PROBABILIDADES

Cap. I: Introdução ao Conceito de Probabilidade

Parte-se do pressuposto que o leitor conhece os rudimentos dos conceitos de espaço, espaços mensuráveis e espaços medida, bem como as propriedades mais relevantes e pertinentes.

I1) Introdução heurística

Como é sabido, os fenómenos naturais têm certas propriedades e para os estudar e discorrer sobre eles é necessário criar espaços formais onde projectar "imagens" desses fenómenos reais.

Essas "imagens" são susceptíveis de tratamento formal e assim extrair inferências úteis.

O espaço formal deverá ser estruturado, algébrica e topologicamente, em termos de lhe conferir "propriedades" às imagens do real neles projectadas que "mimicam" as "propriedades reais" do referido real.

Este problema, escolha do espaço formal, é central ~~no~~ desenvolvimento do conhecimento humano.

Em especial, chama-se a atenção para dois erros típicos:

a) O espaço formal é estruturado em demasia, e tem propriedades que o real não possui, então, o risco está em extrair conclusões lógicas, que são válidas no espaço formal, mas não têm correspondência com as situações reais.

b) O espaço formal é estruturado insuficientemente, então, o real tem propriedades que não podem ser deduzidas validamente das "imagens" projectadas no espaço formal.

Nas alíneas que se seguem, e duma forma heurística, vão sendo apresentados exemplos e mostrado que esses exemplos podem adequadamente ter imagens no espaço formal escolhido e algumas consequências deduzidas formalmente têm correspondência com as propriedades do real.

Todo este capítulo é tratado em discurso metalinguístico e não constitui linguagem objectiva, uma vez que o que se procura é legitimar o modelo formal adoptado.

Passemos, pois, à justificação do espaço formal adoptado e à sua apresentação:

I2) Espaço formal escolhido

Um conjunto referencial X , cujos elementos são designados de"acontecimentos elementares" ou "resultados elementares", é o ponto de partida do espaço a estruturar.

Com base em X forme-se uma σ-Álgebra de Bool S.

O espaço (X, S) é um espaço mensurável.

Defina-se uma medida real positiva μ que tem por domínio S e contradomínio os reais positivos.

Por se tratar de uma medida, μ é σ-aditiva.

Impunha-se ainda que μ seja uma medida normada, assim $\mu(X) = 1$ e $\mu(\phi) = 0$ e totalmente finita.

Tendo sido construída uma medida μ para o espaço mensurável (X, S) , obtem-se o espaço medida correspondente: (X, S, μ)

Pois será (X, S, μ) o espaço medida típico, onde projectar as imagens das situações reais que cabem no âmbito da teoria das probabilidades.

Como é evidente, em cada caso terá de ser escolhido o conjunto referencial X e a σ-álgebra S .

Quanto a μ será sempre uma medida normada.

Na alínea seguinte, vai tratar-se de justificar a adequação do espaço escolhido às situações reais.

I3) Experiências, acontecimentos, resultados e probabilidade

a) Experiência: é o vocábulo empregue para significar o acto de realizar uma ou várias observações de um ente real (físico ou conceptual).

Exemplo: lançar os dados, as cartas, ou observar as contagens de partículas, etc.

b) Acontecimentos: As experiências dão origem a acontecimentos.

Tem interesse fazer notar que uma mesma experiência, ou classe de experiências, dá motivo a acontecimentos diversos, como por exemplo:

Numa experiência de lançamento de um dado saiu um 4, pois aconteceram várias coisas, com efeito:

Saiu um 4
não saiu o 3
saiu um número par
saiu um número menor que 5
etc. etc.

c) Resultados: Aproveitando as experiências com dados, pode dizer-se que um dado pode dar os resultados seguintes: 1; 2; 3; 4; 5; 6

A um resultado pode corresponder vários acontecimentos como vimos em b).

d) Construcção do conjunto referencial $\mathcal{X}$

Continuando com o exemplo dos lançamentos com dados, parece perfeitamente aceitável que sejam elementos de $\mathcal{X}$ as 6 faces do dado que foram designadas por 1, 2, 3, 4, 5, 6. Note-se que podiam ser simbolisadas por a, b, c, d, e e f, ou quaisquer outros símbolos, portanto os números de um a seis não representam inteiros, são meras designações das faces.

Convém acrescentar mais um símbolo, o <u>zero</u> $\{0\}$, com o fim de descrever um resultado <u>impossível</u> de <u>acontecer</u> (um não acontecimento).

Então, o conjunto referencial adoptado, será:

$$X \equiv \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

onde $1, 2, \ldots, 6$ são símbolos que referenciam univocamente as 6 faces do dado e o $\{0\}$ simbolisa o não acontecimento ou o acontecimento impossível.

e) <u>Construcção duma σ-álgebra S</u>

Porque Card $X = 6$ é finito, é possível facilmente determinar todos os conjuntos que são susceptíveis de ser construidos a partir de X, e eles são:

$\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$

$\{0,1\}$, $\{0,2\}$, $\{0,3\}$, $\{0,4\}$, $\{0,5\}$, $\{0,6\}$

$\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{1,5\}$, $\{1,6\}$

$\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{2,5\}$, $\{2,6\}$

$\{3,4\}$, $\{3,5\}$, $\{3,6\}$

$\{4,5\}$, $\{4,6\}$

$\{5,6\}$

- -

$\{0,1,2\}$, $\{0,1,3\}$, $\{0,1,4\}$, $\{0,1,5\}$, $\{0,1,6\}$

$\{0,2,3\}$, $\{0,2,4\}$, $\{0,2,5\}$, $\{0,2,6\}$

$\{0,3,4\}$, $\{0,3,5\}$, $\{0,3,6\}$

$\{0,4,5\}$, $\{0,4,6\}$

$\{0,5,6\}$

$\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,2,5\}$, $\{1,2,6\}$

$\{1,3,4\}$, $\{1,3,5\}$, $\{1,3,6\}$

$\{1,4,5\}$, $\{1,4,6\}$

$\{1,5,6\}$

$\{2,3,4\}$, $\{2,3,5\}$, $\{2,3,6\}$

$\{2,4,5\}$, $\{2,4,6\}$

$\{2,5,6\}$

$\{3,4,5\}$, $\{3,4,6\}$

$\{3,5,6\}$

$\{4,5,6\}$

- -

$\{0,1,2,3\}$, $\{0,1,2,4\}$, $\{0,1,2,5\}$, $\{0,1,2,6\}$

$\{0,1,3,4\}$, $\{0,1,3,5\}$, $\{0,1,3,6\}$

$\{0,1,4,5\}$, $\{0,1,4,6\}$

$\{0,1,5,6\}$

$\{0,2,3,4\}$, $\{0,2,3,5\}$, $\{0,2,3,6\}$

$\{0,2,4,5\}$, $\{0,2,4,6\}$

$\{0,2,5,6\}$

$\{0,3,4,5\}$, $\{0,3,4,6\}$

$\{0,3,5,6\}$

$\{0,4,5,6\}$

$\{1,2,3,4\}$, $\{1,2,3,5\}$, $\{1,2,3,6\}$

$\{1,2,4,5\}$, $\{1,2,4,6\}$

$\{1,2,5,6\}$

$\{1,3,4,5\}$, $\{1,3,4,6\}$

$\{1,3,5,6\}$

$\{1,4,5,6\}$

$\{2,3,4,5\}$, $\{2,3,4,6\}$

$\{2,3,5,6\}$

$\{2,4,5,6\}$

$\{3,4,5,6\}$

$\{0,1,2,3,4\}$, $\{0,1,2,3,5\}$, $\{0,1,2,3,6\}$

$\{0,1,2,4,5\}$, $\{0,1,2,4,6\}$

$\{0,1,2,5,6\}$

$\{0,1,3,4,5\}$, $\{0,1,3,4,6\}$

$\{0,1,3,5,6\}$

$\{0,1,4,5,6\}$

$\{0,2,3,4,5$, $\{0,2,3,3,6\}$

$\{0,2,3,5,6\}$

$\{0,2,4,5,6\}$

$\{0,3,4,5,6\}$

$\{1,2,3,4,5\}$, $\{1,2,3,4,6\}$

$\{1,2,3,5,6\}$

$\{1,2,4,5,6\}$

$\{1,3,4,5,6\}$

$\{2,3,4,5,6\}$

$\{0,1,2,3,4,5\}$, $\{0,1,2,3,4,6\}$

$\{0,1,2,3,5,6\}$

$\{0,1,2,4,5,6\}$

$\{0,1,3,4,5,6\}$

$\{0,2,3,4,5,6\}$

$\{1,2,3,4,5,6\}$

$\{0,1,2,3,4,5,6\} \equiv X$

Há ao todo os seguintes sub-conjuntos:

$$C_1^7 + C_2^7 + C_3^7 + C_4^7 + C_5^7 + C_6^7 + C_7^7 =$$

$$= 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 127$$

À σ-álgebra de Bool S pertencem 127 sub-conjuntos de X.

Desta forma temos a certeza que não há nenhuma hipótese combinatória que não faça parte da classe S.

f) Espaço Mensurável (X, S)

O espaço mensurável escolhido será o par do conjunto universal X e da σ-álgebra de Bool S.

O espaço é mensurável, todas as operações definidas em S e que são $\cup$ e $\cap$ (união e intersecção) como a complementação $(-)$ podem ser efectuadas e são fechadas, isto é, o resultado dessas operações dá origem a sub-conjuntos que pertencem a S.

Não há, assim, nenhum acontecimento imaginável no jogo dos dados que não possa ser descrito por meio de um sub-conjunto de S, portanto o espaço (X, S) é suficientemente amplo e estruturado.

Mas conversamente, nenhum sub-conjunto gerado por operações $(\cup, \cap, -)$ sobre sub-conjuntos de S, deixa de ter uma correspondência clara com uma situação real no jogo de dados (isto é, "experiências" com um dado).

g) Definição de uma medida normada μ sobre (X, S)

Prosseguindo com o jogo de dados, cabe agora introduzir o conceito de probabilidade.

Se lançarmos um dado, sair a face 4 ou sair as faces 4 ou 6, é natural que o segundo acontecimanto suceda com mais facilidade do que o primeiro, portanto: $\mu(\{4 \cup 6\}) \geq \mu(\{4\})$

Com efeito $\{4\} \subseteq \{4 \cup 6\}$

Convém, além disso, que:

Se $\mu\{4\} = \alpha$
$\mu\{6\} = \beta$

então, $\mu\{4 \cup 6\} = \mu\{4\} + \mu\{6\} = \alpha + \beta$

isto é, a função real μ tem de ser aditiva.

Convém também que:

$\mu\{0\} = 0$, isto é, a medida do acontecimento impossível seja zero.

Finalmente, para que μ seja uma função que tenha o mesmo intervalo de valores, convém normar a 1 , ou seja:

$\mu(X) = 1$.

Em conclusão, μ convém que tenha as propriedades de uma medida σ-finita e normada.

Será este o tipo de medida que se adoptará universalmente na teoria das probabilidades.

h) Espaço medida (X, S, μ)

Definida em g) a medida a adoptar, estão realizadas as condições para construir o espaço-medida tipo (X, S, μ) , que vai ser universalmente usado na teoria das probabilidades.

O espaço medida definido é totalmente finito.

I4) Variáveis aleatórias

Não só com o objectivo de introduzir o conceito de variável aleatória, como ainda para dar mais algumas propriedades que interessa chamar à evidência, vai ser dedicada esta alínea.

a) <u>Variável aleatória</u>

Qualquer função real cujo domínio de definição seja o espaço medida (X, S, μ), e que tenha a característica de ser uma <u>função mensurável</u>, pode designar-se de <u>variável aleatória</u>.

Por exemplo:

Seja dada a variável aleatória real y ; função mensurável cujo domínio é X, e que tem os seguintes valores:

$x =$	face 1	$y = 2$
	face 3	$y = 3$
	face 5	$y = 4$
	face 2	$y = 1$
	face 4	$y = 1$
	face 6	$y = 1$

Vamos admitir que o dado é perfeito, que formalmente se descreve da forma seguinte:

$$\mu(x) = \frac{1}{6}, \quad \forall x \in X$$

Suponhamos que saiu a <u>face 5</u>, então, $y = 4$ e como

$$\mu(5) = \frac{1}{6}, \text{ será } y(5) \times \mu(5) = 4 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

o valor esperado de y $(\bar{y})$ definido como sendo $\bar{y} = \sum_{x \in X} y(x) \times \mu(x)$ terá neste caso o valor seguinte:

$$\bar{y} = y(1) \cdot \mu(1) + y(2) \cdot \mu(2) + \ldots + y(6) \cdot \mu(6)$$

$$= 2 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{6} + \ldots + 1 \times \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{1}{6}(2 + 1 + 3 + 1 + 4 + 1) = \frac{12}{6} = \underline{\underline{2}}$$

Se o dado estivesse viciado e as probabilidades variassem com a face, teríamos, por exemplo, a seguinte situação:

$$\mu(1) = 0,1 \qquad \mu(2) = 0,2 \qquad \mu(3) = 0,2$$

$$\mu(4) = 0,3 \qquad \mu(5) = 0,15 \qquad \mu(6) = 0,05$$

Verificar que : $\mu(1+2+3+4+5+6) = 1$

então $\bar{f}$ toma o valor seguinte:

$$\bar{f} = 2\times 0,1 + 1\times 0,2 + 3\times 0,2 + 1\times 0,3 + 4\times 0,15 + 1\times 0,05 = 0,2+0,2+0,6+0,3+0,6+0,05 = \underline{\underline{1,95}}$$

Está, deste modo, exemplificada uma variável aleatória e como esta está consociada com a medida μ definida no espaço mensurável.

b) Experiências distintas

É fácil estender estes conceitos a classes distintas de experiências.

Por exemplo:

Suponhamos que temos vários dados e moedas, e a experiência global consiste no lançamento desses dados e moedas.

A cada dado corresponde o respectivo espaço medida, o produto cartesiano desses espaços medidas será o espaço conveniente para projectar as "imagens" das situações reais.

Concretizando no seguinte exemplo, temos:

Dado D_1 $\quad (X_1, S_1, \mu_1)$

Dado D_2 $\quad (X_1, S_1, \mu_2)$

Moeda M $\quad (X_2, S_2, \mu_3)$

$X_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

S_1 = Veja-se a alínea e)

$\mu_1 \Rightarrow \mu_1(1) = \mu(2) = \dots = \mu(6) = \frac{1}{6}$ { dado não viciado

$\mu_2 \Rightarrow \mu_2(1) = \mu_2(2) = \mu_2(3) = 0,1$

$\mu_2(4) = \mu_2(5) = \mu_2(6) = \frac{0,7}{3}$

$X_2 \Rightarrow \{0, 1\}$

$S_2 \Rightarrow \{\{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$

$\mu_3 \Rightarrow \mu_3(0) = \mu_3(1) = 0,5$

Uma esperiência global será, por exemplo:

$[D_1 = \text{face } 3;\ D_2 = \text{face } 2;\ M = \text{face } 1]$

As probabilidades correspondentes serão:

$[D_1 \Rightarrow \frac{1}{6};\ D_2 \Rightarrow 0,1;\ M \Rightarrow 0,5]$

A probabilidade deste acontecimento global será:

$\left(\frac{1}{6} \times 0,1 \times 0,5\right)$

Esta matéria será oportunamente apresentada formalmente e corresponde à situação dos dados e da moeda serem experiências independentes.

Dá-se por apresentada, duma forma heurística, a justificação do espaço medido escolhido na Teoria das Probabilidades.