★ AUTOMAÇÃO ★ pelo Prof. A.G. PORTELA

FUNÇÃO DE VARIÁVEL COMPLEXA

$$y = f(z) \qquad e: \qquad \begin{array}{l} z = x + jy \\ y = P(x,y) + j\,Q(x,y) \end{array}$$

1.- NOÇÕES FUNDAMENTAIS

1.1 — CONTINUIDADE

$$|z-a| < \eta \rightarrow |f(z) - f(a)| < \varepsilon(\eta)$$

1.2 — UNIFORME E UNÍVOCA

$$z_1 \text{ e } z_2 \in Z \longrightarrow f(z_1) = f(z_2) \quad \text{sse} \quad z_1 = z_2$$

1.3 — FUNÇÃO ANALITICA

$$\underline{f(z)} = \{ f(z) : f(z) = \text{é analitica} \}$$

então : $\left\{ \begin{array}{l} \underline{f(z)} = \{ f(z) : f(z) = \text{é uniforme} \} \\ \text{e:} \\ \lim\limits_{\delta z \to 0} \dfrac{f(z+\delta z) - f(z)}{\delta z} \quad \text{existe, e é independente de } \delta z \end{array} \right.$

2.- CONDIÇÕES DE CAUCHY - RIEMAN

$$\lim_{\delta z \to 0} \frac{f(z+\delta z) - f(z)}{\delta z} = \lim_{\delta z \to 0} \frac{\delta f(z)}{\delta z} = \lim_{\delta z = 0} \frac{\delta P + j\,\delta Q}{\delta x + j\,\delta y} =$$

$$= \lim_{\delta z = 0} \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + j\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{\partial P}{\partial y} + j\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\delta y}{\delta x + j\,\delta y}$$

$$= \lim_{\delta z = 0} \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + j\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial P}{\partial y} + j\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\frac{\delta y}{\delta x}}{1 + i\,\frac{\delta y}{\delta x}}$$

$$= \lim_{\delta z = 0} \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial y} + j\frac{\partial Q}{\partial y}\right) \times \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} + j\frac{\partial Q}{\partial x}\right) / \left(\frac{\partial P}{\partial y} + j\frac{\partial Q}{\partial y}\right) + \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)\right]}{j\left[\frac{1}{j} + \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)\right]}$$

e, para que o limite seja independente de $\dfrac{\delta y}{\delta x}$, terá de ser :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} + j\frac{\partial Q}{\partial x}\right) \Big/ \left(\frac{\partial P}{\partial y} + j\frac{\partial Q}{\partial y}\right) = \frac{1}{j}$$

ou:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} \\ \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} \end{array}\right\} \quad \text{Condições de CAUCHY RIEMAN}$$

3.- <u>EQUAÇÃO DE LAPLACE</u>

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$$

ou seja:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0 \end{array}\right.$$

4.- <u>CRITÉRIO DE ANALITICIDADE</u>

Toda a função analitica, pode escrever-se em função de z apenas.

$$f(z) = P(x,y) + j\,Q(x,y)$$

$$z = x + jy \qquad \text{donde:} \qquad x = z - jy$$

derivando, em ordem a y, de $f(z)$ teremos:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y}\right) + j\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)$$

mas: $\dfrac{\partial x}{\partial y} = -j$

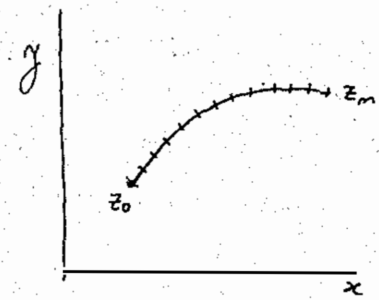
logo: $$\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right) + j\left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

porem, se for analitica, os dois parêntesis são idênticamente nulos, portanto, a derivada é independente de y, o mesmo se feria para x, e, a recíproca tambem é verdadeira.

5.- <u>FUNÇÃO HOLOMORFA</u>

é uma função: contínua, uniforme, analitica.

6.- INTEGRAL CURVILINEO



P_m é o ponto compreendido entre Z_{m-1} e Z_m :

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} f(P_m) \cdot \delta Z_m$$

$$\delta Z_m = Z_m - Z_{m-1}$$

$$\int_C f(z)\, dz = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{m=1}^{n} f(P_m) \cdot \delta Z_m$$

Se $|f(z)|$ for limitado, e, M o supremo, será :

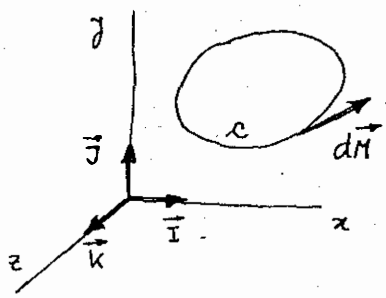
$$\int_C f(z)\, dz \leq M \int_C dz \leq M \int_C |dz| = M \cdot s$$

sendo s a extensão do arco.

Outra forma : $f(z) = P + jQ$ e: $dz = dx + j\, dy$

$$\int_C f(z)\, dz = \int_C (P dx - Q dy) + j \int_C (P dy + Q dx)$$

7.- TEOREMA DE CAUCHY :



Se $f(z)$ é holomorfa no domínio, e, na fronteira do domínio delimitado por C, então :

$$\int_C f(z)\, dz = 0$$

Sejam dados os vectores $\begin{cases} \vec{a} = a_x + j\, a_y \\ d\vec{M} = dx + j\, dy \end{cases}$

ambos no plano $\vec{I}, \vec{J}$, então, pelo Teorema de STOKES :

$$\iint_S \vec{m} \cdot \text{rot}\, \vec{a}\, d\sigma = \int_C \vec{a}\, d\vec{M}$$

sendo : $d\vec{M}$ = elemento de arco, e, $d\sigma$ = elemento de área $dx\,dy$.

$$\vec{m} \cdot \text{rot}\, \vec{a} = \vec{K} \cdot \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & 0 \end{vmatrix} = (\vec{K} \cdot \vec{K}) \left(\frac{\partial}{\partial x} a_y - \frac{\partial}{\partial y} a_x \right)$$

onde $\vec{K} \equiv \vec{m}$

$$\vec{n} \cdot \operatorname{rot} \vec{a} = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}$$

$$\vec{a} \cdot d\vec{M} = \left(a_x \vec{I} + a_y \vec{J}\right) \cdot \left(dx\, \vec{I} + dy\, \vec{J}\right) = a_x\, dx + a_y\, dy$$

donde :

$$\iint_S \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_c \left(a_x\, dx + a_y\, dy\right)$$

Expressão geral, que se pode aplicar ao espaço complexo:

se : $\begin{cases} a_x = Q(x,y) \\ a_y = P(x,y) \end{cases}$ $\longrightarrow$ será: $\displaystyle\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_c P\,dx + Q\,dy$

ou, se : $\begin{cases} a_x = P(x,y) \\ a_y = -Q(x,y) \end{cases}$ $\longrightarrow$ será: $\displaystyle\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_c P\,dx - Q\,dy$

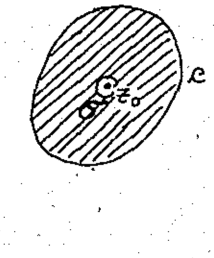
ora, se $f(z)$ for holomorfa (portanto analítica), as condições de Cauchy - Rieman são satisfeitas, e, portanto, os primeiros membros são nulos, o que demonstra o Teorema de Cauchy.

O valor do integral $\int_c$ dependente apenas das condições iniciais e finais (a função deriva de um potencial).

8.- FÓRMULA DE CAUCHY

Seja $f(z)$ uma ~~função~~ holomorfa, a função $\dfrac{f(z)}{z-z_0} = \varphi(z,z_0)$ é holomorfa, excepto para um ponto : $z = z_0$, onde $\dfrac{f(z)}{z-z_0} = \infty$, e, portanto, a função é ilimitada.

No domínio definido pelos contornos σ e $\mathcal{C}$ a função $\varphi(z,z_0)$ é holomorfa.



Vamos aplicar aos contornos $\mathcal{C}$ e σ o integral curvilíneo, à função $\varphi(z,z_0)$ (não holomorfa)

$$\int_{\mathcal{C}} \varphi(z,z_0)\, dz = \Big[\underbrace{\int_{\mathcal{C}} \varphi(z,z_0)\, dz - \int_\sigma \varphi(z,z_0)\, dz}_{\text{neste domínio } \varphi(z) \text{ é holomorfa, e, portanto: } [\ldots] = 0} \Big] + \int_\sigma \varphi(z,z_0)\, dz$$

o que mostra que o contorno σ é arbitrário, desde que, contido em C, contenha no seu interior z_0.

Cálculo:

$$\int_\sigma \varphi(z,z_0)\,dz = \int_\sigma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_\sigma \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz +$$

$$+\int_\sigma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz$$

mas: $\displaystyle\int_\sigma \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz = f(z_0)\cdot\int_\sigma \frac{dz}{z-z_0}$ e, $f(z_0)\neq\infty$

se σ for uma circunferência de centro em z_0:

será $\rho = |z-z_0|$ $\qquad z-z_0 = \rho\, e^{j\theta}$

$$dz = j\rho\, e^{j\theta}\,d\theta$$

e:

$$\int_\sigma \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz = f(z_0)\cdot\int_0^{2\pi} \frac{j\rho\, e^{j\theta}}{\rho\, e^{j\theta}}\,d\theta = j\cdot 2\pi\cdot f(z_0)$$

mas: $\displaystyle\int_\sigma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz$ porque: $|f(z)-f(z_0)| < \varepsilon(\delta)$

para: $|z-z_0|<\delta$ (note-se que $f(z)$ é contínuo, em z_0).

será:

$$\lim_{\rho\to 0}\int_\sigma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz \leq \lim_{\rho\to 0}\left|\int_\sigma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| \leq$$

$$\leq \lim_{\rho\to 0}\int_\sigma \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}\cdot|dz| \leq \lim_{\rho\to 0}\int_\sigma \frac{\varepsilon}{\rho}\,|dz| =$$

$$= \lim_{\rho\to 0}\int_0^{2\pi}\frac{\varepsilon}{\rho}\,\rho\,d\theta = \lim_{\rho\to 0} 2\pi\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0} 2\pi\varepsilon = 0$$

Donde:

$$\boxed{\int_C \varphi(z,z_0)\,dz = \int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi j\cdot f(z_0)}$$

9.- DERIVADA DE ORDEM n

Derivando n vezes em ordem a z_0, teremos esta outra expressão:

$$2\pi j \; f^{(n)}(z_0) = \int_C \frac{d^n \varphi(z, z_0)}{d z_0^{\,n}} \, dz$$

$$= \int_C \frac{n! \, f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz$$

ou:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi j} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz$$

10.- SÉRIE DE TAYLOR DE FUNÇÕES DE VARIÁVEL COMPLEXA

Sejam dados: $f(z)$ - holomorfa no domínio, e, na fronteira de G circular, com centro em $\underline{a}$.

z_0 - um ponto interior desse domínio.

Será (Fórmula de Cauchy):

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \int_G \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz$$

mas:

$$\frac{1}{z - z_0} = \frac{1}{z - a} \left[1 + \frac{z_0 - a}{z - a} + \cdots + \frac{(z_0 - a)^n}{(z - a)^n} + \cdots \right]$$

porque:

$|z_0 - a| < |z - a|$; esta série será convergente, pois: z_0 está no interior do círculo, e, z está no contorno (circunferência).

Substituindo, teremos:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \int_G \frac{f(z)}{z - a} \, dz + \cdots + \frac{(z_0 - a)^n}{2\pi j} \int_G \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} \, dz + \cdots$$

sendo:

$$A_n = \frac{1}{2\pi j} \int_G \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} \, dz = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$$

será:

$$f(z_0) = f(a) + \frac{z_0 - a}{1!} f^{(1)}(a) + \cdots + \frac{(z_0-a)^m}{m!} f^{(m)}(a) + \cdots$$

que é a série de TAYLOR, para uma função de variável complexa.

11.- SÉRIE DE MAC LAURIN

Caso particular de $a = 0$, será:

$$f(z_0) = f(0) + z_0 f^{(1)}(0) + \cdots + \frac{z_0^m}{m!} f^{(m)}(0) + \cdots$$

que é a série de MAC LAURIN.

12.- PONTOS SINGULARES

Estes, podem classificar-se em:

12.1 — PONTO ORDINÁRIO = ponto rodeado de uma vizinhança, que permite um desenvolvimento em série de Taylor.

12.2 — PONTO SINGULAR = é um ponto que não é ordinário, e, estes podem classificar-se, em:

12.2.1 — POLOS = pontos singulares isolados, na vizinhança dos quais $f(z)$ é uniforme, e, nesses pontos $\frac{1}{f(z)}$ tem pontos ordinários.

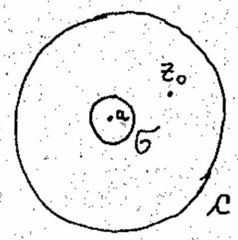
12.2.2 — PONTOS SINGULARES ESSENCIAIS = pontos singulares isolados, na vizinhança dos quais $f(z)$ é uniforme, mas $\frac{1}{f(z)}$ não tem pontos ordinários nesses pontos.

12.2.3 — PONTOS CRITICOS ou de RAMIFICAÇÃO = são pontos singulares na vizinhança dos quais $f(z)$ não é uniforme.

13. — SÉRIE DE LAURENT

Consideremos um contorno C, e, uma função $f(z)$, que tem um polo ou ponto singular essencial em a.

Um segundo contorno σ, envolverá o ponto a, com centro em a e raio r.



$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C-\sigma} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz + \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz$$

Desenvolvendo em série:

$$f(z_0) = \left\{ A_0 + A_1 (z_0-a) + \dots + A_m (z_0-a)^m \right\} + \\ + \left\{ A_{-1} (z_0-a)^{-1} + A_{-2} (z_0-a)^{-2} + \dots + A_{-m} (z_0-a)^{-m} \right\} + \dots$$

sendo:

$$A_m = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}}\, dz$$

$$A_{-m} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma} \frac{f(z)}{(z-a)^{1-m}}\, dz$$

Aplicações:

— Calcular $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ em $z=1$

o termo geral de A_m é dado pela expressão:

$$A_m = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{\frac{1}{z(z-1)}}{(z-1)^{n+1}}\, dz$$

substituido este valor em $f(z)$ desenvolvido em série, teremos:

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = \frac{\frac{1}{z}}{z-1} = A_{-1} (z-1)^{-1} + A_0 + A_1 (z-1)^1 + \dots$$

donde: $\dfrac{1}{z} = A_{-1} + A_0 (z-1) + A_1 (z-1)^2 + \dots$

e, para $z=1$ vem: $A_{-1} = 1$

14.- TEOREMA DOS RESIDUOS

Vamos demonstrar a seguinte expressão :

$$\int_c f(z)\, dz = 2\pi j A_{-1}$$

$$f(z) = \frac{A_{-m}}{(z-a)^m} + \dots + \frac{A_{-1}}{z-a} + \varphi(z) \quad \text{sendo } \varphi(z) \text{ holomorfa}$$

então :

$$\int_c f(z)\, dz = \int_c \frac{A_{-m}}{(z-a)^m}\, dz + \dots + \int_c \frac{A_{-1}}{z-a}\, dz + \int_c \varphi(z)\, dz$$

ora, $\varphi(z)$ é holomorfa, logo : $\int_c \varphi(z)\, dz = 0$

e :

$$\int_c f(z)\, dz = \int_c \frac{A_{-m}}{(z-a)^m}\, dz + \dots + \int_c \frac{A_{-1}}{z-a}\, dz$$

$$z-a = R e^{j\theta} \qquad dz = j R e^{j\theta}\, d\theta$$

$$\int_\sigma \frac{A_{-m}}{(z-a)^m}\, dz = A_{-m} \int_\sigma \frac{dz}{(z-a)^m} = A_{-m} \int_0^{2\pi} \frac{j R e^{j\theta}\, d\theta}{R^m e^{mj\theta}}$$

$$= \frac{j A_{-m}}{R^{m-1}} \int_0^{2\pi} e^{-(m-1)j\theta}\, d\theta$$

$$= j \frac{A_{-m}}{R^{m-1}} \int_0^{2\pi} \left[\cos(1-m)\theta + j \operatorname{sen}(1-m)\theta\right] d\theta$$

para $m > 1$ (inteiro) , vem $\int_0^{2\pi} \dots\, d\theta = 0$

$m = 1$, vem : $\frac{j A_{-1}}{R^0} \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi j A_{-1}$

de onde :

$$\boxed{\int_c f(z)\, dz = 2\pi j A_{-1}}$$

15.- APLICAÇÃO DO TEOREMA DOS RESÍDUOS :

15.1 – PRIMEIRA APLICAÇÃO

$f(z)$ é uma função holomorfa

$g(z) = (z-a) \cdot h(z)$ e , $h(z)$ é uma função holomorfa

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{1}{z-a} \cdot \frac{f(z)}{h(z)}$$

O problema consiste, em calcular : $\frac{f(a)}{g(a)}$

Desenvolvendo em Série de Laurent:

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \underbrace{A_{-1}(z-a)^{-1}}_{\text{não holomorfa}} + \underbrace{A_0 + A_1(z-a) + \cdots}_{\text{holomorfa}} \qquad (1)$$

mas $$\frac{f(z)}{g(z)} = (z-a)^{-1} \times \frac{f(z)}{h(z)} \qquad (2)$$

substituindo (2) em (1), e multiplicando tudo por $(z-a)^1$, teremos:

$$\frac{f(z)}{h(z)} = A_{-1} + A_0(z-a) + A_1(z-a)^2 + \cdots$$

e, para $z = a$, vem:

$$\boxed{A_{-1} = \frac{f(a)}{g(a)}} \quad \text{(RESÍDUO)}$$

Exemplo:

Calcular $$\int_c \left(\frac{e^z}{z^2+a^2}\right) dz$$

$z = \pm ja$ são dois polos da integranda:

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{e^z}{(z-ja)(z+ja)} = \frac{1}{z-ja} \cdot \left(\frac{e^z}{z+ja}\right) = A_{-1}(z-ja)^{-1} + A_0 + \cdots$$

Residuos $$\begin{cases} A_{-1} = \dfrac{e^{ja}}{2ja} \\[2ex] A'_{-1} = \dfrac{e^{-ja}}{-2ja} \end{cases}$$

A'_{-1} resulta de: $$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{1}{z+ja} \cdot \left(\frac{e^z}{z-ja}\right) = A'_{-1}(z+ja) + A'_0 + \cdots$$

A soma dos residuos, é pois:

$$A_{-1} + A'_{-1} = \frac{\cos a + j\,\text{sen}\,a - \cos a + j\,\text{sen}\,a}{2ja} = \frac{\text{sen}\,a}{a}$$

, e, assim:

$$\int_c \frac{e^z}{z^2+a^2}\, dz = 2\pi j\, \frac{\text{sen}\,a}{a}$$

15.2 – SEGUNDA APLICAÇÃO

$\dfrac{f(z)}{g(z)}$ não é redutível à forma $\dfrac{f(z)}{h(z)\cdot(z-a)}$

Então, o resíduo para $z=a$, obtem-se da seguinte forma:

$$A_{-1} = \left[(z-a)\cdot\frac{f(z)}{g(z)}\right]_{z=a} \quad \begin{pmatrix}\text{derivando}\\ \text{ambos os membros}\\ \text{da fracção, vem:}\end{pmatrix} = \left[\frac{((z-a)\cdot f(z))'}{(g(z))'}\right]_{z=a}$$

$$A_{-1} = \left[\frac{f(z)+f'(z)\cdot(z-a)}{g'(z)}\right]_{z=a} = \frac{f(a)}{g'(a)}$$

logo: $$\sum_{i=1}^{m} A_{-1}^{i} = \sum_{i=1}^{m} \frac{f(a_i)}{g'(a_i)}$$

EXEMPLO:

Calcular $$\int_C \frac{e^z}{\operatorname{sen}(mz)}\,dz$$

$f(z) = e^z$

$g(z) = \operatorname{sen}(mz) \qquad g'(z) = m\cos(mz)$

e, os polos são: $\quad mz = 0, -\pi, -2\pi, \cdots$

$$z = -\frac{i\pi}{m} \qquad (i = 0,1,2,\cdots)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} A_{-1}^{i} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{f(a_i)}{g'(a_i)} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\pi i}{m}}}{m\cos\left(\frac{i\pi}{m}\cdot m\right)} = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i e^{-\frac{i\pi}{m}}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} A_{-1}^{i} = m^{-1}\left(1+e^{-\pi/m}\right)^{-1}$$

assim: $$\int_C \frac{e^z}{\operatorname{sen}(mz)}\,dz = 2\pi j\, m^{-1}\left(1+e^{-\frac{\pi}{m}}\right)^{-1}$$

16.- POLOS MULTIPLOS

$\dfrac{f(z)}{g(z)}$ tem em a um polo, de multiplicidade n

Desenvolvendo, em série de Laurent, tem-se:

$$\frac{f(z)}{g(z)} = A_{-m}(z-a)^{-m} + \cdots + A_{-1}(z-a)^{-1} + A_0 + A_1(z-a) + \cdots$$

$$\frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}}\left[(z-a)^n\cdot\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{(n-1)!}{1!}A_{-1} + \frac{n!}{2!}A_0(z-a) + \cdots$$

$$\frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}}\left[(z-a)^m\cdot\frac{f(z)}{g(z)}\right]_{z=a} = (n-1)!\,A_{-1}$$

e, daqui se determina o A_{-1} procurado.

Exemplo:

Resíduo da função $\dfrac{z \cdot e^z}{(z-a)^3}$ para $z=a$

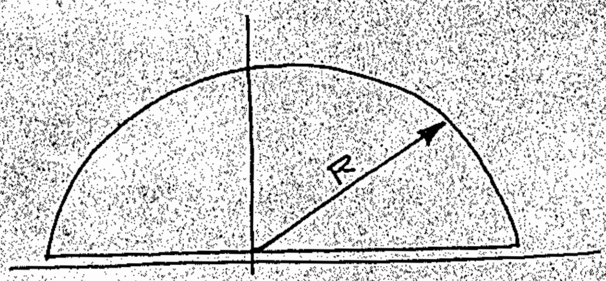
$$\frac{d^2}{dz^2}\left[(z-a)^3 \frac{z \cdot e^z}{(z-a)^3}\right] = \frac{d^2}{dz^2}\left(z \cdot e^z\right) = \frac{d}{dz}\left(e^z + z \cdot e^z\right) =$$
$$= e^z(2+z)$$

e, então:

$$(n-1)!\ A_{-1} = (3-1)!\ A_{-1} = \left[e^z(2+z)\right]_{z=a}$$

$$A_{-1} = e^a\left(1+\frac{a}{2}\right)$$

17.– LEMA DE JORDAN



Tem por objectivo estudar o caso, em que, o contorno é defenido pelo eixo real, e, por uma semicircunferência (superior) de raio tão grande quanto necessário, veja-se, infinito.

A.)– O Lema de Jordan propõe-se do seguinte modo:

Se uma função $\psi(z)$ é uma função holomorfa no semiplano definido por: $0 < \arg z < \pi$ excepto, num numero finito de polos, e se $\psi(z)$ tende para zero, uniformemente, quando $|z|$ tende para infinito, então se $t > 0$, será:

$$\lim_{R\to\infty} \int_c e^{jtz}\, \psi(z)\, dz = 0.$$

Sendo c o contorno definido pelo eixo real, e, uma semicircunferência de raio R.

Com efeito: $\quad z = Re^{j\theta}$, mas:

a) $$\left|e^{jtR\cos\theta - tR\,\mathrm{sen}\,\theta}\right| = e^{-tR\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

b) para $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$ será: $\dfrac{\mathrm{sen}\,\theta}{\theta} \geq \dfrac{2}{\pi}$

c) para R suficientemente grande será:
$\psi(z) < \varepsilon$ (positivo, tão pequeno quanto desejamos)

então, tendo em vista (a), (b) e (c):

$$\left| \int_C \phi(z)\, e^{jzt}\, dz \right| < \varepsilon R \int_0^{\pi} e^{-tR\,\mathrm{sen}\,\theta}\, d\theta \leq$$

$$\leq 2\varepsilon R \int_0^{\pi} e^{-2Rt\theta}\, d\theta = \frac{\pi\varepsilon}{t}\left(1-e^{-Rt}\right) < \frac{\varepsilon\pi}{t}$$

o que demonstra a proposição

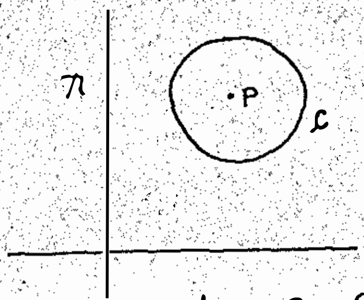
B.)- Para $t<0$, substituindo os limites do argumento z, para $(-\pi < \arg z < 0)$, pode demonstrar-se o Lema.

C.)- Para $t>0$ e $\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$, a proposição do Lema de Jordan, tomará a forma:

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi j} \int_C e^{tz}\, \psi(z)\, dz$$

D.)- Para $t<0$ e $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}$, a proposição referida em (C) pode igualmente demonstrar-se.

18.- INTEGRAÇÃO EM TORNO DE UM PONTO DE RAMIFICAÇÃO

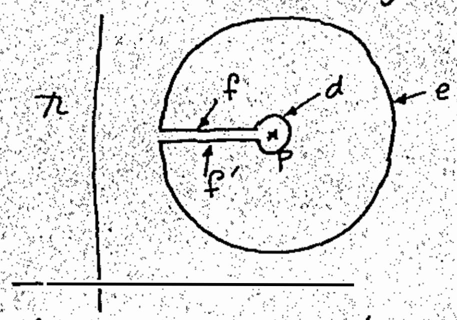


Seja π o plano complexo, e, seja dado um ponto P de ramificação, deseja-se obter o integral:

$$\int_C \psi(z)\, dz$$

onde C é um contorno que contem o ponto P de ramificação no seu interior.

A solução consiste em substituir o contorno C por um contorno C' que exclua P, como por exemplo, o indicado na figura seguinte:



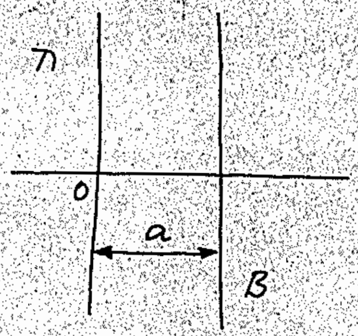
Este contorno C' é formado pelo contorno C, mas ao qual se fez um corte constituido por duas curvas f e f', tão próximas quanto se desejar, e, um pequeno circulo d de raio r tão pequeno quanto se desejar.

Então, no domínio plano conectado pela curva c' já não existe o ponto P de ramificação, e, admitimos que não há outros, embora possam existir polos. Sobre c' não há nem polos nem pontos de ramificação.

Agora, pela teoria dos resíduos, pode calcular-se o valor do integral no contorno c'.

19.- CONTORNOS

19.1 — CONTORNO DE BROMWICH



Este contorno consta duma recta paralela ao eixo imaginário, com as seguintes propriedades:

1.- a distância a é sempre positiva

2.- não tem à sua direita quaisquer pontos singulares.

19.2 — INTEGRAL DE BROMWICH - WAGNER

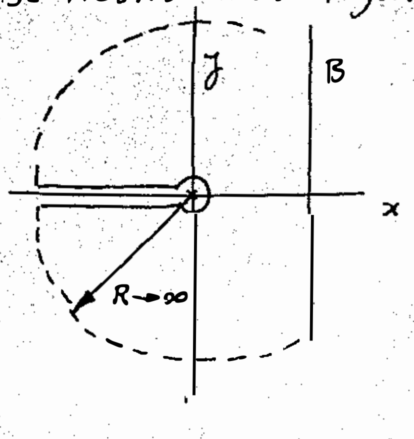
$$I = \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} e^{zt} \, \psi(z) \, dz$$

onde o contorno é de Bromwich.

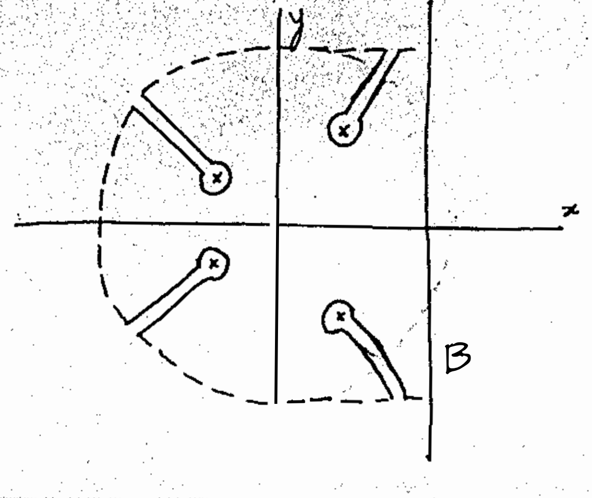
19.3 — CONTORNOS EQUIVALENTES

Se só existirem pólos, é contorno equivalente ao de Bromwich toda a curva que envolva todos os polos.

Se existirem pontos de ramificação, então, o contorno terá que envolver, excluindo esses pontos de ramificação, como se mostra nas figuras:



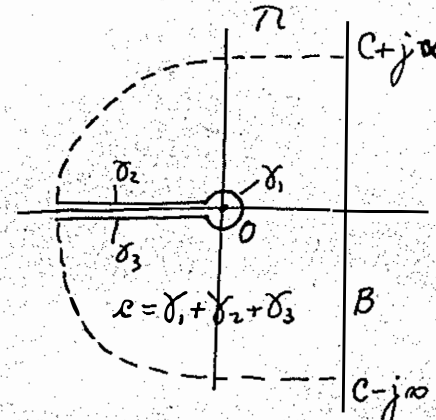
ou :



Exemplo:

Calcular: $$I = \frac{1}{2\pi j}\int_{C-j\infty}^{C+j\infty} \frac{e^{zt} \cdot z^{1/2}}{z^2+w^2}\, dz$$

as singularidades são:
$$\begin{cases} \text{dois polos :} \quad z = \pm jw \\ e \\ \text{um ponto de ramificação} \quad z = 0 \end{cases}$$



O contorno escolhido foi o indicado na figura, que é equivalente ao contorno de Bromwich.

A função $\psi(z) = \dfrac{e^{zt}\, z^{1/2}}{z^2+w^2}$ satisfaz ao lema de Jordan, o integral ao longo do contorno de Bromwitch (B), é equivalente ao integral ao longo do contorno C, e, então será:

$$I = \sum \text{resíduos} + \int_{\gamma_1} \psi\, dz + \int_{\gamma_2} \psi\, dz + \int_{\gamma_3} \psi\, dz$$

Resíduo para $z = +jw$: $\dfrac{e^{j(wt+\frac{\pi}{2})}}{2j\sqrt{w}}$

Resíduo para $z = -jw$: $-\dfrac{e^{-j(wt+\frac{\pi}{2})}}{2j\sqrt{w}}$

$$\sum \text{resíduos} = \frac{1}{\sqrt{w}} \operatorname{sen}\left(wt + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\int_{\gamma_1} \psi\, dz = \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{2\pi w^2} \int_0^{2\pi} e^{\rho(\cos\theta + j\operatorname{sen}\theta)}\, \rho^{\frac{3}{2}}\, e^{j\frac{3}{2}\theta}\, d\theta = 0$$

com $z = \rho e^{j\theta}$

$$\int_{\gamma_2} \psi\, dz = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}\, x^{1/2}}{x^2+w^2}\, dx$$

$$\int_{\gamma_3} \psi\, dz = \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{0} \frac{e^{-xt}\, x^{1/2}}{x^2+w^2}\, dx$$

com $z = |x|\, e^{j\pi}$

e, vem:

$$I = \frac{1}{\sqrt{w}} \operatorname{sen}\left(wt + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}\, x^{1/2}}{x^2+w^2}\, dx$$

19.4 – TEOREMA

Este Teorema tem aplicação no método de NYQUIST - CAUCHY, usado no estudo da estabilidade de sistemas de regulação:

Seja $f(z)$ uma função holomorfa no contorno $\mathcal{C}$, excepto num certo numero P de polos, no interior de $\mathcal{C}$.

Seja N a soma dos produtos dos zeros de $f(z)$ pelas suas respectivas multiplicidades, dentro desse contorno $\mathcal{C}$, e, P o mesmo para os pólos.

Então, o integral da derivada logaritmica de $f(z)$ ao longo de z é igual a $2\pi j\,(N-P)$

DEMONSTRAÇÃO:

Seja $\underline{a}$ um zero de ordem α, então, $f(z)$ pode escrever-se: $f(z) = (z-a)^{\alpha}\cdot\psi(z)$, e: $\psi(a) \neq 0$

donde:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\alpha}{z-a} + \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$$

por outro lado, se $\mathcal{C}_1$ for um contorno, contornando $\underline{a}$, de raio r tão pequeno quanto se desejar, será:

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{\mathcal{C}_1}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \alpha$$

Seja b um polo de ordem β, e, para um contorno $\mathcal{C}_2$ em torno de b, teremos:

$$f(z) = \frac{1}{(z-b)^{\beta}}\cdot\varphi(z) \qquad \text{e: } \varphi(z) \text{ é holomorfa}$$

donde:
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{\beta}{z-b} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$$

e:
$$\frac{1}{2\pi j}\int_{\mathcal{C}_2}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = -\beta$$

Então, se existirem $\begin{cases} n \text{ zeros} & a_i, \alpha_i \\ \text{e} & \\ m \text{ polos} & b_j, \beta_j \end{cases}$ no contorno $\mathcal{C}$,

será:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_c \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \sum_{j=1}^{m} \beta_j$$

ou:

$$\int_c \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 2\pi j\, (N-P)$$

APLICAÇÃO DO TEOREMA, AO MÉTODO DE NYQUIST- CAUCHY:

Se designarmos por $\mathfrak{z} = f(z)$, quando z descreve o contorno C no plano π, o vector $\mathfrak{z}$ descreverá o contorno Γ no plano Ω, e, então:

$$N-P = \frac{1}{2\pi j} \int_c \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi j} \left[\log f(z)\right]_c$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \left[\log (X+jY)\right]_\Gamma$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \left[\frac{1}{2} \log (x^2+y^2) + j \arctan \frac{y}{x}\right]_\Gamma$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\arctan \frac{y}{x}\right]_\Gamma$$

= numero de voltas que Γ faz em torno da origem (T).

Donde: $\quad T = N-P$

Se fossem contadas o numero de voltas que $\mathfrak{z} = f(z)$ dá em torno da origem, obtemos imediatamente $N-P$, e, se $N=0$, como sucede frequentemente, obtemos imediatamente $-P$.