# ★ AUTOMAÇÃO ★

pelo Prof. A.G. PORTELA

## 0.– TRANSFORMAÇÃO CONFORME

Sejam os espaços $R^m$ e $S^m$, e:

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots x_m) \qquad \text{com} \begin{cases} x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_m \in R^m \\ y_1 \times y_2 \times \cdots \times y_m \in S^m \end{cases}$$
$$y_2 = f_2(x_1, x_2 \cdots x_m)$$
$$\vdots$$
$$y_m = f_m(x_1, x_2 \cdots x_m)$$

O operador $F(f_1 f_2 \cdots f_m)$ é unívoco, se existir sempre um vector $[y_1\ y_2 \cdots y_m] \in S^m$ para todo o vector $[x_1\ x_2 \cdots x_m] \in R^m$.

E, se for ainda verdade a recíproca, isto é, se fôr:

$$\begin{cases} F(x_1 x_2 \cdots x_m) = (y_1 y_2 \cdots y_m) \\ (x_1 x_2 \cdots x_m) = F^{-1}(y_1 y_2 \cdots y_m) \end{cases}$$

então $F$ é um operador biunívoco e invertível.

Entre os operadores biunívocos e invertíveis, há uma classe que goza da propriedade seguinte: se as curvas $C_1$ e $C_2 \in R^m$ se cruzarem em $P \in R^m$, e o ângulo formado nesse ponto for $\alpha$, as curvas $F(C_1)$ e $F(C_2) \in S^m$ cruzam-se no ponto $F(P) \in S^m$, e, o ângulo por elas formado é igualmente $\alpha$.

À classe de operadores que goza dessa propriedade dá-se o nome de OPERADORES (ou TRANSFORMADAS) CONFORMES.

O ângulo $\alpha$ mede-se sempre no mesmo sentido (do relógio ou contrário ao relógio) e, tem a sua origem sempre numa das curvas escolhida arbitráriamente.

Portanto, usaremos a designação de CONFORME, se tambem for mantida a ORIENTAÇÃO do referencial.

## 1.– TEOREMA DE CAUCHY-RIEMAN

No plano será condição suficiente que:

1) As funções $f_1$ e $f_2$ admitam primeiras derivadas parciais contínuas.

2) $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}$ e: $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}$

ou: $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} = -\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}$ e: $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}$

3) $\dfrac{\partial (f_1 f_2)}{\partial (x_1 x_2)} \neq 0$ (Jacobiano diferente de zero)

Donde resulta imediatamente, que:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} = 0 \end{cases}$$

<u>COROLÁRIO</u> – Este teorema tem imediata aplicação ao espaço complexo.

Se: $\begin{cases} z = x + jy \\ w = u + jv \end{cases}$ e: $w = F(z)$

$F$ será o operador, que se for analítico, e $F'(z) \neq 0$ então $F$ é conforme.

$w = F(z)$ pode ainda escrever-se sob a forma
$w = F(x + jy)$ com $z \in R^2$ e $w \in S^2$.

Seja $C_z$ uma curva definida em $R^2$, em relação a um parametro $t$, será:

$$z(t) = x(t) + j \cdot y(t)$$

e, a curva transformada por $F$: $C_w$ definida em $S^2$, terá a forma

$$w(t) = F\left(x(t) + j \cdot y(t)\right)$$

Para um certo valor do parametro $t$, as tangentes às curvas $C_z$ e $C_w$ formam angulos com o eixo dos $xx$ e $F(xx)$ respectivamente:

$$\phi_z = \tan^{-1} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \arg\{\dot{x}(t) + j\,\dot{y}(t)\}$$

$$\psi_w = \arg\left\{\frac{d}{dt} F\{x(t) + j\,y(t)\}\right\}$$

$$\psi_w = \arg \left[ \frac{dF(z)}{dz} \cdot \{ \dot{x}(t) + \dot{y}(t) \cdot j \} \right]$$
$$= \left( \arg \frac{dF(z)}{dz} \right) + \arg \{ \dot{x}(t) + j \cdot \dot{y}(t) \}$$
$$= \arg \frac{dF(z)}{dz} + \phi_z$$

Donde:

$$\psi_w - \phi_z = \arg \frac{dF(z)}{dz} = \arg F'(z)$$

Quando à extensão dum arco $ds \in R^2$, e a sua transformada $d\sigma \in S^2$, bastará atender, a que:

$$\frac{ds}{dt} = | \dot{x}(t) + j \cdot \dot{y}(t) |$$

e:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \left| \frac{d}{dt} F\left(x(t) + j \cdot y(t)\right) \right|$$
$$= \left| F'(z) \cdot [ \dot{x}(t) + j\, \dot{y}(t) ] \right|$$

ou:

$$\frac{d\sigma}{dt} = |F'(z)| \cdot \frac{ds}{dt}$$

isto é, o arco sofre uma dilatação igual a $|F'(z)|$ quando transformado, alem da rotação: $\arg F'(z)$.

## 2.- TEOREMA DE RIEMAN

Se $S$ for um dominio fechado por uma curva simples de Jordan $C$, existe uma função analitica $F(z)$ única, regular em $S$, tal que $F$ é uma transformada conforme de $S$, no contradominio $w = F(z)$ e $|w| < 1$ que tem ainda, as seguintes propriedades:

- existe um ponto $z = a$ com $z \in S$, que é transformado na origem do eixo de coordenadas;
- e, em $z = a$ existirá uma direcção que a transformada $F$ transforma na direcção positiva do eixo Real.

## 3.- GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA, AO ESPAÇO A $n$ DIMENSÕES

essa generalização será imediata:

a) As funções $f_1 f_2 \cdots f_n$ admitem primeiras derivadas parciais todas contínuas.

b) A matriz $M$, tem a forma:

$$M = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

devendo ser:

$$\begin{cases} \text{se: } \dfrac{\partial f_k}{\partial x_j} = \mp \dfrac{\partial f_j}{\partial x_k} \\ \text{então: } \dfrac{\partial f_k}{\partial x_k} = \pm \dfrac{\partial f_j}{\partial x_j} \end{cases}$$

para todos os $j, k = 1, \dots n$

c) O Jacobiano

$$\frac{\partial (f_1 f_2 \cdots f_n)}{\partial (x_1 x_2 \cdots x_n)} \neq 0$$

## 4.- ALGUMAS TRANSFORMADAS CONFORMES IMPORTANTES

a) TRANSFORMAÇÃO LINEAR $\boxed{w = az + b}$

ou seja:

$$\begin{aligned} F &= a(\quad) + b \\ &= e^{\alpha + j\beta}(\quad) + b \end{aligned}$$

$\{$ a, b complexos

$b = 0$ $\begin{cases} \alpha = 0 & \beta \neq 0 & \longrightarrow & \text{Rotação} \\ \alpha \neq 0 & \beta = 0 & \longrightarrow & \text{Dilatação} \\ \alpha \neq 0 & \beta \neq 0 & \longrightarrow & \text{Rotação e Dilatação} \end{cases}$

$b \neq 0$ $\begin{cases} \alpha = 0 & \beta = 0 & \longrightarrow & \text{translação} \\ \alpha = 0 & \beta \neq 0 & \longrightarrow & \text{translação e rotação} \\ \alpha \neq 0 & \beta = 0 & \longrightarrow & \text{translação e dilatação} \\ \alpha \neq 0 & \beta \neq 0 & \longrightarrow & \text{translação, dilatação e rotação} \end{cases}$

b) TRANSFORMAÇÃO RECIPROCA $\boxed{w = \frac{1}{z}}$

$$F = \frac{1}{(\ )} e^{-j \arg (\ )}$$

donde:

$$\begin{cases} |w| = \left|\frac{1}{z}\right| \\ \arg w = -\arg z \end{cases}$$

c) TRANSFORMAÇÃO HOMOGRÁFICA $\boxed{w = \frac{az+b}{cz+d}}$

$$F = \frac{a(\ )+b}{c(\ )+d}$$ com $\begin{cases} a, b, c \text{ e } d \text{ complexos} \\ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \end{cases}$

Estas transformações têm como casos particulares a) e b).

Como exemplos de c), apresentam-se:

$c_1$) $e^{i\alpha} \frac{z-z_0}{1-z_0^c z}$ $\begin{cases} \alpha = \text{real} \quad z^c = \text{conjugado de } z \\ |z_0| < 1 \quad \text{Dominio } |z| < 1 \\ \text{Contradominio } |w| < 1 \end{cases}$

$c_2$) $e^{i\alpha} \frac{z-z_0}{z-z_0^c}$ $\begin{cases} \text{idênticamente, e } \operatorname{Img} z_0 > 0 \\ \text{Dominio de } \operatorname{Img} z > 0 \\ \text{Contradominio } |w| < 1 \end{cases}$

$c_3$) $\frac{az+b}{cz+d}$ $\begin{cases} a, b, c, d \text{ real} \\ ad - bc > 0 \\ \text{Dominio de } \operatorname{Img} z > 0 \\ \text{Contradominio de } \operatorname{Img} w > 0 \end{cases}$

$c_4$) $\frac{1}{z}$ $\begin{cases} 0 < a < b \\ |z| > a \\ |z| < b \end{cases}$ Contradominio: $\begin{cases} \operatorname{Real}(w) < \frac{1}{2a} \\ \operatorname{Real}(w) > \frac{1}{2b} \end{cases}$

d) TRANSFORMAÇÃO POLIGONAL

$\boxed{w = a_0 z^n + \cdots + a_n = \phi(z)}$ e: $F = \phi = \sum_{i=0}^{n} a_i (\ )^{n-i}$

Para que F seja uma transformada biunívoca (para poder ser CONFORME) então, há que impor restricções ao domínio de z.

e) TRANSFORMADA EXPONENCIAL , E , LOGARITMICA

$$\boxed{w = e^{z} \quad , \quad z = \ln w}$$

$$F = e^{(\ )} \qquad F_1 = F^{-1}$$

Novamente é necessário restringir o domínio de z.

f) TRANSFORMADA TRIGONOMÉTRICA

$$\boxed{w = \sin z}$$

$$F = \sin(\ )$$

a função inversa é:

$$z = \sin^{-1} w$$

e, só é unívoca, se restrita a um certo contra-domínio.

g) TRANSFORMADA RACIONAL

$$\boxed{w = z + \frac{1}{z}}$$

h) TRANSFORMADA DE SCHWARZ - CHRISTOFFEL

$$\boxed{w = A \int_{x_0}^{z} \frac{dz}{(z-x_1)^{k_1} \cdots (z-x_n)^{k_n}} + B}$$

onde $\left\{ \begin{array}{l} A \text{ e } B \text{ são constante complexas} \\ x_0, x_1, x_2 \cdots x_n \ , \ k_1\ k_2 \cdots k_n \text{ são constantes reais} \end{array} \right.$

A função é analítica para $Imag(z) > 0$

Como exemplo da transformada de Schwartz - Christoffel temos a TRANSFORMADA POLIGONAL , transformada de segmentos de recta no eixo dos xx (ou dos yy) numa linha poligonal.

E, dentro das transformadas poligonais, a do rectângulo.

Os pontos $x_1 \cdots x_n$ correspondem aos vértices do polígono, e, $K_i \pi_i$ aos ângulos externos.

Se nenhum vértice estiver no infinito, será ainda $\sum_i K_i \leq 2$ e: $\sum_i K_i \geq 1$.

Se o polígono é convexo fechado, será:

$$\sum_i K_i = 2 \qquad e \qquad 0 < K_i < 1$$

Se existir um vértice no infinito será:

$$1 \leq \sum_i K_i < 3$$