TRANSFORMADA DE LAPLACE INVERSA

1.- INTRODUÇÃO

Em problemas de automação, é corrente obter-se a transformada $X(s)$ sob a forma dum quociente de dois polinómios em s, onde a ordem do numerador é inferior à ordem do denominador.

Um dos métodos usados para obter a transformada de Laplace Inversa, consiste em substituir essa forma pela expansão de Heaviside, porque, nesta segunda forma é fácil aplicar a Transformada de Laplace Inversa.

O método adiante exposto é devido a C.F. CHEN, e a R.E. YATES, publicado no Nº 269 de Junho de 1967 da Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering.

2.- ALGUMAS NOÇÕES BÁSICAS

2.1 — Se $f(t)$ for uma função de t, e $t>0$, a transformada de Laplace será dada por:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \qquad (1)$$

onde s é um complexo.

$F(s)$ existe se o integral convergir para pelo menos um valor de s.

Reciprocamente, será: $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ (2)
e, designa-se por $\mathcal{L}^{-1}\{\ \}$, a transformada de Laplace Inversa.

2.2 — O operador $\mathcal{L}$ é linear:

$$\mathcal{L}\{c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t)\} = c_1 \cdot \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \cdot \mathcal{L}\{f_2(t)\} \qquad (3)$$

idênticamente, para a transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

2.3 — Tem interesse, recordar ainda, que:

$$\mathcal{L}\{f^{(m)}(t)\} = s^m F(s) - \sum_{k=1}^{m} s^{m-k} f^{(k-1)}(0) \qquad (4)$$

onde $f^{(r)}(0)$ representa o valor de $f^{(n)}(t)$ para $t=0$.

2.4 — Combinando as propriedades 2.2 e 2.3 teremos ainda, para uma função $\varphi(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{(m-i)}(t)$ a seguinte expressão para a respectiva transformada:

$$\mathcal{L}\{\varphi(t)\} = \mathcal{L}\{x(t)\} \sum_{i=0}^{m} a_i s^{m-i} - \sum_{p=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} s^{p-k} a_{m-p}\, x^{(k-1)}(0) \qquad (5)$$

Designando por :

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = X_s \\ \mathcal{L}\{\varphi(t)\} = F(s) = F_s \\ \sum\limits_{i=0}^{m} a_i\, s^{m-i} = P(s) = P_s \\ \sum\sum(\quad\quad) = Q(s) = Q_s \end{array}\right\} \qquad (6)$$

teremos :

$$X_s = \frac{F_s + Q_s}{P_s} = \frac{R_s}{P_s} \qquad (7)$$

Nota : reservaremos as letras maiúsculas, indiciadas com s, para caracterizar as transformadas de Laplace de funções de t.

2.5 — Convem recordar, que uma equação diferencial homogénea de ordem m, é equivalente a um sistema de m equações diferenciais homogéneas de ordem 1.

Seja dada a equação diferencial homogénea de ordem m :

$$\sum_{i=0}^{m} a_i\, x^{(m-i)}(t) = 0 \quad , e \quad a_0 \neq 0 \qquad (8)$$

fazendo:

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 \\ x^{(1)} = x_2 \\ x^{(2)} = x_2^{(1)} = x_3 \\ x^{(3)} = --- = x_4 \\ \cdot\ \text{—} \\ x^{(m)} = --- = x_m^{(1)} \end{array}\right\} \qquad (9)$$

e:

$$\sum_{i=0}^{m} a_i\, x^{(n-i)}(t) = a_0 x^{(m)} + \sum_{i=1}^{m} a_i\, x^{(m-i)}(t) = 0 \qquad (10)$$

ou:

$$a_0\, x_n^{(1)} = -\sum_{i=1}^{m} a_i\, x_{m-i+1}$$

então, poderá escrever-se a equação matricial seguinte :

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_m^{(1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ -\frac{a_n}{a_0} & -\frac{a_{n-1}}{a_0} & & \cdots & -\frac{a_1}{a_0} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{vmatrix} \qquad (11)$$

Designando por: a_{ij} um elemento genérico da matriz (m,m)

$x_{j\cdot}$ um elemento genérico do vector coluna do 2.º membro.

$\dot{x}_{i\cdot}$ um elemento genérico do vector coluna do 1.º membro.

será, finalmente:

$$[\dot{x}_{i\cdot}] = [a_{ij}] \cdot [x_{j\cdot}] \tag{12}$$

onde:

$$a_{nj} = -\frac{a_j}{a_0} \qquad e: \quad i,j = 1,2,3,\ldots,m$$

2.6 — Convem ainda exemplificar uma aplicação duma transformada de Laplace a uma equação diferencial da forma:

$$\sum_{i=0}^{m} \frac{a_i}{a_0} x^{(m-i)}(t) = \frac{1}{a_0}\varphi(t) \quad \text{com } a_0 \neq 0 \tag{13}$$

ou ainda: $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i x^{(m-i)} = g(t)$ sendo $\alpha_0 = 1$

Tendo em atenção a expressão (5), será:

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{m} \alpha_i x^{(m-i)}\right\} = X(s) \cdot [s^m \ldots s^0] \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} -$$

$$- [s^{n-1} \ldots s^0] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0 = 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ \alpha_{m-1} & \cdots & \alpha_1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x^{(0)}(0) \\ x^{(1)}(0) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(0) \end{bmatrix} \tag{14}$$

Designando por:

$$\left.\begin{aligned} [\alpha_{(n+1)\cdot}] &= \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} \\ [s_{\cdot(k+1)}] &= [s^k \ldots s^0] \\ [x^{(0)}_{m\cdot}] &= \begin{bmatrix} x^{(0)}(0) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

tendo em atenção (9)

$$[\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ \alpha_{n-1} & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

note-se que $[\alpha_{ij}]$ é invertível

e: $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$

teremos finalmente :

(16) $$X(s) \cdot \{ [s_{\cdot(m+1)}] \cdot [\alpha_{(n+1)\cdot}] \} = [s_{m\cdot}] \cdot [\alpha_{ij}] \cdot [x_{n\cdot}(0)] + G(s)$$

ou :

$$X(s) = \frac{[s_{\cdot(m)}] \cdot [\alpha_{ij}] \cdot [x_{n\cdot}(0)] + G(s)}{[s_{\cdot(n+1)}] \cdot [\alpha_{(n+1)\cdot}]} \qquad (17)$$

Consideremos o caso particular, em que $G(s) = 0$.

Então, fazendo :

$$[\alpha_{ij}]\,[x_{m\cdot}(0)] = [\beta_{m\cdot}] \qquad (18)$$

teremos :

$$X(s) = \frac{[s_{\cdot m}] \cdot [\beta_{m\cdot}]}{[s_{\cdot(n+1)}] \cdot [\alpha_{(m+1)\cdot}]} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (s^i \beta_i)}{\sum_{i=0}^{m} (s^i \alpha_m)} \qquad (19)$$

Esta expressão representa o quociente de dois polinómios, onde a ordem do numerador é quanto muito $(m-1)$ e, a do denominador é (m) pois $\alpha_0 = 1$, por hipótese.

2.7. — Finalmente, convem aplicar a transformada de Laplace a (12) :

$$[\dot{x}_{i\cdot}] = [a_{ij}] \cdot [x_{j\cdot}]$$

ou :

$$[\dot{x}_{i\cdot}] - [a_{ij}] \cdot [x_{j\cdot}] = 0$$

Aplicando a transformada de Laplace, teremos :

$$[X_i(s)] \left\{ s \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} - [a_{ij}] \right\} - \begin{bmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_m(0) \end{bmatrix} = 0$$

ou :

$$[X_i(s)] = \{ sI - [a_{ij}] \}^{-1} \cdot [x_{m\cdot}(0)] \qquad (20)$$

I = matriz unidade

3.— RESOLUÇÃO DO PROBLEMA PROPOSTO

3.1 — Apresentação do problema

Seja então dada uma função de transferência $X(s)$ da forma:

$$X(s) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (s^i \beta_i)}{\sum_{i=1}^{m} (s^i \alpha_i)} \qquad (21)$$

(veja-se 19)

Por outro lado, será: (veja-se 20):

$$[X_i(s)] = \{ s I - [a_{ij}] \}^{-1} \cdot [x_{m\cdot}(0)] \qquad (22)$$

Finalmente, será ainda: (veja-se 12):

$$[\dot{x}_{i\cdot}] = [a_{ij}] \cdot [x_{j\cdot}] \qquad (23)$$

Transformemos (23) por meio de um operador numérico linear V, invertível, e, seja:

$$[x_{i\cdot}] = V [y_{j\cdot}] \qquad (24)$$

então, (23) tomará a forma:

$$V [\dot{y}_{j\cdot}] = [a_{ij}] \cdot V \cdot [y_{j\cdot}]$$

ou:

$$[\dot{y}_{j\cdot}] = V^{-1} [a_{ij}] \cdot V \cdot [y_{j\cdot}] \qquad (25)$$

Aplicando a (25) a transformada de Laplace, temos:

$$[Y_{j\cdot}(s)] = [s I - V^{-1} \cdot [a_{ij}] \cdot V]^{-1} \cdot [y_{m\cdot}(0)] \qquad (26)$$

Revertendo das variáveis y para as variáveis x, e, tendo em atenção que:

$$\mathcal{L}\{[x_{i\cdot}]\} = V \cdot \mathcal{L}\{[y_{j\cdot}]\}$$

ou:

$$\mathcal{L}\{[y_{j\cdot}]\} = [Y_{j\cdot}(s)] = V^{-1} \mathcal{L}\{[x_{i\cdot}]\}$$

$$= V^{-1} [X_{i\cdot}(s)]$$

e, ainda que:

$$[y_{j\cdot}] = V^{-1} [x_{j\cdot}]$$

(26) poderá escrever-se da seguinte forma:

$$V^{-1}\cdot[X_{i.}(s)] = [s\,I - V^{-1}[a_{ij}]\,V]^{-1}\cdot V^{-1}\cdot[x_{m.}(0)]$$

tendo em atenção (18) será ainda:

$$[x_{m.}(0)] = [\alpha_{ij}]^{-1}\cdot[\beta_{m.}]$$

e, finalmente:

$$[X_{i.}(s)] = V\,[s\,I - V^{-1}[a_{ij}]\,V]^{-1}\cdot V^{-1}[\alpha_{ij}]^{-1}[\beta_{m.}] \qquad (27)$$

Repara-se agora que a primeira equação do sistema de equações fornece o valor de $X_1(s)$ e que $\mathcal{L}^{-1}\{X_1(s)\} = x_1(t) = x(t)$

3.2 — Características de matriz V

Ora, as matrizes V, $[a_{ij}]$, $[\alpha_{ij}]$ e $[\beta_{m.}]$ são numéricos, e o segundo membro de (27) é uma função de s.

Todo o problema consiste em escolher V duma forma conveniente, e, com efeito:

a.) $V^{-1}[a_{ij}]\,V$ é uma matriz diagonal: $-D$;

b.) $s\,I - D$ será também uma matriz diagonal;

c.) $[s\,I - D]^{-1}$ é fácil de determinar, e é também uma matriz diagonal E;

d.) Os elementos da diagonal da matriz E, são da forma: $\dfrac{k}{s+h}$;

e.) E, finalmente, a matriz resultante da efectuação das restantes operações:

$$V\cdot E\cdot V^{-1}\cdot[\alpha_{ij}]^{-1}[\beta_{m.}]$$

terá na primeira linha, a que nos interessa, termos da forma genérica: $\dfrac{r}{(s+h)^p}$ onde $p \leq m$

f.) e, portanto:

$$X_1(s) = \Sigma\left(\frac{r}{(s+h)^p}\right)$$

isto é, $X_1(s)$ ficou expandido segundo a forma de

Heaviside.

E, como: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\Sigma\left(\frac{r}{(s+h)^p}\right)\right\} = \Sigma\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{r}{(s+h)^p}\right\}$

(veja-se 2.2)

g.) O problema resume-se, a saber obter a transformada inversa de cada uma das parcelas.

Ora:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{r}{(s+h)^p}\right\} = \frac{r\, t^{p-1}\, e^{-ht}}{(p-1)!}$$

aplicando sucessivamente a propriedade de convolução.

3.3.— Forma da matriz V

O problema todo assenta pois em encontrar a forma de V.

Ora V é a conhecida matriz de Vandermonde que reduz: $V^{-1}[a_{ij}]V$ à forma de Jordan.

Se as raizes de $[a_{ij}]$ são todas distintas, e, sejam elas $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots \lambda_m$, então:

$$V = \begin{vmatrix} 1 & \text{---------} & 1 \\ \lambda_1 & \text{---------} & \lambda_m \\ \lambda_1^2 & \text{---------} & \lambda_m^2 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} & \text{---------} & \lambda_m^{m-1} \end{vmatrix}$$

Se uma raiz λ_1 (por exemplo) for de multiplicidade j, sendo $\Sigma j = m$, então: V toma a forma:

$$V = \left|\begin{array}{c} \underbrace{\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & \frac{\partial\lambda}{\partial\lambda} & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda^2 & \frac{\partial(\lambda^2)}{\partial\lambda} & \frac{1}{2!}\frac{\partial^2(\lambda^2)}{\partial\lambda^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \lambda^{m-1} & \frac{\partial(\lambda^{n-1})}{\partial\lambda} & \frac{1}{2!}\frac{\partial^2(\lambda^{k-1})}{\partial\lambda^2} & \cdots & \frac{1}{j!}\frac{\partial^j(\lambda^{n-1})}{\partial\lambda^j} \end{array}}_{j\lambda_1} \end{array} \;\Bigg|\; \underbrace{\quad\cdots\quad}_{K\lambda_2} \;\Bigg|\; \quad \right|$$

multiplo j vezes, portanto com j colunas

multiplo K vezes, e, com K colunas

Cada coluna é obtida da anterior, derivando parcialmente em relação a λ.

Obtidas estas diferenciais, substitui-se λ pelo valor da raiz, a que a partição da matriz corresponde.

Obtem-se desta forma uma matriz numérica (por ventura com elementos complexos)

Esta matriz V será tal que:

$V[a_{ij}]V^{-1}$ é uma matriz de Jordan, isto é:

$$V[a_{ij}]V^{-1} \equiv \left| \begin{array}{c|c|c} \underbrace{\left. \begin{array}{cccccc} {}_j\lambda_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & {}_j\lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & {}_j\lambda_1 & 1 & \cdots & 0 \\ - & - & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & {}_j\lambda_1 \end{array} \right\} j \text{ linhas}}_{j \text{ colunas}} & & \\ \hline & \begin{array}{cccc} {}_k\lambda_2 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & {}_k\lambda_2 & 1 & - \end{array} & \\ \hline & & \boxed{} \end{array} \right|$$

EXEMPLOS :

Seja dada a função de transferência :

$$X_1(s) = \frac{s+1}{[s+(-2-3j)]\,[s+(-2+3j)]}$$

deseja-se determinar $\quad x_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X_1(s)\}$

———x———

Vamos designar por: $\alpha = -2-3j$ e $\beta = +1$
$\gamma = -2+3j$

A matriz V de Vandermonde, terá a forma :

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha & -\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2+3j & 2-3j \end{bmatrix}$$

V^{-1} pode calcular-se do seguinte modo :

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad V \cdot V^{-1} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de onde :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha & -\gamma \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou :

$$\begin{cases} a + c = 1 \\ b + d = 0 \\ -a\alpha - \gamma c = 0 \\ -b\alpha - \gamma d = 1 \end{cases}$$

sistema que permite calcular : a, b, c e d.

e, vem:

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{-\gamma}{\alpha-\gamma} & \dfrac{-1}{\alpha-\gamma} \\[2ex] \dfrac{\alpha}{\alpha-\gamma} & \dfrac{1}{\alpha-\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2-3j}{-6j} & \dfrac{-1}{-6j} \\[2ex] \dfrac{-2-3j}{-6j} & \dfrac{1}{-6j} \end{bmatrix}$$

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{3}j & -\frac{1}{6}j \\[2ex] \frac{1}{2} - \frac{1}{3}j & \frac{1}{6}j \end{bmatrix}$$

Por outro lado será :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha\gamma & -(\alpha+\gamma) \end{bmatrix}$$

Para o efeito, bastará efectuar operações sobre o denominador :

$$[s+\alpha]\cdot[s+\gamma] = \underset{\substack{\uparrow \\ a_0}}{s^2} + \underset{\substack{\uparrow \\ a_1}}{(\alpha+\gamma)}\, s + \underset{\substack{\uparrow \\ a_2}}{\alpha\gamma}$$

de onde :

$$V^{-1}AV = \begin{bmatrix} \frac{-\gamma}{\alpha-\gamma} & \frac{-1}{\alpha-\gamma} \\ \frac{\alpha}{\alpha-\gamma} & \frac{1}{\alpha-\gamma} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha\gamma & -(\alpha+\gamma) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha & -\gamma \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3j & 0 \\ 0 & 2-3j \end{bmatrix}$$

convem calcular $[x(0)]$:

$$[x(0)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha+\gamma & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -(\alpha+\gamma) & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -\alpha-\gamma+\beta \end{bmatrix}$$

$$[sI - V^{-1}AV]^{-1} = \left[\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} s+\alpha & 0 \\ 0 & s+\gamma \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+\gamma} \end{bmatrix}$$

e, finalmente

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha & -\gamma \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{s+\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+\gamma} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{-\gamma}{\alpha-\gamma} & \frac{-1}{\alpha-\gamma} \\ \frac{\alpha}{\alpha-\gamma} & \frac{1}{\alpha-\gamma} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

[redacted]

e, obtem-se:

$$X_1(s) = \left(\frac{-\gamma}{\alpha-\gamma} \cdot \frac{1}{s+\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha-\gamma} \cdot \frac{1}{s+\gamma} \right) \cdot 1 +$$

$$+ \left(\frac{-1}{\alpha-\gamma} \cdot \frac{1}{s+\alpha} + \frac{1}{\alpha-\gamma} \, \frac{1}{s+\gamma} \right) \cdot (-\alpha-\gamma+\beta)$$

mas:

$$\alpha = -2-3j$$
$$\gamma = -2+3j$$
$$\beta = 1$$

e, vem:

$$X_1(s) = \frac{2-3j}{-6j} \cdot \frac{1}{s-2-3j} + \frac{-2-3j}{-6j} \cdot \frac{1}{s-2+3j} +$$

$$+ \left(\frac{-1}{-6j} \cdot \frac{1}{s-2-3j} + \frac{1}{-6j} \cdot \frac{1}{s-2-3j} \right) \cdot (2+3j+2-3j+1)$$

ou:

$$X_1(s) = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}j}{s-(2+3j)} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}j}{s-(2-3j)}$$

e:

$$x_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(X_1(s)\right) = \frac{1}{2} \left[(1-j)\, e^{(2+3j)t} + (1+j)\, e^{(2-3j)t} \right]$$

ou:

$$x_1(t) = e^{2t} (\cos 3t - \operatorname{sen} 3t).$$