup B = C \in \Omega^{\mathcal{U}}$$
$$A \cup B = D \in \Omega^{\mathcal{U}}$$

é fácil de ver que essas operações U e ∩ são:

Fechadas e únicas.

Associativas;

Comutativas;

Idempotentes;

etc, etc.

Pode dizer-se que as operações ∇ e Δ definidas em Ω *induziram* as operações U e ∩ em $\Omega^{\mathcal{U}}$

4.° CAPÍTULO

RELAÇÕES VAGAS

4.1 — INTRODUÇÃO

As relações usuais entre dois conjuntos referenciais dados $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$, definem-se por meio dum conjunto $R \subseteq \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$. A extensão deste conceito a *Relações Vagas* é imediato e basta definir um reticulado (Ω, ∇, Δ) e aplicar (funcionalmente) o conjunto $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ em Ω. Se simbolizarmos por $\mathbf{J}$ o conjunto de todas as aplicações (funcionais) de $\mathcal{U}$ em Ω, uma dada relação vaga RA será descrita como um conjunto vago de $\mathcal{U}$ cujo caracteritante é J_A (u) onde

$$\begin{cases} u \in \mathcal{U} \\ J_A(u) \in \Omega \end{cases}$$

o conjunto vago A será designado como o *grafo* da relação vaga R_A.

A simbologia que será adoptada é a seguinte:

J — Símbolo geral dos caracterizantes dos grafos das Relações;

R — Símbolo das relações;

A,B ... P, Q etc. — símbolos que especificam a relação ou o caracterizante, e simultaneamente é símbolo do grafo da relação.

A generalização deste conceito a productos cartesianos de mais de dois conjuntos é imidiata, basta para efeito definir

$$\mathcal{U} = \mathop{\times}_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i$$

e $\mathbf{J}$ será o conjunto (ou família) de todas as aplicações de $\mathcal{U}$ em Ω sendo Ω um reticulado.

4.2 — DEFINIÇÕES DE TERMOS RELACIONADOS COM AS RELAÇÕES VAGAS.

a) *1.ª Projecção duma relação $J_A(x, y)$* com $x \in \mathcal{U}_1$, $y \in \mathcal{U}_2$ e $J_A \in \mathbf{J}$ onde $\mathbf{J}$ é a família das aplicações de $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ em Ω e Ω é um reticulado (Ω, ∇, Δ).

$$J_A^1(x) = \mathop{\nabla}_{y} J_A(x, y)$$

significando $\mathop{\nabla}_{y}$ a aplicação da operação ∇, definida no reticulado, e estendida a todos $J_A(x, y)$ para um dado x, isto é, estendida a todos os pares que de comum tenham o mesmo x.

b) *2.ª Projecção duma relação $J_A(x, y)$.*

Nas condições referidas em a) será dada por:

$$J_A^1(y) = \mathop{\nabla}_{x} J_A(x, y)$$

c) *2.ª Projecção da 1.ª projecção*

Será, identicamente definida como sendo:

$$J_A^{12} = \mathop{\nabla}_{x} \mathop{\nabla}_{y} J_A(x, y)$$

d) *1.ª Projecção da 2.ª projecção*

Será definida de forma semelhante:

$$J_A^{21} = \mathop{\nabla}_{y} \mathop{\nabla}_{x} J_A(x, y)$$

Porque as operações ∇ são comutativas, será:

$$J_A^{21} = J_A^{12}$$

e) *Suporte de uma Relação Vaga R_A*

É o *conjunto vulgar* $\underline{A}$ cujo caracterizante

$$\begin{cases} J_{\underline{A}} = 1 \text{ se } J_A > 0 \\ J_{\underline{A}} = 0 \text{ se } J_A = 0 \end{cases}$$

f) *Relação Inversa*

Sejam dados: dois conjuntos universais X e Y e formam-se os productos cartesianos:

$$\mathcal{U} = Y \times X$$
$$\mathcal{U}^{-1} = X \times Y$$

e dois sub-conjuntos vagos, $A \subseteq \mathcal{U}$ e $B \subseteq \mathcal{U}^{-1}$, cujos caracterizantes respectivos são:

$$J_A \ (x,y) \in \Omega \qquad e \qquad \begin{cases} x \in X \\ y \in Y \end{cases}$$
$$J_B \ (y,x) \in \Omega$$

RB é a *relação inversa* de R_A se $J_B(y, x) = J_A(x, y)$,

para $\begin{cases} \forall \ x \in X \\ \forall \ y \in Y \end{cases}$ simboliza-se R_B por R_A^{-1}.

É fácil de verificar que a matriz $[J_B] = [J_A]^t$ e pode simbolizar-se este facto escrevendo $B = A^t$ porque

$$[J_B]^t = \{[J_A]^t\}^t = [J_A]$$

em virtude da dupla transposição das matrizes. Reproduzir a matriz de partida, será $(R_A^{-1})^{-1} = R_A$, isto é, a inversão goza de propriedade de *involução.*

Para tornar a simbologia mais leve faremos a seguinte correspondência de símbolos.

$$[J_A]^t \longleftrightarrow J_A^t$$

assim:

$$\{[J_A]^t\}^t \longleftrightarrow J_{[A^t]}{}^t$$

g) Introdução dos símbolos ($\subset$ U, $\cap$ —).

Uma vez feito o paralelo das Relações Vagas com o conceito dos conjuntos vagos todos os símbolos aplicáveis a estes, entendem-se mutatis mutandis àqueles.

O objectivo aqui é apenas recordar algumas fórmulas:

— Continência ($\subset$):

$$\text{Seja } \mathcal{U} = \bigtimes_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i \qquad e \quad \begin{cases} u \in \mathcal{U} \\ A \text{ e } B \subseteq \mathcal{U} \end{cases}$$

$A \subset B$ se para $\forall u \in \mathcal{U}$ for:

$$\left[\triangledown (J \quad (u), J_B(u)) = J_B(u)\right] \cap \left[\vartriangle (J_A(u), J_B(u) = J_A(u)\right]$$

— União (U):

$$\text{Se: } A \equiv \bigcup_{i=1}^{m} A_i \quad e \quad \forall_i \ A_i \subseteq \mathcal{U} \quad e \quad u \in \mathcal{U}$$

$$\text{então } J_A \ (u) = J_{\bigcup_{i=1}^{m} A_i} \ (u) = \triangledown (J_{A_1} \ (u), \ldots, J_{A_m} \ (u))$$

— Intersecção ($\cap$)

$$\text{Se: } A \equiv \bigcap_{i=1}^{m} A_i \quad e \quad \forall_i \ A_i \subseteq \mathcal{U} \text{ e } u \in \mathcal{U}$$

$$\text{então } J_A \ (u) = J_{\bigcap_{i=1}^{m}} \ (u) = \vartriangle (J_{A_1} \ (u), \ldots, J_{A_m} \ (u))$$

— Complementação (—)

Se o reticulado $(\Omega, \triangledown, \vartriangle)$ for complementado então pode definir-se conjunto complementar dum conjunto vago $A \subseteq \mathcal{U}$ e será um conjunto $\bar{A}$ que goze das propriedades seguintes:

$J_{\bar{A}} \triangledown J_A = V$ supremo do reticulado Ω

$J_{\bar{A}} \vartriangle J_A = O$ infimo do reticulado Ω

Donde:

$$\begin{cases} \bar{A} \cup A = \mathcal{U} \\ \bar{A} \cap A = \varnothing \end{cases}$$

Se um reticulado for complementado pode definir-se *soma disjuntiva:* $A + B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cup B)$.

h) *Introdução dos símbolos operatórios* $\oplus$, $\odot$ *e* — nos conjuntos vagos cujos reticulados forem os de Zadeh $([0,1], \psi, \hat{\gamma})$ e conceito de conjunto vulgar de nível α.

— Soma de conjuntos $\oplus$ (disjuntiva)

Seja: $A = \oplus [A_i]$ com $A_i \subseteq \mathcal{U}$ e $i = (1 \ldots p)$

$$\text{então} \quad J_A \ (u) = J_{\oplus \ i} \ (u) = \pm [J_{A_1}, \ldots J_{A_p}]$$

onde $\pm$ é a soma disjuntiva defenida como sendo:

$\alpha \pm \beta = \psi(\alpha, \beta) - \hat{\gamma}(\alpha, \beta)$ onde $\alpha, \beta \in \Omega$

Veja-se anexo 2 para mais pormenores.

— Producto de Conjuntos $\odot$

Nas condições anteriores.

$$\bigodot_i [A_i] = A \qquad i = 1, \ldots p$$

$$\text{então} \quad J_A = J_{\odot (A_i)} = \div [J_{A_1}, \ldots, J_{A_p}]$$

onde $\div$ é o producto vulgar dos J. contidos no parentese.

— Pseudo-Complementação à Zadeh

$\tilde{A}$ é pseudo-complementar de A se for: $J_{\tilde{A}} = 1 - J_A$, e goza da propriedade de *involução* $J_{\tilde{(\tilde{A})}} = J_A$

i) *Conjuntos vulgares de nível* α

É o conjunto vulgar assim definido:

$$\underline{A}\alpha = \{u \in \mathcal{U} : J_A(u) \geqslant \alpha\} \qquad e \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$$

j) *Decomposição e Recomposição*

O que se disse sobre esta operação, aplica-se igualmente aos conjuntos que descreverem Relações

Vagas, usando como já se fez na definição de conjunto vulgar de nível α.

4.3 — COMPOSIÇÃO DE RELAÇÕES

a) *Introdução*

Esta operação entre *relações vulgares* é extremamente importante e por isso convém definir uma operação correspondente para *conjuntos vagos.*

Assim se $X R_A Y$ relaciona X com Y e $Y R_B Z$ relaciona Y com Z, qual será a relação $X R^* Z$ onde $R^* (R_A$ e $R_B)$?

Só deverá depender de R_A e de R_B.

A *composição* simboliza-se por (o), assim $R^* = R_A \circ R_B$; em vez de R^* pode usar-se o símbolo $R_{A,B}$ e será $R_{A,B} = R_A \circ R_B$

Definição formal da composição:

Sejam dados os conjuntos universais X, Y e Z e formem-se os productos cartesianos

$$X \times Y = \mathcal{U}_1$$
$$Y \times Z = \mathcal{U}_2$$
$$X \times Z = \mathcal{U}_3$$

Seja dado por outro lado um reticulado (Ω, ∇, Δ) e sejam ainda:

J_1 a família das aplicações funcionais de $\mathcal{U}_1$ em Ω

J_2 idem de $\mathcal{U}_2$ em Ω

J_3 idem de $\mathcal{U}_3$ em Ω

Sejam dadas finalmente as relações R_A e R_B cujos caracterizantes J_A e J_B são membros respectivamente de J_1 e J_2.

Define-se a relação $R_{A,B} = R_A \circ R_B$ pelo conjunto contido em $\mathcal{U}_3$ cujo caracterizante $J_{A,B}$ é membro da família J_3 e cujo valor para o par $(x, z) \in \mathcal{U}_3$ genérico, é dado pela expressão:

$$J_{A,B}(x, z) = \underset{y}{\nabla} \left[\Delta(J_A (x, y), J_B (y, z))\right]$$

Tomam-se todos os $J_A (x, y)$, cujos pares têem por 1.º elemento x e todos os $J_B (y, z)$ cujos pares têem por 2.º elemento z formam-se os pares $J_A (x, y)$, $J_B (y, z)$ que têem o mesmo y, operam-se esses pares com o operador Δ e depois opera-se com o operador ∇ sobre os resultados anteriores.

Como o producto de duas matrizes é também uma *composição* de relações, a melhor mnemónica para realizar esta operação de composição de relações consiste em:

—Escrever $J_A (x,y)$ na forma matricial (em geral será rectangular)

Card (x) = número de linhas

Card (y) = número de colunas

— Escrever $J_B (y, z)$ igualmente na forma matricial

Card (y) = número de linhas

Card (z) = número de colunas.

— Executar a operação usual de *producto de matrizes* onde o operador

$$\begin{cases} \nabla \text{ corresponde a } + \text{ (Soma)} \\ \Delta \text{ corresponde a } \cdot \text{ (Produto)} \end{cases}$$

Por exemplo sejam dados:

$$\left\{\begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix}\right. \quad \text{onde} \quad \left\{\begin{matrix} \text{Card } (X) = 2 \\ \text{Card } (Y) = 4 \\ \text{Card } (Z) = 3 \end{matrix}\right.$$

$J_A \in J_1$ família das aplicações de $X \times Y$ em Ω

$J_B \in J_2$ » » de $Y \times Z$ em Ω

$J_{A \circ B} \in J_3$ » » de $X \times Z$ em Ω

Escrevam-se J_A e J_B sob a forma de matrizes e efectue-se o respectivo producto:

$$\begin{bmatrix} J_A (x_1 y_1) & J_A (x_1 y_2) & J_A (x_1 y_3) & J_A (x_1 y_4) \\ J_A (x_2 y_1) & J_A (x_2 y_2) & J_A (x_2 y_3) & J_A (x_2 y_4) \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} J_B (y_1 z_1) & J_B (y_1 z_2) & J_B (y_1 z_3) \\ J_B (y_2 z_1) & J_B (y_2 z_2) & J_B (y_2 z_3) \\ J_B (y_3 z_1) & J_B (y_3 z_2) & J_B (y_4 z_3) \\ J_B (y_4 z_1) & J_B (y_4 z_2) & J_B (y_3 z_3) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} J_{AoB} (x_1 z_1) & J_{AoB} (x_1 z_2) & J_{AoB} (x_1 z_3) \\ J_{AoB} (x_2 z_1) & J_{AoB} (x_2 z_2) & J_{AoB} (x_2 z_3) \end{bmatrix}$$

e onde, por exemplo, a expressão de $J_{AoB}(x_1 z_3)$ é dada: $J_{AoB} (x_1, z_3) = \underset{y}{\nabla} [\Delta(J_A (x_1, y), J_B (y, z_3)]$

ou, representando todas as operações a efectuar, temos:

$$\begin{aligned} J_{AoB}(x_1, z_3) = \nabla \{ & \Delta[J_A (x_1, y_1), J_B (y_1 z_3)] , \\ & , \Delta[J_A (x_1, y_2), J_B (y_2 z_3)] , \\ & , \Delta[J_A (x_1 y_3), J_B (y_3 z_3)] , \\ & , \Delta[J_A (x_1 y_4), J_B (y_4, z_3)] \} \end{aligned}$$

Como se vê, procede-se como no produto de matrizes onde o símbolo Δ está pelo produto e ∇ está pela soma.

Os símbolos Δ e ∇ podem ser substituídos por outros, desde que esses outros sejam defenidos no conjunto Ω; assim, por exemplo, no reticulado de Zadeh $([0,1], \varphi, \psi)$, Δ e ∇ serão substituídos por φ e ψ e a operação ∇ $(\Delta [\quad])$ pode ser substituída por φ $(\psi [\quad])$.

É evidente conforme os operadores usados e a ordem porque intervêem assim o resultado da composição é diferente.

Os pares de operadores mais usados são os abaixo apresentados e as designações respectivas são as que vão indicadas adiante:

(∇, Δ) limite Sup./limite Inf. ou Sup./Inf.

(Δ, ∇) limite Inf./limite Sup. ou Inf./Sup.

(ψ, φ) Max./Min

(φ, ψ) Min./Max.

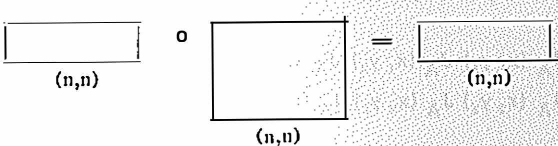
$(\psi, \div)$ Max./Prod.

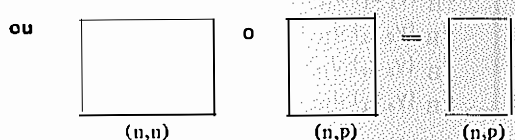
$(\varphi, \pm)$ Min./Soma

b) *Aplicações particulares da operação da composição:*

Se (Card x=Card y) ou (Card y=Card z) então a matriz composta (x,z) terá a mesma forma da matriz (y, z) ou da matriz (x, y).

Resulta duma das matrizes a composição ser quadrada.

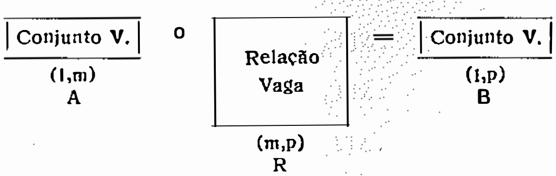




Se uma das relações for quadrada e a outra degenerar num *vector* o resultado será também um *vector* do mesmo tipo.

Como um vector representa o caracterizante de um *Conjunto Vago.*

Assim uma relação vaga induz um conjunto vago a partir de outro conjunto vago.



Diz-se então que o conjunto vago A, por meio de uma Relação Vaga R, *induziu* outro conjunto vago B:

$$A \in (1 \times Y), B \in 1 \times Z) \text{ e } R \in (Y \times Z)$$

onde 1 representa o elemento único do conjunto universal X.

Note-se que o produto cartesiano X×Y quando Card X=1, tem por Card (X×Y)=Card Y; é pois possível estabelecer uma correspondência (1,1) entre os elementos (x, y) de X×Y, e os elementos y de Y, de forma seguinte:

$$\forall_y \quad (x, y) \rightleftarrows y \quad (X \text{ só tem um elemento } x)$$

c) *Família de Sub-reticulados estáveis*

Seja dado um reticulado (Ω, ∇, Δ) e seja Ω' um subconjunto *estável de* Ω, isto é, $(\Omega', \nabla, \Delta)$ é um reticulado também onde as operações ∇, Δ gozam das mesmas propriedades que gozavam em (Ω, ∇, Δ), *(nomeadamente são fechadas e unicas quando aplicadas nesse sub-conjunto).* O reticulado (Ω, ∇, Δ) é um sub-conjunto (impróprio) estável dele próprio.

Vamos designar por $F(\Omega)$ a família de todos os sub-conjuntos *estáveis* (próprios ou impróprios) de um dado conjunto reticulado (Ω, ∇, Δ).

Pode então generalizar-se a aplicação da operação de composição de relações, a relações que não têem o mesmo reticulado de referência mas desde que seja exigido que os reticulados de referência sejam escolhidos na mesma *família de sub-reticulados estáveis.*

É fácil de ver que é correcta a acersão feita lembrando que os elementos dos sub-conjuntos estáveis são necessariamente elementos do conjunto Ω.

Assim é possível fazer composições entre conjuntos vulgares e conjuntos de Zadeh.

Com efeito: $([0,1], \varphi, \psi)$ é reticulado de Zadeh; o reticulado de Bool $(\{0,1\}, \psi, \varphi)$ tem todas as propriedades do anterior (e mais algumas de que se não tira qualquer partido), portanto é um reticulado estável do anterior.

Por exemplo sejam dados:

O conjunto vago $A \subseteq X$ e $([0,1], \psi, \varphi)$

O conjunto vulgar B, $B \subseteq X \times Y$ e $(\{0,1\}, \psi, \varphi)$.

mas $(\{0,1\}, \psi, \varphi)$ é um sub-reticulado estável de $([0,1], \psi, \varphi)$ e ambos pertencem à família de sub-reticulados estáveis $F([0,1], \psi, \varphi)$ (reticulado de Zadeh). Seja então, por exemplo:

$$\Gamma_A = [x_1/0.1, x_2/0.5, x_3/0.3] \text{ e:}$$

$$J_B = \begin{bmatrix} x_1\, y_1 = 1 & x_1\, y_2 = 0 \\ x_2\, y_1 = 0 & x_2\, y_2 = 1 \\ x_3\, y_1 = 0 & x_3\, y_2 = 1 \end{bmatrix}$$

então

$$\Gamma_{AoB} = \begin{bmatrix} \{\psi[\dot{\uparrow}(0{,}1,1), \dot{\uparrow}(0{,}1,0), \dot{\uparrow}(0{,}1,0)]\} & \{\psi[\dot{\uparrow}(0{,}1,0), \dot{\uparrow}(0{,}1,1), \dot{\uparrow}(0{,}1,1)]\} \\ \{\psi[\dot{\uparrow}(0{,}5,1), \dot{\uparrow}(0{,}5,0), \dot{\uparrow}(0{,}5,0)]\} & \{\psi[\dot{\uparrow}(0{,}5,0), \dot{\uparrow}(0{,}5,1), \dot{\uparrow}(0{,}5,1)]\} \\ \{\psi[\dot{\uparrow}(0{,}3,1), \dot{\uparrow}(0{,}3,0), \dot{\uparrow}(0{,}3,0)]\} & \{\psi[\dot{\uparrow}(0{,}3,0), \dot{\uparrow}(0{,}3,1), \dot{\uparrow}(0{,}3,1)]\} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \psi[0{,}1,\ 0,\ 0] & \psi[0,\ 0{,}1,\ 0{,}1] \\ \psi[0{,}5,\ 0,\ 0] & \psi[0,\ 0{,}5,\ 0{,}5] \\ \psi[0{,}3,\ 0,\ 0] & \psi[0,\ 0{,}3,\ 0{,}3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}3 \end{bmatrix}$$

d) *Composição de Relações Vagas e suas principais propriedades*

Tem interesse em verificar se as operações sobre relações vagas a que se deu o nome de *composição* gozam precisamente das mesmas propriedades das composições vulgares de relações vulgares.

Uma composição vulgar de relações vulgares goza das seguintes propriedades.

I) $(R_A \text{ o } R_B)^{-1} = R_A^{-1} \text{ o } R_B^{-1}$

II) $(R_A \text{ o } R_B) \text{ o } R_C = R_A \text{ o } (R_B \text{ o } R_C)$

III) $(R_A \text{ o } \bigcup_{i=1}^{n} P_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (R_A \text{ o } P_i)$

IV) $(R_A \text{ o } \bigcap_{i=1}^{n} P_i) = \bigcap_{i=1}^{n} (R_A \text{ o } P_i)$

onde:

$$R_A \subseteq X \times Y$$
$$R_B \subseteq Y \times Z$$
$$R_C \subseteq Z \times W$$

e $\forall_{i=1}^{n} P_i \subseteq Y$

Convertendo estas definições e adaptando a relações e conjuntos vagos, haverá que definir:

A família $F(\Omega)$ associada a (Ω, ∇, Δ);

As famílias de aplicações funcionais de

$$X \times Y \text{ em } \Omega_1 \in F(\Omega) \rightarrow J_1$$

$$Y \times Z \text{ em } \Omega_2 \in F(\Omega) \rightarrow J_2$$

$$Z \times W \text{ em } \Omega_3 \in F(\Omega) \rightarrow J_3$$

$$Y \text{ em } \Omega_4 \in F(\Omega) \rightarrow J_4$$

As relações vagas: $A \subseteq X \times Y$; $B \subseteq Y \times Z$; $C \subseteq Z \times W$ têem por caracterizantes respectivamente:

$$J_A(x, y) \in J_1$$
$$J_B(y, z) \in J_2$$
$$J_C(z, w) \in J_3$$
$$\Gamma_{P_i}(y) \in J_K$$

Γ_{P_i}: J_A, J_B, $J_C \in \Omega$, porque Ω_1, Ω_2, Ω_3, e $\Omega_4 \subseteq \Omega$.

Recorde-se ainda que o par de operadores associados (∇, Δ) se aplicam em Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 e Ω.

Nestas condições as proposições I), II), III) e IV) podem adaptar-se a conjuntos e relações vagas da forma seguinte:

I) $J_{(A.B)^t} = J_{(B^t.A^t)}$

II) $J_{[(A.B).C]} = J_{[A.(B.C)]}$

III) $J_{[A.\bigcup_{i=1}^{n} P]} = \nabla_{i=1}^{n} J_{(A.P_i)}$

IV) $J_{[A.\bigcap_{i=1}^{n} P_i]} = \Delta_{i=1}^{n} J_{(A.P_i)}$

o caracterizante de P_i é $\Gamma_{P_i} \in \Omega_4 \subseteq \Omega$.

Há que demonstrar que se verificam ou indicar, pelo menos, em que condições são verdadeiras.

I) $J_{(A,B)^t} = J_{B^t} \text{ o } J_{A^t}$

$$J_{(A,B)}(x, z) = \nabla_y \left[J_A(x, y) \,\Delta\, J_B(y, z) \right]$$

mas por definição de relação inversa (veja-se f) será:

$$J_{(AoB)^t}(z, x) = J_{(AoB)}(x, z)$$
$$J_{B^t}(z, y) = J_B(y, z)$$
$$J_{A^t}(y, x) = J_A(x, y)$$

e daí que:

$$J_{(A,B)^t}(z, x) = \Delta_y \left[J_{A^t}(y, x) \,\Delta\, J_{B^t}(z, y) \right]$$

mas, por definição de composição

$$= \Delta_y \left[J_{B^t}(z, y) \,\Delta\, J_{A^t}(y, x) \right] = J_{(B^t, A^t)}$$

Donde finalmente:

$$(R_A \text{ o } R_B)^{-1} = R_B^{-1} \text{ o } R_A^{-1}$$

II) $J_{[(A,B),C]} = J_{[A,(B,C)]}$

$$J_{(A,B)}(x, z) = \nabla_y \left[J_A(x, y) \,\Delta\, J_B(y, z) \right]$$

$$J_{[(A,B),C]}(x, w) = \nabla_z \left\{ \nabla_y \left[J_A(x, y) \,\Delta\, J_B(y, z) \right] \Delta \right.$$
$$\left. \Delta\, J_c(z, w) \right\}$$

Haverá pois que distribuir o operador Δ em relação a ∇, para poder passar à forma:

$$\underset{z}{\nabla}, \underset{y}{\nabla} \left\{ \Delta \left[J_A(x, y), J_B(y, z), J_C(z, w) \right] \right\}$$

para depois se arranjar sob a forma :

$$\underset{y}{\nabla} \left\{ \underset{z}{\nabla} \left[J_B(y, z) \Delta J_C(z, w) \right] \Delta J_A(x, y) \right\} = J_{[A,B,C,]}(x, w)$$

Portanto ou o reticulado é *distributivo* e a associabilidade da composição é possível ou *não* é distributivo e então, em rigor, a operação definida não é uma *composição.*

Prefere-se, porém, dizer que se *trata* de uma *composição não associativa.*

III) $J_{\left[A, \bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i\right]} = \underset{i=1}{\overset{n}{\nabla}} J_{(A,P_i)}$

Com efeito:

$$J_{(A,P_i)}(x, y) = \underset{y}{\nabla} [J_A(x, y) \Delta \Gamma_P \ (y)]$$

$$\underset{i=1}{\overset{n}{\nabla}} J_{(A, P_i)} = \underset{i=1}{\overset{n}{\vee}} \ \underset{y}{\nabla} \ [J_A(x, y) \Delta \Gamma_{P_i}(y)]$$

os operadores ∇ são comutativos e daí que

$$= \underset{y}{\nabla} \ \underset{i=1}{\overset{n}{\Delta}} \ [J_A(x, y) \Delta \Gamma_{P_i} \ (y)]$$

$$= \underset{y}{\nabla} \ [J_A(x, y) \Delta \Gamma_{\bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i} \ (y)]$$

$$= J_{\left[A, \bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i\right]} \ (x, y)$$

IV) $J_{(A, \bigcap\limits_{i=1}^{n} P_i)} = \overset{n}{\underset{i=1}{\Delta}} J_{(A,P_i)}$

Procede-se como em c).

Em resumo pode dizer-se que as composições de relações vagas gozam de todas as propriedades das composições de relações vulgares, excepto a *associabilidade* que implica ser o reticulado (Ω, ∇, Δ) distributivo.

Repare-se que o reticulado de Bool (que se usa em relações vulgares) é distributivo.

e) *Existência de uma relação neutra.*

Seja dada uma relação $R_A \subseteq X \times Y$ e $F(\Omega)$ uma família de reticulados estáveis associado ao reticulado (Ω, Δ, Δ) e sejam:

$$\underset{xy}{\Omega} \in F(\Omega)$$

$$\underset{xx}{\Omega} \in F(\Omega)$$

$$\underset{yy}{\Omega} \in F(\Omega)$$

e

$$J_A(x, y) \in \underset{xy}{\Omega} \quad \text{e} \quad (x, y) \in X \times Y$$

$$J_P(x_i, x_j) \in \underset{xx}{\Omega} \quad \text{e} \quad (x_i, x_j) \in X \times X$$

$$J_Q(y_i, y_j) \in \underset{yy}{\Omega} \quad \text{e} \quad (y_i \ y_j) \in Y \times Y$$

Procure-se a forma de R_P e R_Q tal que:

$R_P \circ R_A = R_A$ neutro à esquerda

$R_A \circ R_Q = R_A$ neutro à direita

Com os operadores ∇ e Δ podem construir-se duas Leis de Composição *típicas:*

$$\nabla \ [(\ ) \Delta (\ )] = \underset{\nabla\Delta}{\bowtie}$$

e

$$\Delta \ [(\ ) \nabla (\ )] = \underset{\Delta\nabla}{\bowtie}$$

Composição do tipo $\underset{\nabla\Delta}{\bowtie}$

$$J_{(A,Q)}(x, y) = \underset{y_i}{\nabla} \left[J_A(x, y_i) \Delta J_Q(y_i, y) \right]$$

ou suprimindo os símbolos J_A e J_Q.

$$\underset{yk}{\forall} \left\{ \nabla \left[(x, y_1) \Delta (y_1, y_K) ; (x, y_2) \Delta (y_2, y_K) ; \ldots \right] = (x, y_K) \right\}$$

Para que $(x, y_i) \Delta (y_i, y_K) \leqslant (x, y_K)$ e $i \neq k$

basta que $(y_i, y_K) = 0$ (ínfimo) (Para $i \neq k$)

e para que $(x, y_K) \Delta (y_K, y_K) = (x, y_K)$

basta que $(y_K, y_K) = V$ (supremo)

Em resumo teremos:

$$J_Q(y_i, y_j) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad i \neq j \\ V & \text{se} \quad i = j \end{cases}$$

A matriz de J_Q toma a forma seguinte:

$$\begin{bmatrix} V & 0 & 0 & — & — & — \\ 0 & V & & & & \\ 0 & & V & & & \\ 0 & & & & & \\ | & & & & & \\ | & & & & & V \end{bmatrix}$$

matriz simétrica, com zeros por toda a parte menos na diagonal que é preenchida por V.

Raciocínio idêntico se faz para $J_P(x_i \ x_j)$, que toma a mesma forma.

Composição do tipo $\underset{\Delta\nabla}{\bowtie}$

$$J_{(A, Q)}(x, y) = \underset{yi}{\Delta} \left[J_A(x, y_i) \nabla J_Q(y_i, y) \right].$$

Raciocinando dum modo idêntico será necessário e suficiente que:

$$J_Q\,(y_i\,,y_j\,) = \begin{cases} V & \text{se} \quad i \neq j \\ O & \text{se} \quad i = j \end{cases}$$

e a matriz de J_Q toma a forma:

$$\begin{bmatrix} O & V & V & \cdots & V \\ V & O & V & & \vdots \\ V & V & O & & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ V & \cdots & \cdots & \cdots & O \end{bmatrix}$$

Identicamente para J_P.

Note-se que R_Q *não* se pode compor com R_P em geral.

Porém, se $X=Y$, então teremos:

Composição do tipo $\underset{\nabla\Delta}{\bowtie}$

$$J_{(Q,P)} = J_{(P,Q)} = O \qquad \forall\,(x_i\;x_j\,) \in X$$

Composição do tipo $\underset{\Delta\nabla}{\bowtie}$

$$J_{(Q,P)} = J_{(P,Q)} = V \qquad \forall\,x_i\,(x_j) \in X$$

Porque as composições são de dois tipos, poderá simbolizar-se da forma seguinte:

$$\binom{\nabla\Delta}{A,\,B} \quad e \quad \binom{\Delta\nabla}{A,\,B}$$

ou ainda mais pesadamente:

$$\binom{\nabla\Delta}{A,\,B}(x,\,z) \quad e \quad \binom{\Delta\nabla}{A,\,B}(x,\,z)$$

Significando estes símbolos que:

— $R_A \subseteq X \times Y$
— $R_B \subseteq Y \times Z$
— O operador é $\nabla\,[(\quad)\,\Delta\,(\quad)]$
ou $\Delta\,[(\quad)\,\nabla\,(\quad)]$
— $x \in X$, $Y \in Y$ e $z \in Z$

e) *Da existência de uma relação que composta com uma relação dada produza a relação R_Q ou R_P.*

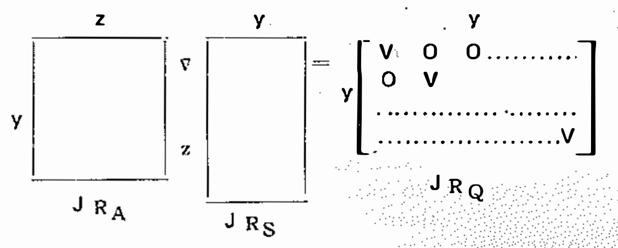
Façamos, por exemplo, para R_Q e usando a composição $\underset{\nabla\Delta}{\bowtie}$.

Seja dada uma relação $R_A \subseteq Y \times Z$ e $R_Q \subseteq Y \times Y$. Então a relação R_S a encontrar será tal que:

$$R_S \subseteq Z \times Y$$

$$e \quad R_A \circ R_S = R_Q$$

Ora



Basta que JR_A tenha uma linha sem o elemento V para não ser possível formar um V, mesmo que J_{RS} fosse todo constituído por V, isto é, em geral J_{RS} *não existe*. Era fácil de ver que para a outra composição (Δ_∇) e para R_P sucedia o mesmo.

(Continua na Técnica 437 — Junho 1976)