

I INTRODUÇÃO

A teoria dos subconjuntos vagos (SCV) - (Fuzzy Sets) foi construída a partir do trabalho de Zadeh (1) em 1965. O desenvolvimento da teoria foi rápido, porém as aplicações seguiram-se com maior dificuldade porque exigia encontrar uma interpretação e uma heurística adequadas.

Passaram a usar-se as palavras "possibilidade", Zadeh (2), e "oportunidade", Hägg (3), para descrever a natureza dos SCV.

Radicou-se no vocabulário o conceito de precisão de linguagem (Language Crispness). Assim, uma grandeza, uma proposição, uma informação, podiam ser descritas por:

- ou uma variável bem determinada;
- ou uma distribuição probabilística;
- ou um caracterizante de um conjunto vago,

segundo a imprecisão crescente de que estavam envolvidos.

Tarefa idêntica foi realizada no sentido de explicar e interpretar as conectivas e quantificadores usados na teoria dos SCV.

Esta imprecisão está para além do aleatório, como mostra S.Nahmias (4).

Uma tarefa importante tem sido a de enquadrar a teoria dos SCV em conceitos formais preexistentes nos seguintes domínios principais, (veja-se por exemplo)

Lógica e Linguística - GOTTWALO (14)

NGUYEN (10)

RALESCU (6)

BANDLER e KOHOUT (16)

WILLMOTT (17)

FUKAMI et alter (22)

EYTAN

Topologia

- ZADEH (32)

GOGUEN (31) e (33)

WONG (34)

LOWEN (35) e (37) (15)

HUTTON (36) (13)

GANTNER et alter (14) e (39)

HÖHLE (9)

Distribuições (de Probabilidade - HISOAL (7)
e Possibilidade) NGUYEN (8) e (10)
HÖHLE (9)
KLEMENT (18) et alter (24)
HIROTA (25)

No domínio das aplicações, a bibliografia é muito extensa, por isso faremos referência breve a alguns trabalhos típicos:

Teoria da decisão - HÄGG (3)
Programação - FLACHS et alter (38)
Clusters - BEZOEK " " (5)
Proximidades - (27); (28), (29), (30), (40)

O Prof. ANICETO MONTEIRO também tem trabalhos sobre reticulados relacionados com (SCV), por exemplo (42).

Uma linha de desenvolvimento da teoria SCV consiste em procurar uma teoria ou linguagem formal que possa abarcar os conceitos de probabilidade e possibilidade como casos particulares, veja-se, por exemplo, RALESCU e EYTAN (26).

Na verdade, o pensamento humano foi construindo uma linguagem que pode ser extremamente precisa ou muito vaga, mas nenhuma destas feições pode ser desprezada, porquanto todas têm um certo conteúdo informativo.

Por último, recordar que se estabeleceu ultimamente uma certa predição pelo reticulado $[0, 1]$ eventualmente com uma σ -álgebra associada, e medidas de vários tipos nele definidas.

Nas aplicações, os reticulados baseados em conjuntos finitos têm sido muito trabalhados.

II. Apresentação do Tema

3

Ha essencialmente tres conjuntos fundamentais, nesta teoria.

X - O Conjunto Universal de Discurso

$\mathcal{R}$ - O Conjunto de Valores, destinado à valorização de conjuntos (Formulas de discurso em X)

$[0,1]$ - O Conjunto Referencial de Valores

A estes conjuntos é possível impor-lhes estruturas algebraicas e Topologicas e estabelecer entre eles correspondencias de varios tipos.

II.1 Conjunto Universal de Discurso (X)

a) Sejam: $B \subseteq X$

S_B uma σ -algebra de Sub-conjuntos de Borel do Conjunto B

(B, S_B) um espaço mensuravel

m_B uma medida definida em S_B , Totalmente finita satisfazendo a $m_B(B) = 1$
Note-se que m_B toma valores no intervalo $[0, 1]$

(B, S_B, m_B) será um espaço medida susceptível de representar um espaço de Probabilidades

b) Aplicações (G)

Seja G o conjunto de aplicações g

$$g : P(X) \rightarrow [0,1], \quad \forall g \in G$$

e satisfazendo a condição :

$$\forall A \in P(X) \text{ será } g(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } A \notin G \\ m_B & \text{se } A \in G \end{cases}$$

4

As aplicações $\in G$ não são uma extensão da medida m_B , porém $g(X-B) = 0$

c) Justificação da criação de G .

Nem todos os sub-conjuntos de X são mensuráveis quer por razões de forma quer por sua correspondência a descrições de situações reais não mensuráveis.

Preferir-se, escolher um sub-conjunto B de X , onde as suas partes não ofereçam dificuldades de interpretação.

Relegar-se para $X-B$ tudo quanto é semanticamente irrelevante.

Ao construir S_B , houve os cuidados correspondentes.

II 2 Conjunto de Valores (Ω)

a) Seja Ω um reticulado, onde:

$\psi \in \Omega$ não duas conectivas duais, interpretadas como por exemplo = maior e menor, respectivamente

$\succ$ o símbolo de Relação de Ordem do Reticulado (em geral, é parcial)

1_Ω o Supremo do Reticulado

0_Ω o Infimo do Reticulado

sendo dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, nem sempre é possível relacioná-los por meio de $\alpha > \beta$, contudo para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, vale: $1_{\mathbb{R}} > \alpha > 0_{\mathbb{R}}$

b) Cadeia Completa $[\alpha]$ em $\mathbb{R}$

Seja dada uma sequência $\{d_i\}$ onde

- 1) $d_i \in \mathbb{R}$, $d_0 = 0_{\mathbb{R}}$ e $d_n = 1_{\mathbb{R}}$
- 2) Para todo o par de dois elementos sucessivos $d_i, d_{i+1} \in \mathbb{R}$, deverá verificar-se:
 - 1 - $d_{i+1} > d_i$
 - 2 - Não existe $\beta \in \mathbb{R}$, tal que $d_{i+1} > \beta > d_i$, para qualquer par sucessivo, exceto no $d_{i+1} = d_n$ e $d_i = d_0$

II 3 Conjuntos Associados $C_\alpha \subset [0,1]$

a) Seja $F_\alpha : [\alpha] \rightarrow C_\alpha$, uma função (1,1) satisfazendo a:

- 1) $F(1_{\mathbb{R}}) = 1$ e $F(0_{\mathbb{R}}) = 0$
- 2) $(d_{i+1} > d_i) \Rightarrow (F_\alpha(d_{i+1}) \geq F_\alpha(d_i))$
 $\forall (d_{i+1}, d_i \in [\alpha])$ monotonia

$C_\alpha \subset [0,1)$ é o conjunto associado a $[\alpha]$ e por construção é um reticulado, onde $(\geq)$ é susceptível de ser munido de uma involução de ordem 2 daí ser um reticulado pseudo-complementado, satisfaz as leis de Morgan e é uma álgebra pseudo-Booleana

b) Conjuntos e Cadeias distintas

Duas cadeias completas $[\alpha]$ e $[\beta] \in \mathbb{R}$ dizem-se distintas se:

$\exists \alpha_j \in [\alpha]$, tal que $\alpha_j \notin [\beta]$ 6
 $\exists \beta_k \in [\beta]$, tal que $\beta_k \notin [\alpha]$

C_α e C_β são distintos se $[\alpha]$ e $[\beta]$ forem.

G_R é o símbolo do classe de conjuntos distintos em $[0,1]$

F o conjunto dos F_2 geradores de $C_\alpha \in G_R$

$(C_\alpha, S_\alpha, \mu_\alpha)$ é o espaço mensurável (C_α, S_α) gerado por C_α e munido de uma medida

μ_α
 S_α simboliza a σ -álgebra gerada por C_α

μ_α é uma medida totalmente finita, sendo $\mu_\alpha(C_\alpha) = 1$, (não muda) que pode ser assimilada a uma medida de probabilidade.

c) Condição de uniformização das medidas μ_α
 Seja $\{[0,1], S_{[0,1]}, \mu_{[0,1]}\}$ um espaço de medida em $[0,1]$

Porque $\forall \alpha, C_\alpha \subseteq [0,1]$, escolhamos S_α e $S_{[0,1]}$ de tal modo que:

1) $\forall \alpha, S_\alpha \subseteq S_{[0,1]}$

e as medidas μ_α e $\mu_{[0,1]}$ sejam escolhidas de modo que:

2) $\mu_\alpha(E) = \mu_{[0,1]}(E)$, $\forall E \in S_\alpha$
 e $\forall (C_\alpha, S_\alpha, \mu_\alpha) \in G_R$

II 4) Caracterizantes

7

a) seja dada a classe de funções:

$$f_\lambda : X \rightarrow \Omega$$

onde $\lambda \in \Gamma$
e Γ é um conjunto
de índices

isto é:

$$\forall x \in X, \exists w_\lambda \in \Omega, \text{ tal que } f_\lambda = w_\lambda$$

e para $\forall f_\lambda \in \Omega^X$

Cada $f_\lambda(x)$, representará (ou é o caracte-
risante, ou o indicativo, ou a
característica, ou define) um
Sub-conjunto de X (eventual-
mente Vago) (Fuzzy)

b) Composições φ

$$\varphi_{\alpha\lambda} = F_\alpha \circ f_\lambda \quad \text{onde } F_\alpha \in \mathcal{F}$$

$\varphi_{\alpha\lambda} \in [0,1]^X$

Os $\varphi_{\alpha\lambda}$ podem entender-se como
Caracterizantes de Sub-conjuntos
de X , mas tomando valores
em $[0,1]$.

Se ϕ for o conjunto dos $\varphi_{\alpha\lambda}$,
designa-se por $\phi_B \subseteq [0,1]^B$, a
restrição a $B \subseteq X$, no sentido seguinte:
 $\forall f(x) \in \phi_B, (x \in (X-B)) \Rightarrow (f(x) = 0)$

II 5) Medida de Probabilidade (Vaga)

8

a) Espaço V-mensurável

Segue-se, aqui, o método de provar de uma mensurabilidade vaga e de uma medida vaga de probabilidade expostos por Klement, Lowen et Alben em (18) (24) e (32).

Porque no anexos 3 e 4 a matéria está sintetizada, limita-se a exposição das conclusões principais:

Definição: $\sigma \subseteq [0,1]^X$ é uma σ -álgebra vaga sse:

- 1) $\forall \alpha$ constante então $\alpha \in \sigma$
- 2) $\forall \mu \in \sigma \Rightarrow (1-\mu) \in \sigma$ (pseudo-complementaridade)
- 3) $\forall \{ \mu_n \} \subset \sigma^N \Rightarrow \sup \mu_n \in \sigma, \forall n \in \mathbb{N}$

(X, σ) será um espaço mensurável Vago ou (V-mensurável)

b) Funções V-mensuráveis

Se (X, Σ) e (Y, σ) forem dois espaços V-mensuráveis, então define-se função mensurável Vaga (ou V-mensurável):

$$f: (X, \Sigma) \rightarrow (Y, \sigma)$$

satisfazendo a $f^{-1}(\sigma) \subseteq \Sigma$

c) Medida de Probabilidade Vaga ou (V-medida de Probabilidade)

Seja: $m_v: \sigma \rightarrow [0,1]$, (X, σ) é um espaço V-mensurável.

Satisfazendo a:

$$1) m_v(\emptyset) = 0 \quad e \quad m_v([0, 1]) = 1 \quad (\text{Normalizada}) \quad (9)$$

$$2) \forall \mu, \nu \in \sigma : m_v(\mu \vee \nu) + m_v(\mu \wedge \nu) = m_v(\mu) + m_v(\nu) \quad (\text{aditividade})$$

$$3) \forall (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \sigma^{\mathbb{N}}, \mu \in \sigma : \left((\mu_n) \uparrow \mu \right) \Rightarrow \left(m_v(\mu_n) \uparrow m_v(\mu) \right)$$

onde $\vee$ e $\wedge$ é o par de Conectivas duas significando max e min, respectivamente

O triplo (X, σ, m_v) é um espaço de Probabilidade Vaga.

Esta definição confere a m_v as propriedades seguintes:

Monotonia
aditivo $\uparrow$

Não é verdade porém que seja necessariamente

$$m(\emptyset) = \emptyset$$

$$m(I - \mu) = 1 - m(\mu) \quad , \quad I \equiv [0, 1]$$

$$\forall (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \sigma^{\mathbb{N}}, \mu \in \sigma : \left((\mu_n) \downarrow \mu \right) \Rightarrow \left(m_v(\mu_n) \downarrow m_v(\mu) \right)$$

Simbolize-se por (B, σ_B, m_{v_B}) o espaço de V-probabilidade restrito a $B \subseteq X$

II 5) Caracterizantes definidos em Ω

Seja $h : \Omega \rightarrow [0, 1]$

onde $[0, 1]$ é um reticulado pseudo-completo, dotado das conectivas $\vee, \wedge$ (Max, Min) e a relação de ordem ($\geq$) é munida de uma família de ordens.

Compondo $h : \Omega \rightarrow [0, 1]$ com $f : X \rightarrow \Omega$

obtem-se $\tau : X \rightarrow [0, 1]$

A dificuldade reside em propor uma definição do operador Composição ($\circ$), porque em Ω as conectivas $\psi, \dagger$, enquanto que em $[0, 1]$ foram definidas $\vee$ e $\wedge$.

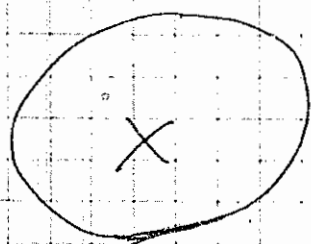
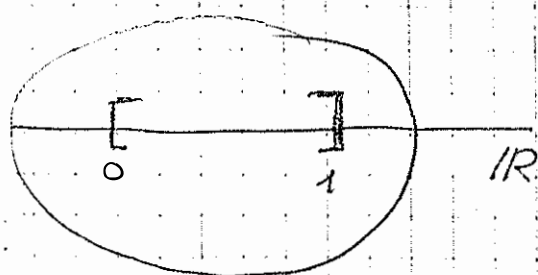
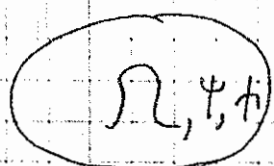
Um modo, relativamente geral, é tratar o par $(V, \wedge)$ como $(\psi, \dagger)$.

II 7) Classes de Caracterizantes

Referir-se por último a vantagem de formar classes de reticulados, cujos membros gozarem de certas propriedades.

As referências [27], [28], [29], [30] e [40] constituem um exemplo de estudo de uma classe de caracterizantes, que, da esquerda para a direita, é descrito como uma função monotona mas decrescente até um certo ponto $x_m \in X$, passando a função a monotona mas crescente para $x > x_m$.

Esta classe pode "modelar" um conjunto vasto de situações reais, e por outro lado formalmente, possuem muitas propriedades específicas.



Metodos de Valorisacao

Os varios modos de valorizar conjuntos de $P(X)$, podem reconduzir-se aos seguintes:

a) Definir uma medida de Probabilidade m_B em $B \subseteq X$

onde m_B e' uma valorizacao para todo o conjunto E mensuravel de B ($E \in \mathcal{S}_B$).

b) Definir conjuntos Vagos $f_A: X \rightarrow \mathbb{R}$ e usar um critério como por exemplo.

$\sup_x (f_A(x)) : \forall x \in X$ para valorizar o conjunto Vago associado ao Caracterizante f_A .

c) Definir Conjunto Vago Ω^* e
depois por $F: \Omega \rightarrow [0,1]$, operar
em $[0,1]^X$ (12)

d) Dado modo Idêntico a c) mas
definindo caracterizantes de $\Omega \rightarrow [0,1]$
em vez de lançar mão da classe F

e) Definir em $X \rightarrow [0,1]$ uma probabilidade
vaga, como faz CLEMENT et ALLEN
(II, 5, a) ou usando o método de HIROTA

Todos os métodos dão origem a uma
Valoração de Conjuntos (onde os conjuntos
holóicos - (singletos) desempenham papel
importante).

Mas num certo "Contexto de discurso", essas
Várias Valorações devem estar em
correspondência com propriedades e
atributos distintos do Real que está
sendo sujeito a modelação; d'outra
forma a compatibilização sintática
não seria conseguida.

Dai esforços heurísticos constantes para
encontrar para os conjuntos Vagos
uma interpretação - há uns anos
tem sido avançada o conceito de
"Possibilidade" em contraste com o

de "possibilidades"

(13)

A decisão humana ^{interna} conclusão
mais as "possibilidades" que são oferecidas
do que real a decisão mais provável
(ou que está na moda, ou que é mais pre-
sente). As duas valorações do
mesmo conteúdo universal x podem
ser efectuadas, deixando a decisão
a escolha.

Finalmente, uma referência as
línguas de alto nível, tal
como apresenta EYTAN (26), em "A TOPOS-
-Logical Point of View" as várias
Teorias para valorizar ^{claras} sub-
conteúdos do conteúdo universal
são particularizações de uma Teoria
geral expressável numa língua
superior mais geral e potente.

- 1) L.A. ZADEH: "Fuzzy Sets", publicado em "Information and Control", 8 (1965), 338-353
- 2) L.A. ZADEH: "Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility", publicado em "Fuzzy Sets and Systems", vol. 1 n°1, pag. 3,28, 1978
- 3) C. HÄGG: "Possibility and Cost in Decision Analysis", publicado em "Fuzzy Sets and Systems", vol. 1 n° 2, pag. 81-86, Abril 1978
- 4) S. NAHMIA: "Fuzzy Variables", publicado em "Fuzzy Sets and Systems", vol.1, n°2, pag.97-110, Abril 1978
- 5) J.C. BEZDEK; J.D. HARRIS: "Fuzzy Partitions and Relations: an Axiomatic Basis for Clustering", publicado em "Fuzzy Sets and Systems", vol.1, n°2, pag.111-127, Abril 1978
- 6) D. RALESCU: "Fuzzy subobjects in a category and the theory of C-Sets", publicado em "Fuzzy Sets and Systems", vol.1, n°3, pag.193-202, Abril 1978
- 7) E. HISDAL: "Conditional Possibilities, Independance and Non Interaction", publicado em "Fuzzy Sets and Systems", vol.1, n° 4, 283-297, Outubro 1978
- 8) H.T. NGUYEN: "On Conditional Possibility Distributions", publicado em "Fuzzy Sets and Systems", vol. 1, n° 4, 299-309, Outubro 1978
- 9) U. HÖHLE: "Probabilistic Uniformisation of Fuzzy Topologies". publicado em "Fuzzy Sets and Systems", vol. 1 n°4, Outubro 1978, pag. 311-332
- 10) H.T. NGUYEN: "Some Mathematical Tools for Linguistic Probabilities", publicado em "Fuzzy Sets and Systems", vol.2n°1, Janeiro 1979, pag. 53-65
- 11) S. GOTTWALD: "Set Theory for Fuzzy Sets of Higher Level", publicado em "Fuzzy Sets and Systems", vol.2, n° 2, Janeiro 1979, pag. 125-151
- 12) S.GOTTWALD: "Fuzzy Uniqueness of Fuzzy Mappings", publicado em "Fuzzy Sets and Systems", vol.3, n°1, pag.49-74
- 13) B. HUTTON, I. REILLY: "Separation Axioms in Fuzzy Topological Spaces", publicado em "Fuzzy Sets and Systems", vol. 3, n°1, pag.93-104
- 14) S. GOTTWALD: "Fuzzy Propositional Logics", publicado em "Fuzzy Sets and Systems", vol.3, n°2, pag. 181-192

- 15) R. LOWEN: "Convex Fuzzy Sets", publicado em "Fuzzy Sets and Systems", vol.3, nº 3, pag. 291-310
 - 16) W. BANDLER: "Fuzzy Power Sets and Fuzzy Implication Operators", vol.4, nº1, pag.13-30
 - 17) R. WILLMOTT: "Two Fuzzier Implication Operators in Theory of Fuzzy Power Sets", publicado em "Fuzzy Sets and Systems", vol.4, nº1, pag.31-36
 - 18) E.P. KLEMENT: "Fuzzy α -algebras and Fuzzy Measurable Functions", publicado em "Fuzzy Sets and Systems", vol.4, nº1, pag. 83-93
 - 19) A. KANDOL, W.J. BYATT: "Fuzzy Processes", publicado em "Fuzzy Sets and Systems", vol.4, nº2, pag.117-152.
 - 20) A. DINOLA, A.G.S. VENTRE: "On some Chains of Fuzzy Sets", vol.4, nº2, pag.185-191 da "Fuzzy Sets and Systems" (F.S.S.)
 - 21) R.R. YAGER: "On a General Class of Fuzzy Connectives", vol.4, nº3, pag. 235-242 (F.S.S.)
 - 22) S. FUKAMI, M. MZUMOTO, K. TANAKA: "Some Considerations of Fuzzy Conditional Influence", F.S.S., vol.4, nº3, pag.243-273
 - 23) KH. KIM, F.W. ROUSH: "Generalized Fuzzy Matrices", F.S.S., vol.4, nº3, pag.293-315
 - 24) E.P. KLEMENT, W. SCHWYHLA, R. LOWEN: "Fuzzy Probability Measures", F.S.S., vol.5, nº1, pag.21-30
 - 25) K. HIROTA: "Concepts of Probabilistic Sets", F.S.S., vol.5, nº1, pag.31-46
 - 26) M. EYTAN: "Fuzzy Sets: A Topos-Logical Point of View", vol.5, nº1, pag.47-67
-
- (27) A.G. PORTELA, Conceito de Proximidade em Mecânica, 1º Congresso Nacional de Mecânica Teórica e Aplicada, Dec. 1974, Lisbon
 - (28) A.G. PORTELA, Aplicação do Conceito de Proximidade à Termodinâmica Macroscópica, 1º Congresso Nacional de Mecânica Teórica e Aplicada, Dec. 1974, Lisbon
 - (29) A.G. PORTELA, Aplicação de um Sistema de Proximidades a um Sistema Mecânico Articulado, 1º Congresso Nacional de Mecânica Teórica e Aplicada, Dec. 1974, Lisbon
 - (30) A.G. PORTELA, Certas Classes de Proximidade de Aplicação à Mecânica, 2º Congresso Nacional de Mecânica Teórica e Aplicada, July 1979, Lisbon

- (31) J.A. GOGUEN, L - Fuzzy Sets, Journal of Mathematical Analysis and Applications 18, 145-174, 1967
- (32) L.A. ZADEH, Probability Measures of Fuzzy Events, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 23, 421-427, 1968
- (33) J.A. GOGUEN, The Fuzzy Tychonoff Theorem, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 43, 734-742, 1973
- (34) C.K. WONG, Fuzzy Topology: Product and Quotient Theorems, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 45, 512-521, 1974
- (35) M. ROBERTS LOWEN, Topologie Générale - Topologies Floues, C.R.Acad. Sc. de Paris, 278, 1^{er} Avril 1974, Série A-925
- (36) BRUCE HUTTON, Normality in Fuzzy Topological Spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 50, 74-79, 1975
- (37) R. LOWEN, Initial and Final Fuzzy Topologies and the Fuzzy Tychonoff Theorem, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 58, 11-21, 1977
- (38) J. FLACHS and M.A. POLLATSCHKE, Further Results on Fuzzy-Mathematical Programming, Information and Control, 38, 241-357, 1978
- (39) T.E. GANTNER and R.C. STEINLAGE, Compactness in Fuzzy Topological Spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 62, 547-562, 1978.
- (40) A.G. PORTELA, Proximity, paper presented to the 1st. Congress H.B.D.S., held in Lisbon, May 1979
- (41) R. LOWEN: "Fuzzy Topological Spaces and Fuzzy Compactness", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 56, 1976
- (42) A.A. MONTEIRO: Técnica, Setembro e Outubro, 1978, nº449/50, ano LIII volume XL

Anexo 1 (SUBCONJUNTOS VAGOS)

1) Todos os subconjuntos de um dado conjunto universal de discurso X podem ser especificados por um "caracterizante" (característica ou indicatriz) e este não é mais do que uma aplicação $f: X \rightarrow R$, onde R representa um reticulado.

Assim, se o reticulado R for o de Boole $R_B \equiv (0,1)$ e associando o valor 1 à frase semântica "o elemento $x \in X$ pertence ao subconjunto A de X " e o valor 0 à frase "o elemento $x \in X$ não pertence ao subconjunto A de X ", então R_B é a indicatriz do subconjunto A .

Existe uma relação 1-1 entre os subconjuntos A e as respectivas indicatrizes (ou caracterizantes).

A natureza de X , R , F , onde F representa o conjunto das aplicações f previstas numa dada Teoria de subconjuntos Vagos (SCV), é determinante nas propriedades e estrutura dessa teoria.

O conjunto universal de discurso X mais usado é a recta real, porém conjuntos com um número enumerável ou finito de elementos é usual em aplicações.

Quanto aos reticulados (R) , convém distinguir duas classes: A e B .

Sendo $a, b \in R$ a, b são elementos quaisquer do conjunto de base R do reticulado R ,

e se $\forall (a, b) \in R^2$, for possível definir $\max[a, b] = c$
e $\min[a, b] = d$
e $c, d \in R$

estão esta classe será designada de A , ou tal não é possível para alguns pares e então designa-se de B .

Os reticulados (R) do tipo A são munidos das conectivas $(\vee \text{ e } \wedge)$.

Onde:

$\vee(a, b)$ é interpretado como $\max(a, b)$

$\wedge(a, b)$ é interpretado como $\min(a, b)$

Se o reticulado for complementado ou pseudo-complementado pode definir-se:

$$\neg a = a^c = 1 - a$$

onde 1 é o símbolo do elemento do supremo do reticulado.

0 é o símbolo do elemento ínfimo do reticulado.

Nos reticulados do tipo B , as conectivas mais usuais são:

$\Psi(a, b)$ interpretado como majorante (a, b)

$\uparrow(a, b)$ interpretado como minorante (a, b)

Estas relações assentam na relação de ordem (λ) do reticulado R .

Uma classe de reticulados do tipo A muito usada é construída com base nos conjuntos adiante definidos (11, GOTTWALD)

$$R_m = \left\{ \frac{k}{m-1} \mid 0 \leq k \leq m-1 \right\} \quad m \geq 2$$

para $m = 2$ R_2 é o reticulado de Boole usado nos conjuntos usuais.

$m > 2$ R_m obtêm-se reticulados onde é sempre possível definir max e min (como aliás em R_2) e card (R_m) é finito ou enumerável.

Simboliza-se por $R_\infty = [0, 1]$.

Repare-se que a relação de ordem dos reticulados do tipo $R_m (\leq)$ vai permitir formar conjuntos

$$R_m(\alpha) = \left\{ z \mid z \in R_m \text{ e } (0 \leq z \leq \alpha) \right\}$$

onde $\alpha \in [0, 1]$

α simboliza o "grau de pertence" ou "membership level", conceito semântico fundamental nas teorias de S.C.V..

São evidentes as seguintes expressões:

$$R_m(1) = R_m$$

$$R_m(0) = 0$$

$$\alpha \geq \beta \quad R_m(\alpha) \supset R_m(\beta)$$

$$\forall \alpha \quad R_m(1) \supset R_m(\alpha) \text{ e } R(\alpha) \supset R_m(0)$$

Semânticamente (1) representa a certeza absoluta na verdade da declaração e (0) a certeza absoluta na não verdade de uma declaração.

A dificuldade semântica que os conjuntos vulgares introduzem é esta "absoluta certeza" no sim ou no não, quando a informação recebida ou emitida é apenas verdadeira num certo grau.

2) Sistemas de conectivas

O sistema de conectivas mais usado é max e min mas muitas outras formas têm sido apresentadas e convém referir para mostrar como é vasto o campo por explorar.

Assim, Yager (21) para o reticulado $R \equiv [0, 1]$, pseudo-complementado,

sugere uma intersecção da forma:

$$A \cap_p B = C_p$$

onde

$$C_p(x) = 1 - \min \left\{ 1, \left([1 - A(x)]^p + [1 - B(x)]^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

$\text{com } p \geq 1$

de que resultam os seguintes casos particulares:

$$p = \infty \quad C_p(x) = \min [A(x), B(x)]$$

$$p = 1 \quad C_p(x) = 1 - \min \left\{ 1, 2 - (A(x) + B(x)) \right\}$$

$$= \max \left\{ 0, (A(x) + B(x) - 1) \right\}$$

Esta definição conserva as propriedades de associatividade e comutatividade e $C_p(x)$ é monotonicamente não decrescente com $A(x)$ e ou $B(x)$

$$\emptyset \cap_p A(x) = \emptyset$$

$$1 \cap_p A(x) = A(x)$$

e como propriedades novas

$$A(x) \cap_{p'} A(x) \leq A(x) \cap_{p''} A(x) \text{ se } p' < p''$$

$$A(x) \cap_{\infty} A(x) = A(x)$$

$$A(x) \cap_p B(x) \leq \min \{A(x), B(x)\} = A_x \cap_{\infty} B(x)$$

Yager para definir união $\cup$ usa a pseudo complementaridade de Zadeh definida como:

$$\neg A = \bar{A} = 1 - A$$

então será:

$$\overline{A \cup_p B} = \bar{A} \cap_p \bar{B}$$

Donde ainda

$$D_p = A(x) \cup_p B(x) = \min \left\{ 1, \left[A(x)^p + B(x)^p \right]^{\frac{1}{p}} \right\}$$

Propriedades correspondentes às da intersecção podem ser demonstradas.

Outro exemplo é devido a Gottwald (11) que constrói a sua lógica a partir de R_m e R_{∞} e define numerosas conectivas:

$$\neg A(x) = 1 - A(x)$$

$$\lambda_1(A(x), B(x)) = \min \{A(x), B(x)\}$$

$$\Lambda_2(A(x), B(x)) = \max \{0, A(x) + B(x) - 1\}$$

A primeira corresponde a $p=\infty$ de Yager e a segunda a $p=1$ de Yager.

$$V_1(A(x), B(x)) = \max \{A(x), B(x)\}$$

$$V_2(A(x), B(x)) = \min \{1, A(x) + B(x)\}$$

$$\rightarrow (A(x), B(x)) = \min \{1, 1 - A(x) + B(x)\}$$

$$\leftrightarrow (A(x), B(x)) = 1 - |s - t|$$

Com estes dois exemplos espera-se ter mostrado como são variadas as conectivas nas teorias de S.C.V..

Anexo 2 - Probabilização de subconjuntos vagos

O primeiro trabalho é devido a Zadeh [32] publicado no Journal of Mathematical Analysis and Applications em 1968, e introduz uma generalização ao conceito clássico de probabilidade.

Assim, partindo de um R^m munido de uma σ -álgebra de Boreleanos (R^m, β) , define uma medida P real e normada sobre (R^m, β) , e

$$\begin{aligned} P(A) &= \int_A dP \\ &= \int_{R^m} I_A(x) dP \end{aligned}$$

onde $I_A(x)$ é a indicatriz do conjunto A (ou, usando a linguagem de S.C.V., I_A é o caracterizante μ_A de A).

A generalização consiste justamente em substituir I_A por μ_A e aplicar a definição aos conjuntos vagos.

Como Zadeh usa essencialmente o reticulado $[0, 1]$ tal como na teoria clássica de probabilidades, encontrava-se na situação de os domínios serem iguais nas duas teorias, bem como os contradomínios.

Então, definiu probabilidade de um subconjunto vago como:

$$\begin{aligned} P(A) &= \int_A dP \\ &= \int_{R^m} I_A(x) \cdot dP \end{aligned} \quad (\text{Integral Lebesgue-Stieltjes})$$

Assim, a probabilidade de um acontecimento vago (Fuzzy) é a esperança do respectivo caracterizante (μ_A) .

Donde resultam as seguintes propriedades principais:

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i,j} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Independência de A e B é definida pela expressão clássica:

$$P(A, B) = P(A) \cdot P(B)$$

A probabilidade condicional é definida por:

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}$$

A média e variância são definidas como se segue:

$$m_P(A) = \frac{1}{P(A)} \int_{R^n} x \cdot \mu_A(x) \cdot dP$$

$$VAR_P(A) = \frac{1}{P(A)} \int_{R^n} (x - m_P(A))^2 \mu_A(x) \cdot dP$$

A entropia toma uma forma corrente de :

$$HP(A) = - \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) \cdot p_i \log p_i$$

$$\text{com } P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

que terá de ser entendida como a entropia de um conjunto vago A com relação a uma distribuição de probabilidades P .

Assim, se x e y forem duas variáveis aleatórias com distribuições de probabilidade P e Q , será $H(x,y) = H(x) + H(y)$ e

será $HPQ(A,B) = P(A) HP(A) + P(B) + HP(B)$

$$PQ = \{ p_i q_j \} \quad i,j \in (1, \dots, n)$$

$$P(A) = \sum_i \mu_A(x_i) \cdot p_i$$

$$P(B) = \sum_j \mu_B(y_j) \cdot q_j$$

$$HP(A) = - \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) \cdot p_i \log p_i$$

$$H^Q(A) = - \sum_{j=1}^n \mu_B(y_j) \cdot q_j \log q_j$$

Nota final:

Porque: $dP = P'(x) \cdot dx$

será: $P(A) = \int_{R^n} \mu_A(x) \cdot P'(x) \cdot dx$

Hisdal (7) para estender a probabilização de conjuntos vagos a relações vagas define:

- Dois conjuntos universais de discurso: X_1 e X_2
- $Y = (Y_1, Y_2)$ uma variável binária vaga que toma valores em $X_1 \times X_2 = X$
- $\pi_{Y_2|Y_1}(x_2|x_1)$ a distribuição da "possibilidade"⁽¹⁾ de Y_2 , desde que a Y_1 tenha sido dado um determinado valor $x \in X_1$
- $\pi_{Y_1}(x_1)$ a "possibilidade"⁽¹⁾ marginal para Y_1

Repare-se nas correspondências seguintes:

Possibilidade $\longleftrightarrow$ Probabilidade

Vago (Fuzzy) $\longleftrightarrow$ aleatório

$\pi \longleftrightarrow P$ (probabilidade)

É fácil aproveitar esta definição e respectivos teoremas para aplicar a relações vagas entre X_1 e X_2 .

Assim, se ρ for uma relação de X_1 para X_2 então é possível calcular

$$\pi(x_2) = \pi(x_1) \circ \rho$$

onde $\circ$ é o operador max.min (tratam-se de reticulados do tipo A).

Nguyen (8) trata de um modo semelhante as distribuições de possibilidades,⁽¹⁾ isto é, apoiando-se na teoria das distribuições de probabilidades e de modo que se o caracterizante do subconjunto vago degenerar na indicatriz de um conjunto vulgar, as distribuições de "possibilidades"⁽¹⁾ reduzem-se a distribuições de probabilidades.

Nas condições anteriores,

$$\begin{aligned} \pi_Y(x) &\triangleq \text{Possibilidade } \{Y = x\} \\ \pi_Y(A) &= \sup_{x \in A} \pi_Y(x) \end{aligned}$$

onde: A é um subconjunto vago de X.

Assim, sejam dadas:

Uma função $\pi: X \rightarrow [0,1]$

sendo $\sup_x \pi(x) = 1$

se $T : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$

Então Y_1 e Y_2 são T -independentes, sse.

$$f_{(Y_1, Y_2)}(x_1, x_2) = T[f_{Y_1}(x_1), f_{Y_2}(x_2)]$$

$$\text{e } \theta_{x_2} [T(f_{Y_1}(x_1), f_{Y_2}(x_2))]$$

A distribuição condicional será dada por:

$$f_{Y_1/Y_2}(x_1/x_2) = \frac{f_{(Y_1, Y_2)}(x_1, x_2)}{f_{Y_2}(x_2)} \cdot \alpha[f_{Y_1}(x_1), f_{Y_2}(x_2)]$$

onde $\alpha : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ é designada de função de normalização e é escolhida de tal modo que:

a) $f_{Y_1/Y_2}(x_1/x_2) \leq 1$

b) $\left[f_{Y_1/Y_2}(x_1, x_2) = T(f_{Y_1}(x_1), f_{Y_2}(x_2)) \right] \Rightarrow$

(implica) $\Rightarrow \left[f_{Y_1/Y_2}(x_1/x_2) = f_{Y_1}(x_1) \right]$

Finalmente, o operador $\theta(\)$ pode tomar a forma de $\underline{\text{Sup}}(\)$

Sobre este tema veja-se também H\"ohle (9).

Tem interesse referir o trabalho de Klement (18) sobre σ -Algebras-vagas e funções mensuráveis vagas.

Porque os trabalhos apresentados até 1980 foram desenvolvidos em torno de classes de funções vagas da forma:

$$\mu : X \rightarrow I$$

X munido de uma σ -Algebra $\mathcal{A}$ e $I = [0, 1]$ munido de σ -Algebra de Borel.

Assim, o domínio e contradomínio de μ são os espaços mensuráveis, respectivamente $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$ que não são espaços de conjuntos vagos.

O progresso efectuado por Klement consiste em partir de espaços de subconjuntos vagos, apoiando-se nos trabalhos efectuados em Topologia de conjuntos vagos, nomeadamente os de Lowen (41) e (37). Porque neste domínio há copiosa bibliografia, sugere-se as referências seguintes:

(33), (34), (10), (11), (12), (14), (13), (15) e (26)

Uma medida $\hat{\pi}: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, 1]$

satisfazendo a:

$$\hat{\pi}(\emptyset) = 0 \text{ e } \hat{\pi}(X) = 1$$

sendo $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de X

Então:

$$\pi\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sup_{i \in I} \hat{\pi}(A_i)$$

onde I é um conjunto de índices.

Donde resulta que $\hat{\pi}$ é:

- $A \subset B \Rightarrow \hat{\pi}(A) \leq \hat{\pi}(B)$
- É subaditiva.
- $\hat{\pi}(\{x\}) = \pi(x)$ pode não ser identicamente nulo.

A extensão destes conceitos às distribuições de possibilidades⁽¹⁾ faz-se ao definindo:

$$\begin{aligned} \text{Possibilidade de } \{Y \text{ ser } A\} &= \\ &= \sup \{ \mu_A(x) \wedge \pi_Y(x) \} \end{aligned}$$

onde $\mu_A(x) \rightarrow$ Caracterizante de A

$\pi_Y(x) \rightarrow$ A função Y

Repare-se:

1) Tanto π_Y como μ_A operam de $X \rightarrow [0, 1]$

2) A forma reconduz-se a conceitos clássicos quando o caracterizante degenera na indicatriz de um conjunto usual.

Assim, pode ser introduzida a noção de distribuições condicionais.

Sejam: X_1 e X_2 dois conjuntos universais.

$$f_{(Y_1, Y_2)}: X_1 \times X_2 \rightarrow [0, 1]$$

$$f_{Y_1}(x_1) = \theta_{x_2} [f_{(Y_1, Y_2)}(x_1, x_2)]$$

$$f_{Y_2}(x_2) = \theta_{x_1} [f_{(Y_1, Y_2)}(x_1, x_2)]$$

θ_{x_1} e θ_{x_2} são operações de "mistura" sobre X_1 e X_2 , respectivamente.

Dada a extensão deste domínio, preferiu-se produzir duas sínteses que constituem os anexos 3 e 4.

Anexo 3 - Resume os trabalhos de Klement et Alter, (32), (18), (24)

e

Anexo 4 - Resume o trabalho de Hirota (25), em 1981 que lança mão do conceito de espaço paramétrico a abre eventualmente uma nova via à probabilização dos subconjuntos vagos.

(1) O termo "Possibilidade" descreve um conceito próximo de "Probabilidade" na forma mas distante no significado.