★ AUTOMAÇÃO ★

pelo Prof. A.G. PORTELA

OPERADORES HEAVISIDE

Designando por $D^n = \dfrac{d^n}{dt^n}$ t = variável real

o operador diferencial polinomial será representado por

$$\phi(D) = \sum_{k=0}^{n} a_k D^{n-k} \qquad a_k = a_k(t)$$

mas, regra geral a_k é constante.

Se f for derivável, e, existirem derivadas de f (em ordem a t) até à ordem n, será ainda

$$\phi(D) \cdot f = \sum_{k=0}^{n} a_k D^{n-k} f$$

se $a_n \neq 0$, a ordem do operador é n.

OPERAÇÕES SOBRE $\phi(D)$

1.- $\left(\phi_1(D) + \phi_2(D)\right) \cdot f = \phi_1(D) f + \phi_2(D) f$

2.- $\left(\phi_1(D) \cdot \phi_2(D)\right) \cdot f = \phi_1(D) \cdot \left[\phi_2(D) \cdot f\right]$ (volti sff

3.- O operador $\phi(D)$ é linear, com efeito

$$\phi(D)\left(c_1 f_1 + c_2 f_2\right) = c_1\, \phi(D) f_1 + c_2\, \phi(D) f_2$$

em que

c_1 e c_2 são constantes

4.- Recíproco de $\phi(D)$:

se $\phi(D)\, g(t) = f(t)$ e $D^k g(t) = 0$ para $t = 0$, e, $K = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, então $g(t) = \left(\dfrac{1}{\phi(D)}\right) \cdot f(t)$

5.- Se $f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k D^{n-k} x = \phi(D) \cdot x$, e

$$\begin{cases} D^{n-k} x = 0 & \text{para } t = 0 \\ \text{e } K = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \end{cases}$$

então

$$\frac{1}{\phi(D)} \cdot f(t) = x$$

Seja: $\left(a_0(t)\frac{d}{dt}\cdot b_0(t)\frac{d^2}{dt^2}\right)\cdot f$ um dos termos do produto direto $\phi_1\cdot\phi_2$..

Se for entendido como:

$a_0(t)\frac{d}{dt}\left(b_0(t)\frac{d^2}{dt^2}\cdot f\right)$ será então:

$$\Rightarrow a_0(t)\frac{d}{dt}\cdot\left(b_0(t)\frac{d^2 f}{dt^2}\right) \Rightarrow$$

$$\left[a_0(t)\frac{d b_0(t)}{dt}\cdot\frac{d^2 f}{dt^2} + a_0(t) b_0(t)\frac{d^3 f}{dt^3}\right]$$

e é evidente que este resultado é diferente se comutarmos o produto: $\left(b_0(t)\frac{d^2}{dt^2}\cdot a_0(t)\frac{d}{dt}\right)\cdot f$

que será $b_0(t)\frac{d^2}{dt^2}\left(a_0(t)\cdot\frac{df}{dt}\right) =$

$$= b_0(t)\frac{d^2 a_0(t)}{dt^2}\cdot\frac{df}{dt} + b_0(t)\,a_0(t)\frac{d^3 f}{dt^3}$$

Mas se a_0 e b_0 forem constantes então

$$\frac{d b_0(t)}{dt} = 0 = \frac{d^2 a_0 t}{dt^2}$$

e então podem comutar-se os termos do operador produto.

6.- Operações sobre $\dfrac{1}{\phi(D)}$

$$\left[\frac{1}{\phi_1(D)} + \frac{1}{\phi_2(D)}\right] f = \frac{1}{\phi_1(D)} \cdot f + \frac{1}{\phi_2(D)} \cdot f$$

$$\left[\frac{1}{\phi_1(D)} \times \frac{1}{\phi_2(D)}\right] f = \frac{1}{\phi_1(D)} \cdot \left[\frac{1}{\phi_2(D)} \cdot f\right]$$

7.- Relação de operadores

$$\frac{\phi_1(D)}{\phi_2(D)} \cdot f = \phi_1(D) \cdot \left[\frac{1}{\phi_2(D)} \cdot f\right] \neq \frac{1}{\phi_2(D)} \left[\phi_1(D) \cdot f\right]$$

8.- Funções inversas de D:

$$D^{-1} \cdot f(t) = \int_0^t f(u)\, du$$

$$(D-a)^{-1} \cdot f(t) = e^{at} \int_0^t e^{-au} f(u)\, du$$

$$(D-a)^{-k} \cdot f(t) = e^{at} \int_0^t \frac{e^{-au} (t-u)^{k-1}}{(k-1)!} f(u)\, du$$

9.- Se $\phi(r) = \sum_{k=0}^{m} a_k r^{m-k}$, e, se: $r_1, r_2 \ldots r_m$ forem as raízes de $\phi(r) = 0$, então: $\phi(D)$, vem:

$$\phi(D) = a_0 (D-r_1) \cdot (D-r_2) \cdot (D-r_3) \cdots (D-r_m)$$

e, identicamente:

$$\frac{1}{\phi(D)} = \frac{1}{a_0 (D-r_1) \cdot (D-r_2) \cdots (D-r_m)}$$

10.- Expansão de HEAVISIDE:

$$\frac{\phi_1(r)}{\phi_2(r)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\phi_1(r_k)}{\phi_2'(r_k)} \cdot \frac{1}{r-r_k}$$

e:

$$\frac{\phi_1(D)}{\phi_2(D)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\phi_1(r_k)}{\phi_2'(r_k)} \cdot \frac{1}{D-r_k}$$

CÁLCULO OPERACIONAL BASEADO EM TRANSFORMADAS INTEGRAIS

Seja $F(y) = \int_a^b f(t) \cdot K(t,y)\, dt$

F é uma transformada integral de f, e, pode simbolizar-se por: $F = T[f]$; $K(t,y)$ é uma função bem comportada, que caracteriza a transformada T.

Propriedades:

1ª T é linear: $T[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1\, T[f_1] + c_2\, T[f_2]$

2ª Transformada inversa: se $F = T[f]$ então: $f = T^{-1}[F]$

3ª T^{-1} é tambem linear, se T o for

4ª Convolução:

sejam f_1 e f_2, e, se for $T[f_3] = T[f_1] \cdot T[f_2]$ então $f_3 = f_1 * f_2$, é a convolução de f_1 e f_2.

5ª Propriedades da convolução:

$$f_1 * f_2 = f_2 * f_1$$
$$f_1 * (f_2 + f_3) = f_1 * f_2 + f_1 * f_3$$
$$f_1 * c f_2 = c f_1 * f_2 = c\,(f_1 * f_2)$$
$$f_1 * (f_2 * f_3) = (f_1 * f_2) * f_3$$

EMPREGO DAS TRANSFORMADAS NA RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS POLINOMIAIS

Seja dado um operador $\phi(D)$, e, uma função $f(t)$, se for possível encontrar um operador T, tal que:

$$T[\phi(D) \cdot f(t)] = H(y) \cdot T[f(t)]$$

então é possível resolver a equação diferencial seguinte:

$$\phi(D) \cdot f(t) = g(t) \qquad (1)$$

Com efeito, pode proceder-se da seguinte forma:

a.) Aplicando à equação (1) a transformada T:

$$T[\phi(D) \cdot f(t)] = T[g(t)]$$

ou: $H(y) \cdot T[f(t)] = T[g(t)]$

fazendo:

$$\begin{cases} T[f(t)] = F(y) \\ T[g(t)] = G(y) \end{cases}$$

b.) $H(y) \cdot F(y) = G(y)$

e: $$F(y) = \frac{G(y)}{H(y)} \qquad (2)$$

c.) Aplicando a (2) o operador inverso T^{-1}, teremos:

$$T^{-1}[F(y)] = f(t) = T^{-1}\left[\frac{G(y)}{H(y)}\right]$$

Como solução alternativa, teremos:

b'.) Porque $H(y) \cdot T[f(t)] = T[g(t)]$

será: $$T[f(t)] = \frac{1}{H(y)} \cdot T[g(t)]$$

designando por $h(t) = T^{-1}\left[\frac{1}{H(y)}\right]$, teremos:

$$T[f(t)] = T[h(t)] \cdot T[g(t)]$$
$$= T[h(t) * g(t)]$$

c'.) Aplicando o operador inverso T^{-1}, teremos finalmente:

$$f(t) = h(t) * g(t)$$

ALGUNS TIPOS DE TRANSFORMADAS INTEGRAIS

A.— TRANSFORMADA DE FOURIER

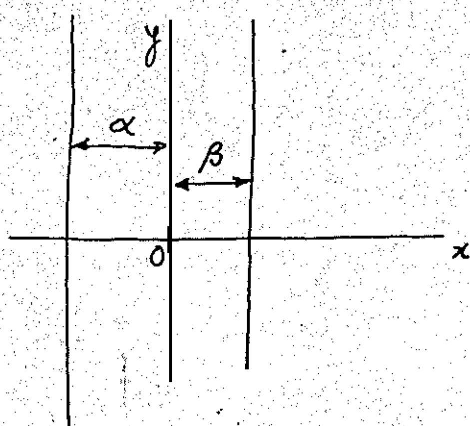
1.— Integral de Fourier

Se $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(w) \cdot e^{iwt} \, dw$, onde $K(t,y)$ se tem:

$$K(t,y) = K(w,t) = e^{iwt}$$

e, será: $F(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-iwt} \, dt$ (Teorema da inversão, devido a Mellin)

TEOREMA DA INVERSÃO (MELLIN)



Seja:

a) $\phi(z)$ analítica na região definida por $\alpha < x < \beta$, onde, α e β são numeros reais.

b) $\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |\phi(z)| \, dz =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(x+iy)| \, dy$$

se for: $z = x + iy$

c) $\phi(z) \to 0$ uniformemente, quando: $|y| \to \infty$

e: $\alpha + \varepsilon \leq x \leq \beta - \varepsilon$, e $\varepsilon > 0$ é finito e arbitrário.

d) θ é real e positivo:

Então, se:
$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \theta^{-z} \cdot \phi(z) \, dz$$

e: $\alpha < c < \beta$

e, será:
$$\phi(z) = \int_0^{\infty} \theta^{z-1} \cdot f(\theta) \, d\theta$$

Demonstração:

$$\phi(z) = \int_0^{\infty} \theta^{z-1}\, d\theta \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{2\pi i}\, \theta^{-z}\, \phi(z)\, dz$$

$$= \int_0^{1} \theta^{z-1}\, d\theta \int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} \frac{\theta^{-z_1}}{2\pi i}\, \phi(z_1)\, dz_1 \; +$$

$$+ \int_1^{\infty} \theta^{z-1}\, d\theta \int_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty} \frac{\theta^{-z_2}}{2\pi i}\, \phi(z_2)\, dz_2$$

onde $\left\{ \begin{array}{l} c_1 \text{ e } c_2 > \alpha \\ c_1 \text{ e } c_2 < \beta \end{array} \right.$

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} \phi(z_1)\, dz_1 \int_0^1 \theta^{(z-z_1)-1}\, d\theta \; +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty} \phi(z_2)\, dz_2 \int_1^{\infty} \theta^{(z-z_2)-1}\, d\theta$$

Esta permutação de integração é possível, porque:

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} |\phi(z)|\, dz \quad \text{é convergente.}$$

Mas: $$\int_0^1 \theta^{z-z_1-1}\, d\theta = \frac{1}{z-z_1} \left[\theta^{z-z_1} \right]_0^1 = \frac{1}{z-z_1}$$

porque: $R(z-z_1) = c - c_1 > 0$

$$\int_1^{\infty} \theta^{z-z_2-1}\, d\theta = \frac{1}{z_2-z} \left[\theta^{-(z-z_2)} \right]_1^{\infty} = \frac{1}{z_2-z}$$

porque: $R(z-z_2) = c - c_2 < 0$

Donde:

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} \frac{\phi(z_1)\, dz_1}{z_1-z} + \int_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty} \frac{\phi(z_2)\, dz_2}{z_2-z} \right]$$

mas: $\dfrac{\phi(z_1)}{z_1-z}$ é analítica, excepto em $z_1 = z$

e: $\dfrac{\phi(z_2)}{z_2-z}$ é analítica, excepto em $z_2 = z$

há apenas que calcular os resíduos em $z_1 = z$, e , em $z_2 = z$

$$\int_c \frac{\phi(z)}{z - z}\, dz = 2\pi i \; \phi(z = z) \quad -$$

c é o contorno constituido por c_1 e c_2, e duas ligações no ∞.

E, portanto, demonstrou-se que efectivamente existe a identidade: $\phi(z) = \phi(z)$

c.q.d.

Comparando:
$$F(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-iwt}\, dt$$

com uma transformada integral, teremos:

$$b = +\infty \qquad a = -\infty \qquad k(t,z) = k(t,w) = \frac{1}{2\pi}\, e^{-iwt}$$

e, assim:

$$\boxed{F(w) = T_F\,[f(t)]}$$

Como $D^k \cdot f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (iw)^k \cdot F(w)\; e^{iwt}\, dw$

será:

$$\boxed{T_F\,[D^k \cdot f(t)] = (iw)^k \cdot F(w)}$$

2.– Série de Fourier

– Função periódica, de período τ, é toda a função que satisfaz a igualdade: $f(t+\tau) = f(t) = f(t+n\tau)$ para todo o t real, e n inteiro.

– Se $f(t)$ é definida no intervalo $a < t < b$, então a $f_e(t)$ (extensão periódica de $f(t)$) é a função:

$$\begin{cases} f_e(t) = f(t) & \text{para} \quad a < t < b \\ f_e(t+\tau) = f(t) & \text{com} \quad \tau = b - a \end{cases}$$

– A série de Fourier de $f(t)$, sendo $f(t)$ uma função periódica, de período τ, é:

$$s_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n} \left\{ \left[\frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) \cdot \cos\left(n \frac{2\pi}{\tau}\right) dt \right] \cos n \frac{2\pi}{\tau} + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) \cdot \operatorname{sen}\left(n \frac{2\pi}{\tau}\right) dt \right] \operatorname{sen} \frac{n 2\pi}{\tau} \right\}$$

e, então : $\quad f(t) = s_{\infty}$

3.- Convergência da série de Fourier

* Convergência na média : se $f(t)$ for contínua

$s_n(t)$ = a soma dos n primeiros termos da série

então :

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \left[f(t) - s_n(t) \right]^2 dt \longrightarrow 0$$
quando $n \longrightarrow \infty$

* Uniformente convergente : se $f(t)$ for contínua
e $\frac{d}{dt} f(t)$ for contínua

então :

$$\max_{t_0 \leq t \leq t_1} \left| f(t) - s_n(t) \right| \longrightarrow 0$$
quando $n \rightarrow \infty$

4.- Unicidade

Se $s_n(t)$ corresponde a $f(t)$, então, quási em toda a parte , $f(t)$ é unica, e , reciprocamente.

5.- Série de Fourier (coseno ou seno)

Se $f(t) = f(-t)$ então :

$$f(t) = s_{\infty} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) \cos \frac{n 2\pi}{\tau} dt \right) \cdot \cos \frac{n 2\pi}{\tau}$$

Se $f(t) = -f(-t)$ então :

$$f(t) = s_\infty = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\tau} \int_0^\tau f(t) \cdot \cos \frac{m 2\pi}{\tau}\, dt \right) \text{sen } \frac{2\pi m}{\tau}$$

e, porque: $\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}\right)$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2i}\left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}\right)$$

será:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{im\frac{2\pi}{\tau}t} \cdot \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t)\, e^{-im\frac{2\pi}{\tau}t}\, dt$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

6.- Série de Fourier finita

Fazendo $\phi(m) = \int_0^\tau f(t) \cdot e^{im\frac{2\pi}{\tau}t}\, dt$

ou: $\phi(m) = \Phi\left[f(t)\right]$, interpretando esta expressão como uma transformada integral.

A função inversa de Φ: Φ^{-1} será definida por:

$$\Phi^{-1}\left[\phi(m)\right] = \Phi^{-1}\,\Phi\left[f(t)\right] = f(t)$$

$$= \frac{1}{\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \phi(m)\, e^{im\frac{2\pi}{\tau}t}$$

7.- Convolução

$f_1(t)$ e $f_2(t)$ são funções de período τ, a sua convolução é definida por:

$$f_3(t) = \int_0^\tau f_1(s) \cdot f_2(t-s)\, ds = f_1(t) * f_2(t)$$

e:

$$\Phi\left[f_1 * f_2\right] = \Phi\left[f_1\right] \cdot \Phi\left[f_2\right]$$

8.- Transformadas de funções derivadas

Se $f(t)$ tiver uma primeira derivada contínua, teremos que:

$$\Phi\left[f'(t)\right] = f(\tau) - f(0) + i\,m\frac{2\pi}{\tau}\,\Phi\left[f(t)\right]$$

Se $f(t)$ for periódico, de período τ, teremos que:

$$\Phi\left[f'(t)\right] = i n \frac{2\pi}{\tau} \, \Phi\left[f(t)\right]$$

e, se alem de periódica, tiver derivadas contínuas até à ordem $(k-1)$, será:

$$\Phi\left[f^{(k)}(t)\right] = \left(i n \frac{2\pi}{\tau}\right)^k \Phi\left[f(t)\right]$$

e, para um operador polinomial de coeficientes constantes:

$$\psi D = \sum_{k=0}^{m} a_k D^{m-k}$$

será:

$$\Phi\left[\psi(D) \cdot f(t)\right] = \psi\left[i n \frac{2\pi}{\tau} \cdot \Phi\left[f(t)\right]\right] = \psi\left[\Phi\left[f'(t)\right]\right]$$

9.- Solução particular da equação diferencial $\psi(D) \cdot x = f(t)$.

$\psi(D) \cdot x = f(t)$ tem, em geral, uma solução da forma $x = X(t)$ de período τ; $X(t)$ tem derivadas contínuas até à ordem $(m-1)$, e, se for $f(t)$ contínua, tambem é contínua a derivada de ordem (m).

Se: $\psi\left(i n \frac{2\pi}{\tau}\right) \neq 0$ para todo o $n \in (-\infty, +\infty)$

então:
$$\Phi\left[X(t)\right] = \frac{\Phi\left[f(t)\right]}{\psi\left(i n \frac{2\pi}{\tau}\right)}$$

Donde:
$$X = \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Phi\left[f(t)\right]}{\psi\left(i n \frac{2\pi}{\tau}\right)} e^{i n \frac{2\pi}{\tau}}$$

recorda-se que $\phi(n) = \Phi\left[f(t)\right]$

A solução desta equação pode ser obtida:

— ou, a partir de tabelas de Transformada de Fourier

— ou, recordando que $X = g * f = \int_0^{\tau} f(s) \cdot g(t-s)\, ds$

onde:
$$g = \Phi^{-1}\left[\frac{1}{\psi\left(i n \frac{2\pi}{\tau}\right)}\right]$$

Para o efeito veja-se que:

$$\Phi^{-1}\left[\frac{1}{\left(in\frac{2\pi}{\tau}-a\right)^{m+1}}\right]=\frac{1}{m!}\,\frac{\partial^m}{\partial a^m}\left(K_a e^{at}\right)$$

com $K_a = \left(1-e^{a\tau}\right)^{-1}$

No caso particular de $\psi(p)$ ter m raizes simples: $p_1, p_2, \cdots p_m$ será:

$$\frac{1}{\psi(p)}=\sum_{j=1}^{m}\frac{A_j}{p-p_j}$$

e, então:

$$x(t)=\sum_{j=1}^{m}A_j\,H_f\,(t,p_j)$$

como:

$$H_f(t,p_j)=e^{pt}\left[Q_f(t,p)+K_p\,e^{pt}\,Q_f(\tau,p)\right]$$

e:

$$Q_f(t,p)=\int_0^t f(s)\,e^{-ps}\,ds$$

e: $0\leq t\leq\tau$

10.- Integral de Fourier

Obtem-se a partir de s_∞ (veja-se 2), fazendo tender $\tau\to\infty$.

Fazendo $\frac{2\pi}{\tau}=w$, teremos:

$$f(t)=\int_0^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos wt\,dt\right]\cos wt+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\mathrm{sen}\,wt\,dt\right]\mathrm{sen}\,wt\right\}dw$$

os integrais $\int_{-\infty}^{+\infty}$ existem se:

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt \quad \text{existir}\\ f(t)\quad \text{for continua por partes}\end{cases}$$

e, se $f'(t)$ existir, então, a representação de $f(t)$ existirá tambem.

Tambem pode ser usada a forma:

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot e^{-iwt}\,dt\right)e^{iwt}\,dw$$

11.- Formas da transformada de Fourier (coseno ou seno, e exponencial)

$$\begin{cases} F_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos wt \, dt \\ f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_c(w) \cos wt \, dw \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \operatorname{sen} wt \, dt \\ f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(w) \operatorname{sen} wt \, dw \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_e(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-iwt} \, dt \\ f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F_e(w) \, e^{iwt} \, dw \end{cases}$$

12.- Propriedades da Transformada de Fourier

Desprezando a constante multiplicativa, definiremos a transformada de Fourier, como sendo:

a) $\Phi_\infty [f] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, e^{-iwt} \, dt$

b) Φ_∞ é um operador linear

c) $\Phi_\infty [f'] = iw \, \Phi_\infty [f]$

d) $\Phi_\infty [f^{(k)}] = (iw)^k \, \Phi [f]$

e) $f * g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \cdot g(t-s) \, ds = h(t)$

f) $\Phi [f * g] = \Phi_\infty [f] \cdot \Phi_\infty [g]$

g) $\Phi_\infty^{-1} [F] = f$ se $\Phi_\infty [f] = F$

h) $\Phi_\infty [\psi(D) \, f(t)] = \psi(iw) \cdot \Phi_\infty [f]$

i) De $\psi(D)\, x = f(t)$ resulta $\Phi_\infty[\psi(D)\, x] = \Phi_\infty[f]$
e, designando por:

$$F(w) = \Phi_\infty[f]$$

e:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(w)}{\psi(iw)}\, e^{iwt}\, dw = f * g$$

e:

$$g = \Phi_\infty^{-1}\left[\frac{1}{\psi(iw)}\right]$$

B.— TRANSFORMADA DE LAPLACE

1.– Definição

$$F(s) = \mathcal{L}[f] = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st}\, dt$$

com s complexo: $s = \sigma + iw$, e, $f(t)$ tambem o pode ser.

Donde:

$$\mathcal{L}[f] = \int_0^\infty f(t)\, e^{-\sigma t} \cdot e^{-iwt}\, dt$$

e, para σ constante $\mathcal{L}[f] = \Phi\left[f(t) \cdot e^{-\sigma t}\right]$

Donde, para σ constante, será, invertendo:

$$f(t) \cdot e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma + iw)\, e^{iwt}\, dt$$

e:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(s)\, e^{st}\, dw \qquad t > 0$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C F(s)\, e^{st}\, ds$$

e C é a recta no espaço complexo: $\sigma = 0$

Para que o integral exista, pode provar-se que é necessário que $\sigma > \sigma_0$, e, existe sempre um σ_0 finito que delimita, no espaço complexo, a região de existência. Em geral basta que $f(t) < e^{kt}$, com k finito, e t suficientemente grande.

2.– Transformada de Laplace de dois ramos

$$\mathcal{L}_1[f] = F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

3.- Transformada de Laplace - Stieltjes

$$G(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, dg(t)$$

e, esta, degenera na transformada $\mathcal{L}[\ ]$ se $f(t) = g'(t)$.

4.- Linearidade da transformada de Laplace $\mathcal{L}$

Se $f(t) = f_1(t) + i\, f_2(t)$

e, se existirem: $\begin{cases} \mathcal{L}(f_1) = F_1(s) & \text{para } \sigma > \sigma_1 \text{ e } \sigma_1 < +\infty \\ \mathcal{L}(f_2) = F_2(s) & \text{para } \sigma > \sigma_2 \text{ e } \sigma_2 < +\infty \end{cases}$

Então, para todo o par de constantes c_1 e c_2 será:

$$\mathcal{L}[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 \cdot \mathcal{L}[f_1] + c_2 \cdot \mathcal{L}[f_2]$$ para

todo o $\sigma > \sigma_{máx}(\sigma_1 \text{ e } \sigma_2)$

5.- Regras operatoriais

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s \cdot \mathcal{L}[f(t)] - f(0)$$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2 \cdot \mathcal{L}[f(t)] - f'(0) - s\, f(0)$$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \cdot \mathcal{L}[f(t)] - \left(s^{n-1} f(0) + \cdots + s \cdot f^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0)\right)$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\, dt\right] = \frac{1}{s}\, \mathcal{L}[f(t)]$$

PROPRIEDADES:

1.) Translação

Seja, para $t < c$, $f(t-c) = 0$, com $c \geq 0$

$$\mathcal{L}[f(t-c)] = \int_c^\infty f(t-c)\cdot e^{-st}\,dt = e^{-sc}\int_c^\infty f(t-c)\,e^{-s(t-c)}\,dt$$

$$= e^{-sc}\int_0^\infty f(\theta)\cdot e^{-s\theta}\,d\theta \qquad \text{com } \theta = t-c$$

$$= e^{-sc}\,\mathcal{L}[f(t)]$$

2.) Função unidade (ou degrau)

$$\begin{cases} u(t) = 0 & \text{para } t \leq 0 \\ u(t) = 1 & \text{para } t > 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s} \quad \text{(tabela)}$$

e: $$\mathcal{L}[u(t-c)] = \frac{e^{-cs}}{s}$$

3.) Função quadrada

$$f_1(t) = h\,[u(t-a) - u(t-b)]$$

com: $0 \leq a < b$

e, será: $$\mathcal{L}[f_1(t)] = \frac{h}{s}\left[e^{-as} - e^{-bs}\right]$$

4.) Função de vários degraus

$$f_u(t) = \left[h_1[u(t) - u(t-a_1)] + h_2[u(t-a_1) - u(t-a_2)] + \cdots\right]$$

$$\mathcal{L}[f_u(t)] = \frac{1}{s}\left[h_1(1-e^{-a_1 s}) + h_2(e^{-a_1 s} - e^{-a_2 s}) + \cdots\right]$$

5.) Função impulso

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[u(t) - u(t-\varepsilon)\right]$$

$$\mathcal{L}[I(t)] = \frac{1}{\varepsilon s}\left(1 - e^{-\varepsilon s}\right)$$

e: $$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{L}[I(t)] = 1$$ (impõe-se esta condição à indeterminação resultante)

e, escreve-se: $$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

6.) Função impulso no tempo c

$$\mathcal{L}[\delta(t-c)] = e^{-cs}$$

7.) $\mathcal{L}[u(t)] = \dfrac{\mathcal{L}[\delta(t)]}{s}$

e, então $u(t) = \int_0^t \delta(t)\, dt$ ou: $\delta t = u'(t)$

8.) Convolução

Sejam $f(t)$ e $g(t)$ funções contínuas por partes $(t \geq 0)$

$$f*g = \int_0^t f(u) \cdot g(t-u)\, du = h(t)$$

a.) $h(t)$ é contínua para $t > 0$

b.) $f*g = g*f$

c.) Se existirem: $\int_0^\infty |f(t)| \cdot e^{-\sigma t}\, dt$, $\int_0^\infty |g(t)| e^{-\sigma t}\, dt$

e: $\int_0^\infty |h(t)|\, e^{-\sigma t}\, dt$ para $\sigma > \sigma_0$, então existem:

$\mathcal{L}[f]$, $\mathcal{L}[g]$ e $\mathcal{L}[h]$, e, ainda será: (volta)

$$\mathcal{L}[f*g] = \mathcal{L}[f] \cdot \mathcal{L}[g] = \mathcal{L}[h]$$

d.) $f*(g+h) = f*g + f*h$

$f*(c \cdot g) = (c \cdot f)*g = c \cdot (f*g)$ $\quad c =$ constante

e.) $f*(g*h) = (f*g)*h$

f.) $\underbrace{e^{at} * e^{at} * \cdots * e^{at}}_{n} = \dfrac{t^{n-1}\, e^{at}}{(n-1)!}$

g.) $t^m \cdot e^{at} * t^n e^{at} = \dfrac{m!\, n!}{(m+n+1)!}\, t^{m+n+1}\, e^{at}$

h.) $e^{at} * e^{bt} = \dfrac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}$ para $a \neq b$

9.) Inversão

Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ então: $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$

será então:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) \cdot e^{st}\, dw = \lim_{b \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^{+b} F(s)\, e^{st}\, dw$$

para que $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ exista, é necessário que satisfaça a certas condições, nomeadamente:

a.) $F(s)$ é analítica para $\sigma > \sigma_0$, e, para $s = \infty$, e, tem aí um zero, e:

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s^n} \qquad |s| > R$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \frac{t^n}{n!}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{st} F(s)\, ds \qquad C = \text{circulo, sendo: } |s| = R_0 > R$$

b.) Se, alem de se verificarem as condições (a), for ainda $F(s)$ analitica, para s finito, excepto em $s_1\, s_2 \cdots s_n$ então $f(t)$ é igual à soma dos resíduos de $F(s) \cdot e^{st}$ para $s = s_1\, s_2 \cdots s_n$

c.) Se $F(s)$ é analitica para $\sigma > \sigma_0 \geq 0$, e, tem a forma
$$F(s) = \frac{c}{s} + \frac{\mu(s)}{s^{1+\delta}} \qquad (\delta > 0)$$
e: $\mu(s)$ é limitado para $\sigma \geq \sigma_1 > \sigma_0$

d.) Se $F(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$ é uma função racional

Se $Q(s)$ só tiver raizes simples $s_1\, s_2 \cdots s_n$, então, o resíduo em s_k é: $(s_k t)\, \dfrac{P(s_k)}{Q'(s_k)}$ e, então:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{s_k t}\, P(s_k)}{Q'(s_k)}$$

10.) Regras operatoriais

a.) $f(t)$ tem um periodo τ, então:
$$\mathcal{L}[f] = \frac{1}{1+e^{-s\tau}} \int_0^{\tau} e^{-st} f(t)\, dt$$

b.) $\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \qquad a > 0$

c.) $\mathcal{L}[e^{-at} f] = F(s+a)$

d.) $\mathcal{L}[t^n \cdot f] = (-1)^n F^{(n)}(s)$

e.) $\mathcal{L}[t^{-n} f] = \underbrace{\int_s^{\infty} \cdots \int_s^{\infty}}_{n} F(s)\, ds \cdots ds$

11.) Aplicações

a.) Seja dada a equação diferencial $f(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{n-k} D^k \cdot x$ designa-se por:

FUNÇÃO CARACTERISTICA: $V(s) = \sum_{k=1}^{n} a_{n-k} s^k$

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA: $Y(s) = \dfrac{1}{V(s)}$

Seja: $f(t)$ contínua por partes para $t \geq 0$, e, tenha uma transformada de Laplace absolutamente convergente, para $\sigma > \sigma_0$. Com valores iniciais para $t=0$:

$$x(0) = \alpha_0 \quad \cdots \quad x^{(k)}(0) = \alpha_k \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, m-1$$

então:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[\sum_{k=1}^{m} a_{m-k} D^k x\right] = \left[\sum_{k=1}^{m} a_{m-k}\, s^k\right] \cdot \mathcal{L}[x(t)] - Q(s)$$

$$= V(s) \cdot X(s) - Q(s)$$

com:

$$\begin{cases} X(s) = \mathcal{L}[x(t)] \\ V(s) = \sum\limits_{k=1}^{m} a_{m-k}\, s^k \\ Q(s) = a_0 \alpha_0 s^{m-1} + (\alpha_0 a_1 + \alpha_1 a_0) s^{m-2} + \cdots + \\ \qquad + (\alpha_0 a_{m-1} + \cdots + \alpha_{m-1} a_0) \end{cases}$$

Donde:

$$X(s) = \frac{Q(s)}{V(s)} + \frac{F(s)}{V(s)} = Y(s) \cdot Q(s) + Y(s) \cdot F(s)$$

ou finalmente:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}[Y(s) \cdot Q(s)] + \mathcal{L}^{-1}[Y(s) \cdot F(s)]$$

b.) Comentários ao modo de tratar esta ultima expressão.

* $Y(s) \cdot Q(s)$ é uma função racional própriamente dita
* $Y(s) \cdot F(s)$ pode ser tratada, por exemplo deste modo:

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s) \cdot F(s)] = y(t) * f(t) = \int_0^t y(u) \cdot f(t-u)\, du$$

admite-se que $Y(s)$ tem transformada inversa.

* Se $V(s)$ tem raizes simples, apenas, então:

$$Y(s) = \sum_{j=1}^{m} \frac{A_j}{s - s_j} \qquad \text{e:} \qquad y(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j\, e^{s_j t}$$

então:

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s) \cdot F(s)] = \sum_{j=1}^{m} A_j\, e^{b_j t} \int_0^t f(u)\, e^{-b_j u}\, du$$

* Se $V(s)$ tiver raizes multiplas, por exemplo em $Y(s)$, no somatório o termo j é multiplo k, e então esse termo toma nesse somatório a forma $\dfrac{A_j}{(s-s_j)^k}$ donde resulta para $y(t)$, o termo correspondente (j):

$$\frac{A_j\, t^{k-1}\, e^{s_j t}}{(k-1)!}$$

e, para $\mathcal{L}^{-1}[Y(s)\cdot F(s)]$, o termo correspondente (j):

$$\frac{A_j}{(k-1)!}\, e^{s_j t} \int_0^t f(u)\,(t-u)^{k-1}\, e^{-s_j u}\, du$$

c.) Solução particular

$(a_0 = 0, \dots a_{m-1} = 0) \Rightarrow Q(s) = 0$
então:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)\cdot F(s)]$$

Alem do método exposto em (b) pode ainda resolver-se esta expressão segundo este outro caminho:

por definição:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Y(s)\cdot F(s)\, e^{st}\, dw \quad \text{para } \sigma = \text{const}$$

e, esta expressão pode ser resolvida por expansão em série, e, pela teoria dos resíduos.

Assim, se: $f(t) = e^{bt}\, p(t)$ em que: $p(t)$ é um polinómio em t de grau m, então:

★ se $V(b) \neq 0$, será:

$$x(t) = e^{bt}\left[Y(b)\cdot p(t) + \frac{Y^{(1)}(b)}{1!}\, p^{(1)}(t) + \dots + \frac{Y^{(m)}(b)}{m!}\, p^{(m)}(t)\right]$$

★ se $V(b) = 0$, será:

$$V(s) = (s-b)^k \cdot W(s) \quad \text{com} \quad W(b) \neq 0$$

Seja $Z(s) = \frac{1}{W(s)}$, e seja: $p_1(t)$ um polinómio obtido pela integração de:

$$Z(b)\cdot p(t) + Z^{(1)}(b)\cdot p^{(1)}(t) + \dots + \dots + \frac{Z^{(m)}(b)}{m!}\, p^{(m)}(t)$$

K vezes de 0 a t, então:

$e^{bt}\, p_1(t)$ é uma solução particular

d.) Sistemas de equações simultâneas

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + y = 13\, e^{2t} \\[2ex] \dfrac{dx}{dt} - 2x + \dfrac{d^2y}{dt^2} + 3\dfrac{dy}{dt} + 5y = 15\, e^{2t} \end{cases}$$

sabendo que: $t=0 \Longrightarrow x=1,\ y=0,\ \dfrac{dx}{dt}=0,\ \dfrac{dy}{dt}=1$
teremos:

$$\begin{cases} s^2 X(s) + (2s+1)\, Y(s) = s + \dfrac{13}{s-2} & Q(s) = s \\ (s-1)\, X(s) + (s^2+3s+5)\, Y(s) = 2 + \dfrac{15}{s-2} & Q(s) = 2 \end{cases}$$

ou, seja:

$$\begin{cases} X(s) = \dfrac{s^4+s^3+8s^2+5s+54}{(s-2)(s+1)(s+2)(s^2+1)} \\ Y(s) = \dfrac{s^3+15s^2-17s+26}{(s-2)(s+1)(s+2)(s^2+1)} \end{cases}$$

ou:

$$\begin{cases} X(s) = \dfrac{2}{s-2} + \dfrac{-19/2}{s+1} + \dfrac{21/5}{s+2} + \dfrac{1/10\,(43s-51)}{(s^2+1)} \\ Y(s) = \dfrac{1}{s-2} + \dfrac{-19/2}{s+1} + \dfrac{28/5}{s+2} + \dfrac{1/10\,(29s+7)}{s^2+1} \end{cases}$$

e, aplicando a transformada inversa:

$$\begin{cases} x = 2e^{2t} - \dfrac{19}{2} e^{-t} + \dfrac{21}{5} e^{-2t} + \dfrac{43\cos t - 51 \operatorname{sen} t}{10} \\ y = e^{2t} - \dfrac{19}{2} e^{-t} + \dfrac{28}{5} e^{-2t} + \dfrac{29\cos t + 7 \operatorname{sen} t}{10} \end{cases}$$

e.) Resposta a funções impulso

e_1) $\dfrac{dx}{dt} + x = \delta(t) \qquad x(0) = \alpha_0$

$$-\alpha_0 + (s+1)\, X(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

onde $Q(s) = -\alpha_0$, donde: $X(s) = \dfrac{1+\alpha_0}{s+1}$

e: $x(t) = (1+\alpha_0)\, e^{-t}$

e_2) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} = \delta(t)$ com: $x(0) = \alpha_0$ e: $\dfrac{dx}{dt}(0) = \alpha_1$

$$(s^2+s)\, X(s) - \alpha_0 s - \alpha_0 - \alpha_1 = 1$$

$$X(s) = \frac{1+\alpha_0 s + \alpha_0 + \alpha_1}{s+s^2}$$

e: $x(t) = 1 + \alpha_0 + \alpha_1 - (1+\alpha_1)\, e^{-t}$

e_3) Solução geral

★ Seja dado $V(D)\,x = \frac{df}{dt} = (a_0 D^m + \cdots)\,x$

suponhamos que existe uma descontinuidade finita (ou de salto) para $t=c$, mas $t \neq c$ é contínua, e, as suas derivadas também o são.

$$V(s)\ \mathcal{L}[x] = s\,\mathcal{L}[f] - f(0)$$

★ Seja $V(D)\,x = W(D)\,f(t)$, então, se a ordem de V é menor do que W, então x é uma função ideal.

★ Se f é contínua excepto para $t=c$, então, faça-se $f = f_1 + K_1 \cdot u(t-c)$ com f_1 contínua, mesmo em $t=c$ então:

$$\begin{cases} f(t) = f_1(t) + K_1 \cdot u(t-c) \\ f'(t) = f_2(t) + K_2 \cdot u(t-c) + K_1 \cdot \delta(t-c) \\ f''(t) = f_3(t) + K_3 \cdot u(t-c) + K_2 \cdot \delta(t-c) + K_1 \cdot \delta'(t-c) \\ \cdots\cdots \end{cases}$$

e, aplicando a transformada de Laplace:

$$\begin{cases} \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] + k_1 \cdot \mathcal{L}[u(t-c)] \\ \mathcal{L}[f'(t)] = \mathcal{L}[f_2(t)] + K_2 \cdot \mathcal{L}[u(t-c)] + K_1 \cdot \mathcal{L}[\delta(t-c)] \\ \cdots \end{cases}$$

f.) Função ponderal

Da expressão $X(s) = Y(s) \cdot F(s)$ pode concluir-se que:
$F(s)$ é a função entrada (input) transformada
$X(s)$ é a função saída (output) transformada
$Y(s)$ é a função de transferência.

Donde:

$$x(t) = y(t) * f(t) = \int_0^t f(t-u) \cdot y(u)\,du$$

então, $y(u)$ comporta-se como um pêso que actuando sobre $f(t)$, vai modificar o respectivo integral.

Esta função pode ser normalizada a 1, se o:

$$\int_0^\infty y(t)\,dt = 1$$

para o que basta um deslocamento na origem.