ANTÓNIO GOUVÊA PORTELA
ENG.º MECÂNICO (I.S.T.)

Circuito normalizado dum sistema comandado

«TÉCNICA»
Revista dos Alunos do I. S. T.
Separata do n.º 310 — Págs. 329 a 334

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
LISBOA
1961

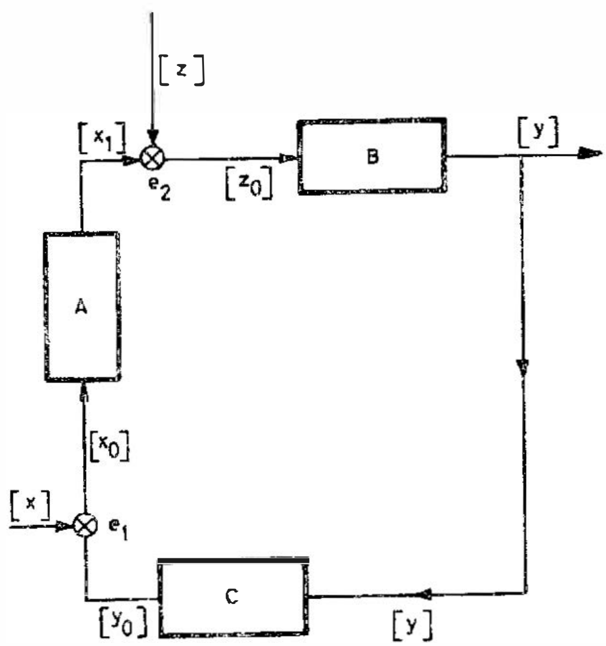
C. D. U. 621 — 52:539.3:518.5

Circuito normalizado dum sistema comandado

PELO ENG.º MECÂNICO (I.S.T.) ANTÓNIO GOUVÊA PORTELA
Prof. do I. S. T.

Na figura junta está representado um circuito normalizado dum sistema comandado, significando:

B = O Dispositivo que se deseja comandar e que fornece a *resposta* [y] quando recebe a *entrada* $[z_0]$.
C = Os instrumentos de medida que convertem [y] em $[y_0]$, parâmetros que são comparados com os *padrões* [x] que se desejam atingir.
A = Os servo-comandos que alteram a regulação do sistema B.
e_1 = Comparadores entre $[y_0]$ e [x].
e_2 = Comparadores entre o sinal corrigido $[x_1]$ e a perturbação [z].
[z] = A perturbação exterior ao sistema.



O problema consiste em escolher as características de A de modo que o sistema (A B C) seja estável.

* * *

Vamos admitir que o sistema é linear e que as matrizes características de A B C são respectivamente simbolizadas por A B e C. Em geral, estas matrizes são rectangulares e seguindo o sentido do diagrama será:

$$\underset{(\alpha,\beta)}{C.}\ \underset{(\beta,\gamma)}{B.}\ \underset{(\gamma,\alpha)}{A.} = \underset{(\alpha,\alpha)}{M}$$

Designaremos por m a ordem α de matriz M.
Na maioria das aplicações será $\alpha = \beta = \gamma = m$.

Entre os diversos sinais e os aparelhos A B C vamos admitir que existem relações lineares e designemos por $x_i\, y_i\, z_i$ os sinais e A, B e C as matrizes características dos aparelhos A B C; os sinais serão representados por vectores.

Será então:

$$\begin{cases} z_0 = z + x_1 \\ x_1 = A\, x_0 \\ x_0 = x + y_0 \\ y_0 = C\, y \\ y = B\, z_0 \end{cases}$$

Sistemas de 5 equações matriciais a 6 incógnitas $(x_0\, x_1, y, y_0, z)$ e um vector paramétrico x.

Vamos reduzir o sistema a uma equação única de forma

$$y_0 = F z + E x$$

sendo F e E duas matrizes a determinar.

Será então:

$$\begin{aligned} y_0 &= C y = C B z_0 = C B z + C B x_1 \\ &= C B z + C B A x_0 = C B z + C B A x + C B A y_0 \end{aligned}$$

ou

$$(I - C B A)\, y_0 = C B z + C B A x$$

$$y_0 = \frac{C B}{I - C B A} z + \frac{C B A}{I - C B A} x \tag{1}$$

Sendo I a matriz unidade de ordem $\alpha = m$.

A) Estudo da forma das matrizes (A, B, C)

$$A = \sum_{j=0}^{n_a} A_j\, p^{n_a - j}$$

ou seja um polinómio em p de coeficientes matriciais constantes A_j, sendo p um número complexo e n_a o *grau* do polinómio. Idênticamente será:

$$B = \sum_{j=0}^{n_b} B_j\, p^{n_b - j}$$

$$C = \sum_{j=0}^{n_c} C_j\, p^{n_c - j}$$

e se for n o maior de n_a, n_b, n_c. Poderá ainda uniformizar-se a ordem das matrizes A_j B_j e C_j e escrever

$$A = \sum_{j=0}^{n} A_j\, p^{n-j} \tag{2}$$

$$B = \sum_{j=0}^{n} B_j\, p^{n-j} \tag{3}$$

$$C = \sum_{j=0}^{n} C_j\, p^{n-j} \tag{4}$$

Esta uniformização envolve evidentemente que alguns dos A_j e ou B_j e ou C_j sejam **nulos.**

B) Representação da equação matricial (1)

Substituindo (2), (3) e (4) em (1) teremos:

$$y_0 = \frac{\sum_{j=0}^{n} C_j p^{n-j} \cdot \sum_{j=0}^{n} B_j p^{n-j}}{1 - \sum_{j=0}^{n} C_j p^{n-j} \cdot \sum_{j=0}^{n} B_j p^{n-j} \sum_{j=0}^{n} A_j p^{n-j}} \cdot z + \frac{\sum_{j=0}^{n} C_j p^{n-j} \cdot \sum_{j=0}^{n} B_j p^{n-j} \cdot \sum_{j=0}^{n} A_j p^{n-j}}{1 - \sum_{j=0}^{n} C_j p^{n-j} \cdot \sum_{j=0}^{n} B_j p^{n-j} \cdot \sum_{j=0}^{n} A_j p^{n-j}} \, x$$

Ora já vimos que $p = a + bi$ é o expoente dum vector girante, e^{pt}, cuja projecção no eixo real fornece o movimento imposto a y_0 por z.
isto é:

$$z = e^{pt} = e^{(a+bi)\,t} = e^{at} \,.\, a^{bti}$$

Para z admitem-se as seguintes hipóteses restritivas

$$\begin{cases} a & \text{é finito e dado} \\ b & \text{varia de } -\infty \text{ a } +\infty \end{cases}$$

C) Critério de estabilidade do sistema

O critério resume-se a afirmar que $(I - CBA) \neq 0$ para todos os valores de b entre $-\infty$ e $+\infty$.

● Método consiste em:

1.º) *Calcular* $C \times B \times A$:

e será

$$C \times B = \sum_{j=0}^{n} C_j \, p^{j-n} \cdot \sum_{j=0}^{n} B_j \, p^{j-n}$$

$$= \sum_{g=0}^{2n} \left(\sum_{i=0}^{g} C_i \, B_{g-i} \right) \cdot p^{2n-g}$$

$$\text{e} \quad C \times B \times A = \sum_{g=0}^{2n} \left(\sum_{i=0}^{g} C_i \, B_{g-i} \right) p^{2n-g} \cdot \sum_{j=0}^{n} A_j \, p^{n-j}$$

$$= \sum_{K=0}^{3n} \left[\sum_{g=0}^{K} \left(\sum_{i=0}^{g} C_i \, B_{g-i} \right) A_{K-g} \right] p^{3n-K}$$

Nota: quando um dos *índices* que aparece numa matriz é *superior* ao número de matrizes existentes, suprime-se no produto esse termo mas evidentemente não se iguala *zero*.
Só será *zero* se a matriz correspondente for nula.

2.º) *Calcular* $(C \times B \times A - I)$

$$C \times B \times A = \sum_{K=0}^{3n-i} \left[\sum_{g=0}^{K} \left(\sum_{i=0}^{g} C_i B_{g-i} \right) A_{K-g} \right] p^{3n-K} + \sum_{g=0}^{3n} \left(\sum_{i=0}^{g} C_i B_{g-i} \right) A_{3n-g}$$

$$\text{e} \quad C\,B\,A - I = \sum_{K=0}^{3n-i} \left[\sum_{g=0}^{K} \left(\sum_{i=0}^{g} C_i B_{g-i} \right) A_{K-g} \right] p^{3n-K} + \left[\sum_{g=0}^{3n} \left(\sum_{i=0}^{g} C_i B_{g-i} - I \right) \right]$$

$$C\,B\,A - I = \sum_{j=0}^{3n} F_j \, p^{3n-j}$$

sendo F_j uma matriz de ordem (m, m).

3.º) Em geral, a matriz F_j que é quadrada e diagonizável e seja D_j a matriz diagonal correspondente a E_j.

Será então $$\sigma^{-1}(CBA-I)\sigma = \sum_{j=0}^{3n} D_j\ p^{3n-j}$$

e $$\sigma^{-1}[CBA-I]\ .\ [y_o]\ .\ \sigma = \left(\sum_{j=0}^{3n} D_j\ p^{3n-j}\right) .\ \sigma^{-1}[y_o]\ \sigma \quad \text{e se} \quad D_j = [\,j\Lambda ii\,]_{(m,m)}$$

4.º) *Análise do Polinómio Matricial*

Igualando a zero $(CBA-I)\ [y_o]$ será $(CBA-I)=0$ para $[y_o] \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$ e como o espectro da matriz não é alterado pela operação de similaridade será ainda:

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{3n} j\Lambda ii\ p^{3n-j} \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{3n} j\Lambda m,m\ p^{3n-j}\ p=0 \end{cases} \qquad \text{Sistema que terá de ser satisfeito}$$

Ora cada uma das equações tem o grau **3n** em p, haverá *3n* raízes reais e ou complexas conjugadas.

5.º) *Critério de estabilidade*

Para que o sistema seja *estável* será necessário que:

a) Para as *raízes reais*, p_r, seja *negativo* pois que $y = e^{-|p_r|t}$ decresce de amplitude com o tempo

b) Para as *raízes complexas*, p_i, seja negativa a parte real do complexo.

Se, $p_i = a \mp b_i$ será $a < 0$

Pois $y = e^{(a \mp bi)\,t} = e^{-|a|t}\ .\ e^{\mp bit}$ novamente y decresce com o *tempo*.

* * *

Resumindo o método consiste em:

a) Calcular $(CBA-I) = f(p)$

b) Estabelecer as *m* equações em p da ordem *3n*

c) Determinar as raízes p_r e p_i

d) Analisar cada uma delas.

D) Variante do método

O Produto *CBA* é sempre uma matriz *quadrada* (m x m) embora C, B e A possam ser matrizes *rectangulares*.

No caso particular, mas muito frequente, em que C, B e A sejam também quadradas e diagonizáveis poderá operar-se de outro modo mais expedido.

1.º) Diagonizar C, B e A e sejam

$$[ss\Lambda aj] = A_j\ ,\ [ss\Lambda bj] = B_j \text{ e } [ss\Lambda c_j] = C_j$$

$$CBA = \sum_{k=o}^{3n} \left[\sum_{g=o}^{k} \left(\sum_{i=o}^{g} C_i \, B_{g-i} \right) A_{n-g} \right] p^{3n-k}$$

$$= \sum_{k=o}^{3n} \left[\sum_{g=o}^{k} \left(\sum_{i=o}^{g} [ss\Lambda c_i] \, [ss\Lambda b(g-i)] \right) [ss\Lambda a(k-g)] \right] p^{3n-k}$$

2.º) Cada equação escreve-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=o}^{3n} \left[\sum_{g=o}^{k} \left(\sum_{i=o}^{g} ss\Lambda c_i \, . \, ss\Lambda b\,(g-i) \right) ss\Lambda a(k-g) \right] p^{3n-k} - 1 = 0 \\ \text{fazendo variar } ss \text{ desde } (1,1) \text{ a } m, m) \end{array} \right.$$

* * *

3.º) Estudam-se as raízes e conclui-se de estabilidade

E) Simplificações resultantes da variante

1.º) Designemos por $ss\Lambda g = \sum_{k=o}^{3n} ss\Lambda c_i \, . \, ss\Lambda b\,(S-i) \qquad g = 0 \ldots 3n$

Será

$$CBA = \sum_{k=o}^{3n} \left[\sum_{g=o}^{k} ss\Lambda g \, . \, ss\Lambda a\,(k-g) \right] p^{3n-1}$$

Ora $[ss\Lambda g]$ é só função de C e B que são dados do sistema e $[ss\Lambda a]$ caracteriza o sistema A. É relativamente fácil acertar os valores de $[ss\Lambda a]$ de modo a obter-se um produto CBA desejado.

2.º) Se as matrizes C, B, A forem quadradas e diagonalizáveis pode desde logo escrever-se como já vimos:

$$CBA - I = \sum_{k=o}^{3n} \left[\sum_{g=o}^{k} \left(\sum_{i=o}^{g} ss\Lambda c_i \, . \, ss\Lambda b(g-i) \right) . \, ss\Lambda a\,(k-g) \right] p^{3n-k} - 1 = 0$$

* * *

F) Exemplificação

Tem interesse aplicar a um *caso particular* em que C, B, A têm os seus elementos descritos por polinómios do *2.º grau*.

Será então: $3 \times n = 3 \times 2 = 6$.

$k=0$	$g=0$	$i=0$	$(ss\Lambda c_0 \, . \, ss\Lambda b_0 \, . \, ss\Lambda a_0) \, . \, p^6$	$\boxed{k+g+i=0}$
$k=1$	$g=0$	$i=0$	$[(ss\Lambda c_0 \, . \, ss\Lambda b_0 \, . \, ss\Lambda a_1) +$	
$k=0$	$g=1$	$i=0$	$+ (ss\Lambda c_0 \, . \, ss\Lambda b_1 \, . \, ss\Lambda a_0) +$	
$k=0$	$g=0$	$i=1$	$+ (ss\Lambda c_1 \, . \, ss\Lambda b_0 \, . \, ss\Lambda a_0)] \, . \, p^5$	$\boxed{k+g+i=1}$
$k=2$	$g=0$	$i=0$	$[(ss\Lambda c_0 \, . \, ss\Lambda b_0 \, . \, ss\Lambda a_2) +$	
$k=1$	$g=1$	$i=0$	$+ (ss\Lambda c_0 \, . \, ss\Lambda b_1 \, . \, ss\Lambda a_1) +$	
$k=1$	$g=0$	$i=1$	$+ (ss\Lambda c_1 \, . \, ss\Lambda b_0 \, . \, ss\Lambda a_1) +$	
$k=0$	$g=2$	$i=0$	$+ (ss\Lambda c_0 \, . \, ss\Lambda b_2 \, . \, ss\Lambda a_0) +$	
$k=0$	$g=1$	$i=1$	$+ (ss\Lambda c_1 \, . \, ss\Lambda b_2 \, . \, ss\Lambda a_0) +$	
$k=0$	$g=0$	$i=2$	$+ (ss\Lambda c_2 \, . \, ss\Lambda b_0 \, . \, ss\Lambda a_0)] \, . \, p^4$	$\boxed{k+g+i=2}$

Note-se que $j = (0, 1, 2)$ e portanto $ss\lambda b_3$, $ss\lambda a_3$ e $ss\lambda c_3$ de 3 em diante *não existem* e por isso se suprime

$k = 2$	$g = 1$	$i = 0$	$+ (ss\lambda c_0 \,.\, ss\lambda b_1 \,.\, ss\lambda a_2) +$	
$k = 2$	$g = 0$	$i = 1$	$+ (ss\lambda c_1 \,.\, ss\lambda b_0 \,.\, ss\lambda a_2) +$	
$k = 1$	$g = 2$	$i = 0$	$+ (ss\lambda c_0 \,.\, ss\lambda b_2 \,.\, ss\lambda a_1) +$	
$k = 1$	$g = 1$	$i = 1$	$+ (ss\lambda c_1 \,.\, ss\lambda b_1 \,.\, ss\lambda a_1) +$	
$k = 1$	$g = 0$	$i = 2$	$+ (ss\lambda c_2 \,.\, ss\lambda b_0 \,.\, ss\lambda a_1) +$	
$k = 0$	$g = 3$	$i = 0$	$+ (ss\lambda c_0 \,.\, ss\lambda b_0) +$	
$k = 0$	$g = 2$	$i = 1$	$+ (ss\lambda c_1 \,.\, ss\lambda b_2 \,.\, ss\lambda a_0) +$	$\boxed{k + g + i = 3}$
$k = 0$	$g = 1$	$i = 2$	$+ (ss\lambda c_2 \,.\, ss\lambda b_1 \,.\, ss\lambda a_0)] \,.\, p^3$	
$k = 0$	$g = 0$	$i = 3$		

$k = 2$	$g = 2$	$i = 0$	$[(ss\lambda c_0 \,.\, ss\lambda b_2 \,.\, ss\lambda a_2) +$	
	$g = 1$	$i = 1$	$+ (ss\lambda c_1 \,.\, ss\lambda b_1 \,.\, ss\lambda a_2) +$	
	$g = 0$	$i = 2$	$+ (ss\lambda c_2 \,.\, ss\lambda b_0 \,.\, ss\lambda a_2) +$	
$k = 1$	$g = 2$	$i = 1$	$+ (ss\lambda c_1 \,.\, ss\lambda b_2 \,.\, ss\lambda a_1) +$	
	$g = 1$	$i = 2$	$+ (ss\lambda c_2 \,.\, ss\lambda b_1 \,.\, ss\lambda a_1) +$	$\boxed{k + g + i = 4}$
$k = 0$	$g = 2$	$i = 2$	$+ (ss\lambda c_2 \,.\, ss\lambda b_2 \,.\, ss\lambda a_0)] \,.\, p^2$	

$k = 2$	$g = 2$	$i = 1$	$[(ss\lambda c_1 \,.\, ss\lambda b_2 \,.\, ss\lambda a_1) +$	
$k = 2$	$g = 1$	$i = 2$	$+ (ss\lambda c_2 \,.\, ss\lambda b_1 \,.\, ss\lambda a_2) +$	$\boxed{k + g + i = 5}$
$k = 1$	$g = 2$	$i = 2$	$+ (ss\lambda c_2 \,.\, ss\lambda b_2 \,.\, ss\lambda a_1)] \,.\, p^1$	

$k = 2$	$g = 2$	$i = 2$	$[(ss\lambda c_2 \,.\, ss\lambda b_2 \,.\, ssa\lambda_2)] \,.\, p^0$	$\boxed{k + g + i = 6}$

$$C\,B\,A - I = [\;]\,p^6 + [\;]\,p^5 + [\;]\,p^4 + [\;]\,p^3 + [\;]\,p^2 + [\;]\,p + (ss\lambda c_2 \,.\, ss\lambda b_2 \,.\, ss\lambda a_2) - I = 0$$

Nas hipoteses anteriores e ainda se a resposta dos instrumentos C fôr da forma $C_1 p + C_0 = o$, isto é, não têm *inércia* será então: $C_0 = o$ e daí as seguintes simplificações:

$p^6 \rightarrow$ *coeficiente nulo*

$p^5 \rightarrow (ss\lambda c_1\ ss\lambda b_0\ ss\lambda a_0)$

$p^4 \rightarrow [(ss\lambda c_1\ ss\lambda b_0\ ss\lambda a_1) + (ss\lambda c_1\ ss\lambda b_1\ \lambda a_0) + (ss\lambda c_0\ ss\lambda b_0\ ss\lambda c_0)]$

$p^3 \rightarrow [(ss\lambda c_1\ ss\lambda b_0\ ss\lambda a_2) + (ss\lambda c_1\ ss\lambda b_1\ ss\lambda a_1) + (ss\lambda c_2\ ss\lambda b_2\ ss\lambda a_2) +$
$\quad + (ss\lambda c_1\ ss\lambda b_2\ ss\lambda a_0) + (ss\lambda c_2\ ss\lambda c_1\ ss\lambda a_0)]$

$p^2 \rightarrow [(ss\lambda c_1\ ss\lambda b_1\ ss\lambda a_2) + (ss\lambda c_2\ ss\lambda b_0\ ss\lambda a_2) + (ss\lambda c_1\ ss\lambda b_2\ ss\lambda a_1) +$
$\quad + (ss\lambda c_2\ ss\lambda b_1\ ss\lambda a_1) + (ss\lambda c_2\ ss\lambda b_2\ ss\lambda a_0)]$

$p \rightarrow [(ss\lambda c_1\ ss\lambda b_2\ ss\lambda a_2) + (ss\lambda c_2\ ss\lambda b_1\ ss\lambda a_2) + ss\lambda c_2\ ss\lambda b_2\ ss\lambda a_1)]$

$p^0 \rightarrow (ss\lambda c_2\ ss\lambda b_2\ ss\lambda a_2)$

$$[\quad]\,p^5 + [\quad]\,p^4 + [\quad]\,p^3 + [\quad]\,p^2 + [\quad]\,p + [ss\lambda c_2\ ss\lambda b_2\ ss\lambda a_2] - 1 = o$$