ANTÓNIO GOUVÊA PORTELA
Professor do Instituto Superior Técnico

CYBERNÉTICA
E
COMPORTAMENTO ECONÓMICO

SEPARATA DE *COLECTÂNEA DE ESTUDOS*, N.º 8, 1960

CENTRO DE ESTUDOS DE ESTATÍSTICA ECONÓMICA
Av. Infante Santo, Lote 3, 1.º-C LISBOA-3 PORTUGAL

Meu querido
Pai, mais
"um" para o
seu arquivo

12/V/60

CYBERNÉTICA E COMPORTAMENTO ECONÓMICO

PREÂMBULO

O estudo da Cybernetica, da teoria da Informação e do controle sugeriu o presente trabalho.

É relamente tentador aplicar ao Homem e seus agregados sociais os tratamentos formais destas ciências desde que seja possível descrever o seu comportamento dinâmico por meio dum *modelo* devidamente adaptado.

Como primeiro passo nesta senda convirá experimentar um modelo dinâmico relativamente simples mas que já envolva uma equação diferencial de 2.ª ordem do parâmetro (variável) que afere o estado do indivíduo e generalizá-lo para o caso de vários indivíduos (ou suas agregações) ligadas entre *si* e com o meio exterior por vários modos e solicitações descritos por vários parâmetros e não apenas por um só.

Como todo o sistema lógico, aquele que adiante se exporá, assenta num certo número de hipóteses de base e a validade das conclusões e teoremas dependerá essencialmente:

— Da correcção das deduções feitas — o que é relativamente fácil de conferir em modelos matemáticos.
— Da correcção das hipóteses de base — a conferência ou prova destas hipóteses já não pode ser realizada dentro do próprio sistema mas terá de ser encontrada por via *empírica* e *experimental* sondando a natureza do problema económico e social.

Quando se propõe um sistema ou modelo para explicar a natureza é evidentemente mais fácil cuidar da sua correcção intrínseca, mas é trabalho muito mais penoso provar que as bases do sistema são correctas, pelo enorme esforço e trabalho experimental que é requerido.

O mérito do sistema ou modelo proposto depende objectivamente da sua aproximação da *realidade económica-social* que ele pretende traduzir e subjectivamente da circunstância de ser original na sua estruturação.

Não posso, infelizmente, nem proceder aos trabalhos experimentais necessários à realização da *prova* da exactidão das suas bases e pressupostos, nem sequer sei se esta via foi já trabalhada anteriormente.

De qualquer forma julgo que merece pelo menos o exame dos especialistas nesta matéria e peço a sua tolerância na respectiva apreciação.

INTRODUÇÃO

Para apresentar um novo modelo convém proceder metòdicamente; assim começarei por descrever a linguagem e respectiva simbologia, depois as bases e pressupostos e finalmente o sistema será desenvolvido.

I) Linguagem e Simbologia

«*Indivíduo*» (*) — Designaremos por «indivíduo» não só um ser humano como um agregado humano, como ainda agregados de agregados homogéneos de seres humanos.

A única exigência para que se designe por «indivíduo» um homem ou seus agregados, é de existirem entre os vários componentes do agregado e entre este e o espaço exterior sujeições ou condicionalismos. — Portanto envolve uma vida em Sociedade. — Outras designações poderiam ser dadas, como por exemplo: sistemas, agregações, etc., mas nas descrições que se fazem mais adiante a palavra «indivíduo» responde melhor às situações criadas.

Informação — Este termo designa a «influência» que actua sobre o «indivíduo» singular ou colectivo e representa todo o constrangimento exterior ao «indivíduo».

A informação que é um facto objectivo representa-se no «indivíduo» de acordo com uma subjectividade que o caracteriza.

Assim, uma alta na bolsa, a perda duma mercadoria, um naufrágio, a proibição de importação, são *informações* que representam para «indivíduos» diferentes, coisas diferentes.

Parâmetro — Um «indivíduo» é caracterizado por um certo número de *parâmetros*.

(*) *Nota:* O termo «indivíduo» terá de ser entendido no sentido de «unidade de comportamento».

O modelo será tanto mais perfeito quanto maior for o número de *parâmetros* usados para o descrever. Pràticamente admite-se que um número finito chega para definir correctamente um «indivíduo».

Num modelo simplificado um «indivíduo» colectivo, como por exemplo a indústria de panificação, pode ser caracterizado por 5 parâmetros, por exemplo:

— como fonte de emprego
— como abastecedor do público
— como utilizador de crédito
— como investidor de capitais
— como adquiridor de matérias-primas

Assim, o estudo que envolva 3 «indivíduos» colectivos respectivamente com 5, 4 e 7 parâmetros, constituirá um «indivíduo» com $5+4+7=16$ parâmetros.

Resposta — Quando um conjunto de informações é recebida por um «indivíduo» colectivo ou não, este reage alterando alguns dos seus *parâmetros* definidores; a esta alteração dar-se-á o nome de *resposta* do «indivíduo» às informações recebidas.

Classificação das informações — Classificaremos as informações em:

— informações-forças
— informações-elásticas

A *informação-força* actua duma forma irreprimível no «indivíduo» e corresponde a factos inamovíveis, por exemplo:

O navio que trazia a mercadoria afundou-se, a exportação foi proibida, os impostos passaram a ser regidos por novas regras, etc.

A *informação-elástica* actua indirectamente como por exemplo as cotações na bolsa subiram, os preços de venda ao público baixaram. O «indivíduo» pode reagir ou não a estas informações, mas estas não têm o carácter de irremediável.

As informações-elásticas serão apreciadas não só pelo seu *valor* como pela sua *tendência* no tempo.

Energia da Informação ou da Resposta — Esta noção é definida pelo integral do produto da força, informação ou resposta, pela derivada do *parâmetro*, em ordem ao tempo.

Ou seja, quanto maior for a alteração do *parâmetro*, maior será a energia de uma informação e maior será a energia da *resposta* do indivíduo.

Portanto, quanto maiores forem os efeitos no parâmetro considerado, tanto maior será a *energia* posta em jogo.

II) Bases e pressupostos do Modelo:

O Modelo será construído admitindo como verdadeiro o seguinte:

1.º Que o «indivíduo» é susceptível de ser descrito por *n* parâmetro sendo *n* finito.
2.º Que durante o estudo do fenómeno dinâmico são constantes as relações paramétricas das ligações dentro do sistema e entre este e o exterior.
3.º O exterior do sistem a é representado por:

n — informações-forças
m — informações-elásticas
m — tendência das informações-elásticas.

4.º Que o *estado* do «indivíduo», a sua evolução no tempo e a tendência dessa evolução estão ligadas entre si por uma equação diferencial de 2.ª ordem de coeficientes constantes.

O Capítulo III) será destinado ao estabelecimento da função de ligação entre o «indivíduo» e o mundo exterior descrito pelas «informações» recebidas pelo «indivíduo».

III) Função de ligação

(1) Seja então, x^i o parâmetro genérico que mede o «estado» do indivíduo apreciado segundo o parâmetro i.

O tensor $[x^i]$ representará o «estado» do indivíduo num determinante instante t.

(2) Designaremos $D[x^i]$ a 1.ª derivada do «Estado» do indivíduo ou seja a sua «evolução».

(3) E por $D^2[x^i]$ a 2.ª derivada do «Estado» ou a 1.ª derivada da «evolução» ou ainda «taxa da evolução».

(4) Designaremos por $[f_i]$ o tensor de 1.ª ordem que define as *informações-forças* que directamente incidem sobre os parâmetros que definem o «estado» do indivíduo.

(5) Designaremos por $[y^e]$ o conjunto de *informações-elásticas* que representam a situação *exterior* ao «indivíduo» e que podem influir no seu estado. Será igualmente um tensor de 1.ª ordem num espaço a *m* dimensões; em geral, será *m* diferente de *n*.

(6) Dum modo idêntico se definirá $D\,[y^e]$, que representará a tendência (variação no tempo) da *informação.*

A *hiótese de trabalho* é a seguinte:

Sobre o «estado» do «indivíduo» incidirão as seguintes constrições:

a) A *informação-elástica* do estado actual do mundo exterior representado por $[y^e]$.
b) A taxa de evolução do «estado» do mundo exterior $D\,[y^e]$.
c) As *informações-forças* que actuam directamente nos parâmetros que definem o «estado» do indivíduo $[f_i]$ e que são em igual número (n).
d) O estado da evolução do indivíduo no tempo $D\,[x^i]$.
e) A taxa de evolução do indivíduo no tempo $D^2\,[x^i]$.
f) Finalmente admite-se que entre a totalidade dos factores referidos nas alíneas precedentes e o «estado» do indivíduo existem relações lineares susceptíveis de sere m representadas por matrizes. Como corolário da hipótese *f*) admitimos que são aditivos os *efeitos.*

Nas condições referidas anteriormente é possível escrever:

$$[x^i] = [{}_a x^i] + [{}_b x^i] + [{}_c x^i] + [{}_d x^i] + [{}_e x^i] \tag{1}$$

Significando:

$[{}_a x^i]$ = o tensor «estado» do indivíduo resultante do tensor $[y^e]$ — «estado» do mundo exterior.

$[{}_b x^i]$ = o tensor «estado» do indivíduo resultante do tensor $D\,[y^e]$ — taxa de evolução do mundo exterior.

$[{}_c x^i]$ = o tensor «estado» do indivíduo resultante do tensor $D\,[x^i]$ — evolução do «estado» do indivíduono tempo.

$[{}_d x^i]$ = o tensor «estado» do indivíduo resultante do tensor $D^2\,[x^i]$ — *taxa de evolução* do «indivíduo» no tempo.

${}_e x^i]$ = o tensor «estado» do «indivíduo» resultante do tensor $[f_i]$ — forças de constrangimento.

As correlações lineares referidas na alínea *f*) são descritas pelas 5 matrizes adiante indicadas:

(2) $$\underset{(n,1)}{[{}_a x^i]} = \underset{(n,m)}{M_a} \cdot \underset{(m,1)}{[y^e]}$$

(3) $$\underset{(n,1)}{[{}_b x^i]} = \underset{(n,m)}{M_b} \cdot D \underset{(m,1)}{[y^e]}$$

(4) $$\underset{(n,1)}{[{}_c x^i]} = \underset{(n,n)}{M_c} \cdot D \underset{(n,1)}{[x^i]}$$

(5) $$\underset{(n,1)}{[{}_d x^i]} = \underset{(n,n)}{M_d} \cdot D^2 \underset{(n,1)}{[x^i]}$$

(6) $$\underset{(n,1)}{[{}_e x^i]} = \underset{(n,n)}{M_e} \cdot \underset{(n,1)}{[f_i]}$$

Substituindo 2), 3), 4), 5) e 6) em 1) teremos:

(7) $$[x_i] = M_a \cdot [y^e] + M_b \cdot D [y^e] + M_c \cdot D [x^i] + M_d \cdot D^2 [x^i] + M_e \cdot [f_i].$$

Multiplicando por Me^{-1} a expressão 7) e arrumando-a de outra forma, poderemos escrever (*):

(8) $$Me^{-1} \cdot Md \cdot D^2 [x^i] + Me^{-1} \cdot Mc \cdot D [x^i] - Me^{-1} [x^i] = - [f_i] - Me^{-1} Ma [y^e] - Me^{-1} \cdot Md\, D [y^e]$$

Poderá escrever-se finalmente a expressão (8) da seguinte forma:

(9) $$Ad\, D^2 [x^i] + Ac\, D [x^i] + Ao [x^i] = - [f_i] - Ao [y^e] - Ab\, D [y^l]$$

sendo:

$$\underset{(n,n)}{Ad} = \underset{(n,n)}{Me^{-1}} \cdot \underset{(n,n)}{Md} \qquad \underset{(n,n)}{Aa} = \underset{(n,n)}{Me^{-1}} \cdot \underset{(n,n)}{Ma}$$

$$\underset{(n,n)}{Ac} = \underset{(n,n)}{Me^{-1}} \cdot \underset{(n,n)}{Mc} \qquad \underset{(n,n)}{Ab} = \underset{(n,n)}{Me^{-1}} \cdot \underset{(n,n)}{Mb}$$

$$\underset{(n,n)}{Ao} = - \underset{(n,n)}{Me^{-1}}$$

O 1.º membro da expressão (9) caracteriza o «indivíduo», o 2.º membro caracteriza o «meio exterior».

O 1.º membro tem ainda a particularidade de realizar essa caracterização tendo em atenção o «estilo» de resposta que é *próprio do indivíduo* representado pelas matrizes *Md Me*, bem como a influência que

(*) *Nota:* M_e^{-1} existe sempre, porque nas condições do problema det $M_e \neq 0$.

tem na *resposta* a natureza da «força exterior» caracterizada pela matriz Me^{-1} comum a todos os *termos*, Ad, Ae, Ao, Aa, Ab.

Isto significa que Me^{-1} confere um *peso* à natureza da informação. A mesma intensidade de informação não provoca uma resposta igual num dado «indivíduo» porque depende da natureza do parâmetro que vier a ser excitado (se *i* se *k*).

IV) Estudo da equação diferencial Matricial (9)

Vamos efectuar esse estudo começando por examinar o caso simples dos parâmetros se reduzirem a um, m será igualmente 1.

Para $\begin{cases} m = 1 \\ n = 1 \end{cases}$ resultam as seguintes simplificações evidentes:

$$10) \qquad d \cdot \frac{d^2 x}{d t^2} + e \cdot \frac{dx}{dt} + q \cdot x = -f - a \cdot y - b \cdot \frac{dy}{dt}$$

Sendo respectivamente:

$$\begin{aligned} d &\rightarrow Ad \\ e &\rightarrow Ae \\ q &\rightarrow Ao \\ a &\rightarrow Aa \\ b &\rightarrow Ab \\ D^2 &\rightarrow \frac{d^2}{d t^2} \\ D &\rightarrow \frac{d}{d t} \end{aligned}$$

Neste estudo examinaremos primeiro as características do «indivíduo», ou seja o 1.° membro e depois as repercussões num dado «indivíduo» da acção do meio exterior ou seja a influência do 2.° membro sobre o 1.°

IV a) Estudo das características do «indivíduo»

Esse estudo envolve a integração de equação

$$d \cdot \frac{d^2 x}{d t^2} + e \frac{d x}{d t} + q x = 0$$

que fornece imediatamente para x a seguinte solução:

$$11) \qquad x^* = C_0 \cdot e^{\left(\frac{-e \pm \sqrt{e^2 - 4dq}}{2d}\right) \cdot (t + \tau_0)}$$

sendo x a parte real de x^* e ainda τ_0 e C_0 duas constantes de integração determináveis pelas condições aos limites da função.

Os seguintes casos se podem dar:

a) $e^2 - 4\,d.\,q < 0$ e então x^* será da forma:

$$x^* = C_0 \cdot e^{\left(\frac{-e \pm i\sqrt{4dq - e^2}}{2d}\right) \cdot (t + \tau_0)}$$

O que significa que o «estado» do indivíduo é *oscilatório* com uma frequência própria e portanto se esse indivíduo não estiver, num dado instante em *equilíbrio* o seu *estado* aproximar-se-á desse equilíbrio oscilando com uma amplitude que é dada segundo a exponencial $e^{\frac{-et}{2d}}$.

Se for $\frac{-e}{2d} < 0$ teremos a representação gráfica da fig. 1.

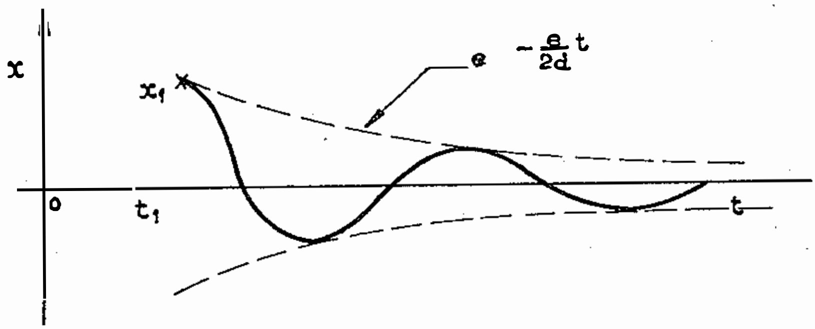


Fig. 1

Se $\frac{-e}{2d} > 0$, for positivo ou nulo, tomará então o aspecto das figuras 2 e 3 respectivamente:

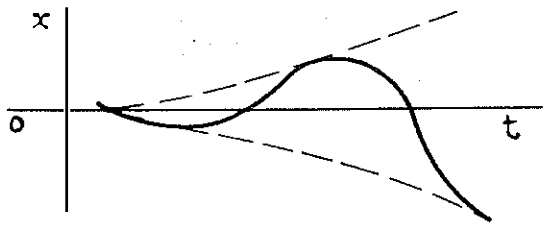


Fig. 2

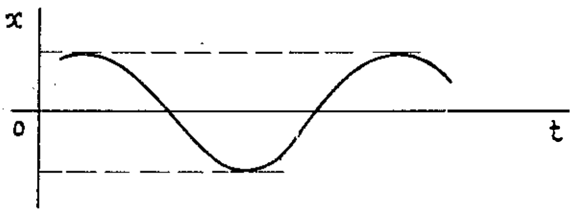


Fig. 3

Neste 2.º caso o indivíduo não encontrará jamais o seu equilíbrio e poderá considerar-se que está num *período* de *loucura* será portanto um indivíduo *instável*, pelo menos durante esse período.

A situação $\frac{e-}{2d} = 0$ poderá considerar-se como um caso limite, mas como a estacionaridade de *x* também, nunca seria atingida agrupa-se na categoria de indivíduos de características *instáveis*.

b) Se $e^2 - 4\ d.\ q > 0$ então *x* tem um movimento exponencialmente.

Fig. 4

Se $\frac{-e}{2d} < 0$, obteremos a figura 4.

Um indivíduo com tais características será inerentemente *estável* em relação ao parametro considerado, e a fig. 4 representará a forma como ele se aproxima dessa estabilidade.

Porém se $\frac{-e}{2d} > 0$ a exponencial será divergente (Fig. 5)

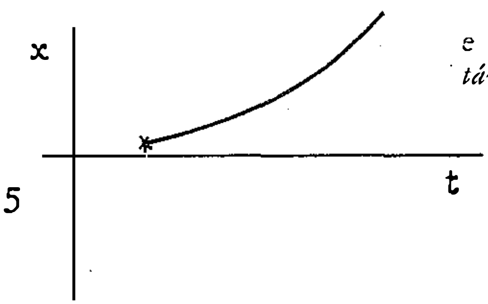


Fig. 5

e novamente o indivíduo será *instável.*

Em resumo poderá dizer-se:

1.º) Para que um indivíduo seja *estável* terá necessàriamente de ser $\frac{-e}{2d} < 0$; e $\frac{-e}{2d}$ — constituirá um critério de estabilidade nos indivíduos tanto de resposta *oscilante* como exponencial.

2.º) A aproximação da estacionaridade poderá fazer-se quer por oscilações sucessivas de amplitudes descrescentes, quer por meio dum exponencial.

Os «indivíduos» *normais,* submetidos a estudos de Cybernética reagem normalmente segundo curvas do tipo em que $\frac{-e}{2d} < 0$

Este facto não exclui a possibilidade de, para determinados *parametros* e em determinadas situações que a sua reacção seja *instável.*

IV b) ESTUDO DAS «REACÇÕES» DUM INDIVÍDUO AO MEIO EXTERIOR

O meio exterior é representado pelo 2.º membro da equação 10) com a forma $-f - ay - b\frac{dy}{dt}$.

Distinguiremos dois tipos distintos de *acções* do meio exterior sobre o indivíduo.

1.º tipo — *f* — São *informações-forças* que actuam directamente sobre o *parâmetro* x da resposta. A sua acção é *directa.*

2.º tipo $-ay - b\frac{dy}{dt}$ — São *informações-elásticas* que actuam igualmente no parâmetro (x) da resposta porém *modificadas* por meio das constantes ou *pesos a* e *b.* Este ponto é muito importante porque, por exemplo, se *a* e *b* forem nulos ou muito pequenos, essa informação não encontrará uma resposta no indivíduo ou esta será fraca. Ora, tanto *a* como *b* dependem do próprio indivíduo através de Ma e Md bem como de Me^{-1}.

Inversamente se *a* e *b* forem muito influentes a resposta (x) poderá ser desproporcionada em relação à informação $\left(y \text{ ou } \frac{dy}{dt}\right)$ *a* e *b* representarão para o indivíduo o grau de confiança que depositam na informação ou, visto de outro modo, a probabilidade de ocorrência do facto correspondente à informação recebida, ou ainda o peso atribuído pelo indivíduo à informação colhida.

Repetindo o que se disse no capítulo I) uma *informação-força* será por exemplo a *não* existência de uma matéria-prima ou o inverso, a chegada de um navio com um carregamento, um naufrágio, uma proibição de importação ou de exportação, um ano agrícola mau ou bom.

Têm uma incidência directa e «deslocam» o problema económico sem remissão.

Uma *informação-elástica* será por exemplo uma alteração de cotações na bolsa, dos preços dos artigos, desinteresse do público pela mercadoria ou serviço oferecido, etc.

Podem ter consequências catastróficas, porém não actuam directamente porque o «indivíduo» pode não transaccionar o seu papel ou continuar a comprar o artigo, insistir no mercado por meio de propaganda, etc., etc.

A ele cabe pesar os incovenientes ou vantagens dessa prática mas não tem, como a *informação-força* um efeito directo e independente da vontade do «indivíduo».

Ainda neste segundo tipo não só influi a informação (y) como a sua *tendência* $\frac{dy}{dt}$ e pode esta até prevalecer sobre aquela se o *peso b* for de maior monta que o peso *a* e isso depende do «indivíduo» como se disse acima.

Porém para um dado «indivíduo» serão *dados a* e *b* e portanto para estudar o comportamento do «indivíduo» representado pelo 1.º membro em relação à acção do meio (2.º membro) tanto monta estudar separadamente cada um dos 3 termos (f, ay, b $\frac{dy}{dt}$) como estudar a sua *resultante* — R.

Portanto, neste aspecto do problema, limitamo-nos a estudar neste capítulo a influência de $-R$ sobre o 1.º membro.

A equação 10) poderá então escrever-se:

$$d \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + e \frac{dx}{dt} + q\,x = -R$$

Haverá tantas respostas (x) quantas as formas de *R*.

Ora *R* varia no tempo e portanto todas as hipóteses se podem formular.

Porém qualquer função de *R* no tempo pode ser analisada em *funções degraus* (step-functions) da forma como a fig. 6 indica:

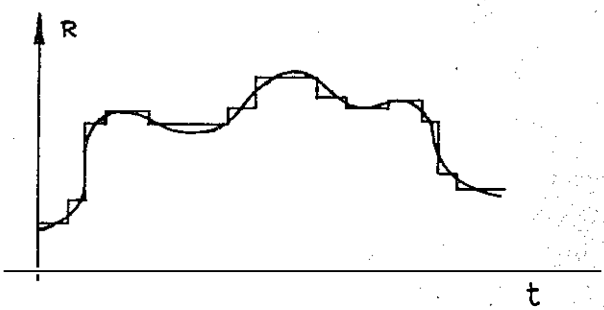


Fig. 6

A *curva quebrada* poderá aproximar-se de R tanto quanto desejarmos bastará para tanto apertar o *intervalo de tempo* da quantidade necessária.

Sucede ainda que, nos fenómenos económicos, a informação é sempre colhida a intervalos regulares, cotações da Bolsa bi-diárias, relatórios, estatísticas, semanais, mensais, trimestrais, anuais, etc., portanto as situações aproximam-se, na realidade, duma linha quebrada mais do que duma *linha contínua*.

Faremos pois a análise de *R* por meio de step-functions (funções degraus).

A integração da equação 12) que correlaciona a resposta *x* à função *R* (exterior) na hipótese de *R* ser uma função do tipo «step-function», faz-se da seguinte forma:

Fazendo $x_0 = \frac{-R}{q}$ e substituindo x_0 por y sendo $y = (x - x_0)$ será

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} \text{ e } \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

e então a expressão 12) poderá escrever-se:

$$d \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + e \frac{dy}{dt} + q\,(y + x_0) = -R$$

ou

$$\text{ou } d \cdot \frac{dy^2}{dt^2} + e \frac{dy}{dt} + q\,y = 0,$$

donde

13) $$y^* = c \cdot e^{\left(\frac{-c \pm \sqrt{c^2-4dq}}{2d}\right) \cdot (t+\tau_0)}$$

sendo $\left\{ \begin{array}{l} c \\ \tau_0 \end{array} \right.$ constantes de integração.

Portanto a forma da equação 13) é idêntica à já obtida em 11) mas transladada de um valor x_0 .

Em face do resultado atingido poderão estudar-se fàcilmente as consequências para (x) duma *informação perturbadora* R .

a) Influência de um *salto* R

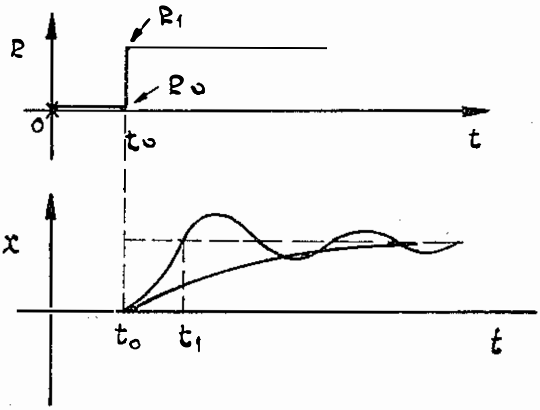


Fig. 7

Certa informação estava no nível R_0 no t_0 e chegou ao conhecimento do «indivíduo» a sua passagem, para R_1 .

Admitimos o «indivíduo» inicialmente em *repouso* em relação ao parâmetro x sobre o qual a informação R tem influência. A fig. 7 mostra dois exemplos de resposta (oscilante e exponencial).

Há agora que definir quando e como o *«indivíduo»* vai atingir a sua nova posição de *equilíbrio,* isto é, a sua *resposta* ou reacção.

Teòricamente só ao fim de um tempo infinito será atingido o equilíbrio, porém, pràticamente, desde que o *desvio* em relação à nova posição de equilíbrio for inferior a uma determinada percentagem pode considerar-se que o equilíbrio já se verificou. Há vários critérios para definir essa margem de incerteza mas poderemos admitir que o equilíbrio foi atingido se as flutuações de x a partir dum certo tempo t_m conhecerem uma faixa de $\pm\varepsilon$ da posição de equilíbrio para $t = \infty$.

Apresentam-se quatro soluções para ilustrar o proglema: Fig. 8.

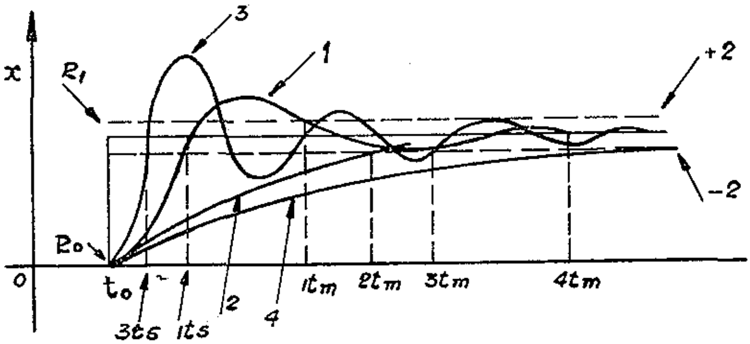


Fig. 8

1.º) «Indivíduo» com uma resposta «oscilante» mas que atinge ao fim dum tempo $({}_1t_m - t_0)$ o equilíbrio segundo o critério $\dashrightarrow x_\infty (1 \pm \varepsilon)$.

2.º) «Indivíduo» de resposta *não oscilante,* que atinge o equilíbrio exponencialmente, porém à custa duma resposta mais atrasada, pois só em ${}_2t_m$ esse equilíbrio se verifica segundo o critério referido.

3.º) «Indivíduo» com uma resposta igualmente «oscilante» mas com uma *estabilização* muito fraca (isto é, $\frac{-e}{2d}$ muito próximo de zero). Verifica-se que o equilíbrio para $(x(1+\varepsilon)$ só é atingido muito mais *tarde* em ${}_3t_m$, apesar de, na primeira oscilação, atingir a coordenada de equilíbrio primeiro do que o «indivíduo» do caso 1.º

4.º) «Indivíduo» de resposta *não oscilante,* mas em que $\frac{-e}{2d}$ é tão *forte* que só em ${}_4t_m$ terá o *equilíbrio* sido atingido.

IV c) Conceitos de sensibilidade e estabilidade

Sensibilidade — Definindo its o tempo em que pela primeira vez a curva da resposta (x) cruza a fronteira da *faixa de equilíbrio* $(\pm\varepsilon)$ e se considerarmos o tempo $\Delta t = (it_s - t_0)$ um critério para medir a *sensibilidade* do indivíduo à informação R, verifica-se que a melhor solução se encontra para a curva *3* seguindo-se 1, 2 e 4.

Estabilidade — Definindo *estabilidade* do indivíduo o coeficiente $\frac{-e}{2d}$ verifica-se que por ordem crescente as estabilidades dos 4 «indivíduos» indicados, se processa em sentido inverso ou seja: 4, 2, 1 e 3.

A melhor solução para um «indivíduo» consistirá num compromisso entre a sua «sensibilidade» e a sua «estabilidade», isto é, o óptimo estará entre a curva *1* e *2*.

Passando à descrição formal dos conceitos de estabilidade e sensibilidade, convirá retomar a equação 13) e analisá-la.

Ora
$$y^* = C_0 e^{\left(\frac{-e\ l \sqrt{e^2 - 4dq}}{2d}\right) \cdot (t+\tau)}$$

significará que
$$y = R_0 e^{\frac{-e}{2d} t} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{q}{d} - \frac{e^2}{4d^2}} \cdot t - \alpha_0\right).$$

Sendo R_0 e α_0 duas constantes de integração a definir. Mas, por hipótese, para $t = t_0$ será

$$\begin{cases} y_0 = x_0 = \dfrac{-R}{q} \\ y'_0 = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} y_0 = R_0 e^{\frac{-e}{2d} t_0} \cos\left(\sqrt{\frac{q}{d} - \frac{e^2}{4d^2}} \cdot t_0 - \alpha_0\right). \\ y_0 = R_0 e^{\frac{-e}{2d} t_0} \left(\dfrac{-e}{2d}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{q}{d} - \frac{e^2}{4d^2}} \cdot t_0 - \alpha_0\right) - \\ \quad - R_0 e^{\frac{-e}{2d} t_0} \cdot \sqrt{\frac{q}{d} - \frac{e^2}{4d^2}} \cdot \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{q}{d} - \frac{e^2}{4d^2}}\, t_0 - \alpha_0\right) \end{cases}$$

As duas condições fornecerão os valores de R_0 e α_0.
Admitamos essas operações feitas e seja

$$14) \qquad y = R_0 \cdot e^{\frac{-e}{2d}t} \cos\left(\sqrt{\frac{q}{d} - \frac{e^2}{4d^2}} \cdot t + \alpha_0\right)$$

A faixa $\pm \varepsilon$ será dada pela expressão
$\pm \varepsilon \cdot y_0$, sendo y_0 o valor de y para $t = t_0$

mas como $x = y + x_0 = y + \dfrac{-R}{q}$

$$\text{será} \quad \begin{cases} x_1 = \varepsilon\, y_0 + \dfrac{-R}{q} \\ x_2 = -\varepsilon\, y_0 + \dfrac{-R}{q} \end{cases}$$

O cruzamento verificar-se-á respectivamente nas condições:

$$\begin{cases} x_1 = \varepsilon\, y_0 + \dfrac{-R}{q} = \dfrac{-R}{q} + R_0\, e^{\frac{-e}{2d}t} \cos\left(\sqrt{} \cdot t + \alpha_0\right) \\ \text{e} \\ x_2 = -\varepsilon\, y_0 + \dfrac{-R}{q} = \dfrac{-R}{q} + R_0\, e^{\frac{-e}{2d}t} \cos\left(\sqrt{} \cdot t + \alpha_0\right) \end{cases}$$

o que permitirá determinar os tempos

$$\begin{array}{lll} {}_1t_m\,, & {}_2t_m \;\ldots\ldots\ldots\ldots & {}_nt_m \\ {}_1t_m'\,, & {}_2t_m' \;\ldots\ldots\ldots\ldots & {}_pt_m' \end{array}$$

O maior dos ${}_nt_m$ ou ${}_pt_m'$ será o tempo a partir do qual se verificará a estacionaridade e como é evidente ele dependerá do valor ε ou seja do critério de estacionaridade escolhido.

Na hipótese do sistema não ser periódico será então

$$y = C_1\, e^{\left(\frac{-e + \sqrt{e^2 - 4dq}}{2d}\right) \cdot t} + C\, e^{\left(\frac{-e - \sqrt{e^2 - 4dq}}{2d}\right) \cdot t}$$

sendo C_1 e C_2 constantes de integração a determinar como anteriormente se fez.

Os cruzamentos de x com x_1 e x_2 darão o tempo t_m em que se verifica a estacionaridade.

Como o cruzamento nunca se verificará com $x_1 = x + \varepsilon$, bastará experimentar com x_2.

A solução prática para este problema poderá consistir em marcar gràficamente a função x em função de T marcar as paralelas x_1 e x_2 e procurar os pontos de cruzamento.

IV d) INFLUÊNCIA DE *R* NA RESPOSTA

Tem agora interesse chamar a atenção para a influência que poderão ter na *resposta* «individual» outras formas de função R.

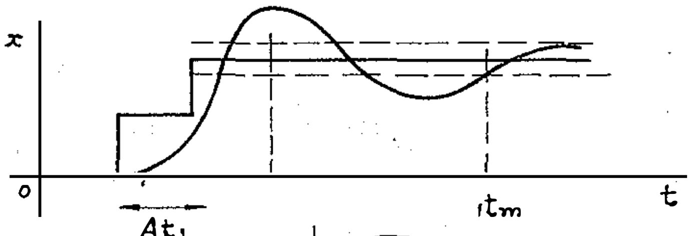


Fig. 9

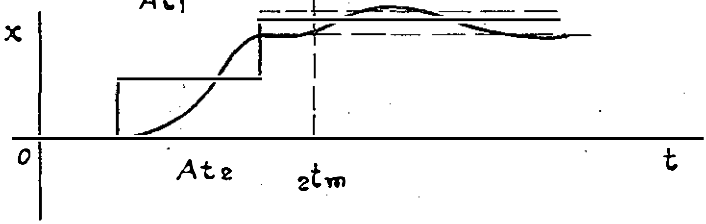


Fig 9-a

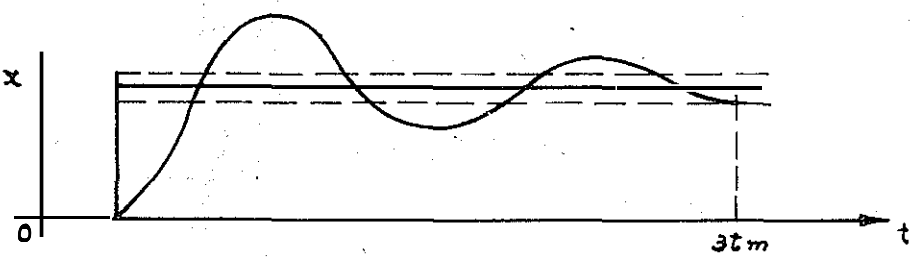


Fig. 9-b

As figuras 9 e 9-a mostram como duas funções «degrau» sucessivas podem provocar consequências completamente diferentes conforme o intervalo Δ_t é Δ_{t1} ou Δ_{t2}.

Com efeito as informações no mesmo sentido R_1 e R_2, conforme o segundo impulso R_2 apanha a função x ainda em ascenção (Eq. 9) ou próximo do máximo superior (Eq. 9-a) assim a estabilidade é atingida, mais tarde ou mais cedo.

Na fig. *9-b* as duas informações R_1 e R_2 vêm simultâneamente e adicionam-se e daí a estabilidade ser atingida ainda mais tardiamente.

Como, em geral, a todos os fenómenos económicos correspondem *sinais percursores* que funcionam de *informações* para um observador *atento,* este tem mais probabilidades de fornecer uma *resposta estabilizada* de que um observador desatento que recebe, duma só vez, a informação total. (Vejam-se figuras 10-a) e 10-b).

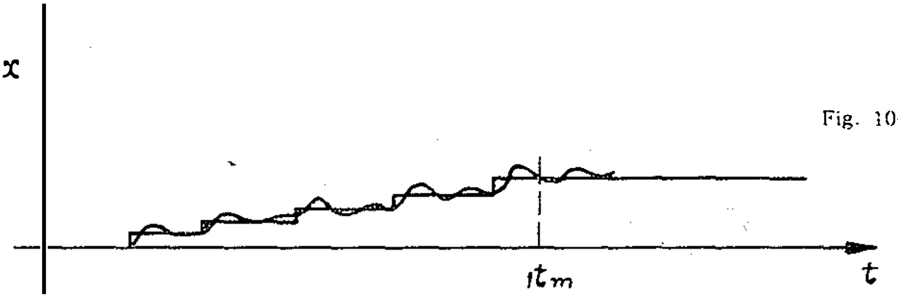


Fig. 10-a

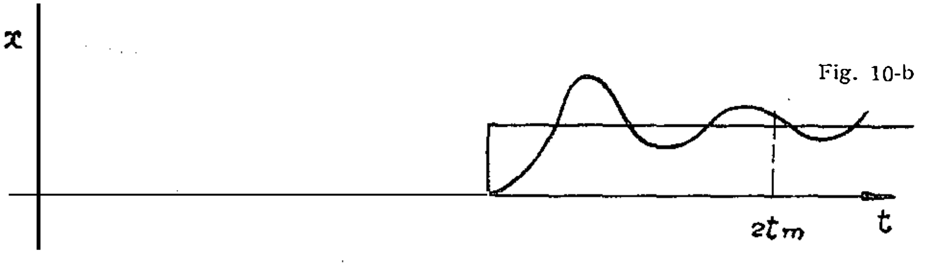


Fig. 10-b

Este facto mostra a importância da divulgação da *informação* a todos os níveis e estratos da Sociedade de forma a não introduzir perturbações bruscas que poderiam fazer perigar a estabilidade da resposta.

Por último examinaremos o efeito das informações *contraditórias.*

A figura 11 mostra a influência que poderão ter duas informações R_1 e R_2 iguais mas contraditórias.

O resultado será essencialmente função do momento em que a segunda informação chega ao conhecimento do «indivíduo».

Na hipótese 11a) a *correcção* R_2 à informação R_1 veio imediatamente a seguir Δt_1, o que *evitou* a formação dum período de instabilidade

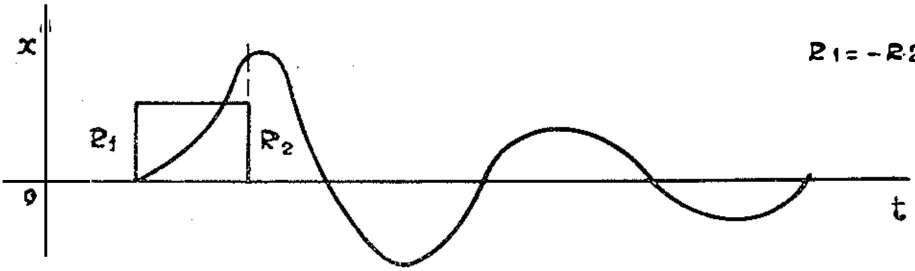


Fig. 11

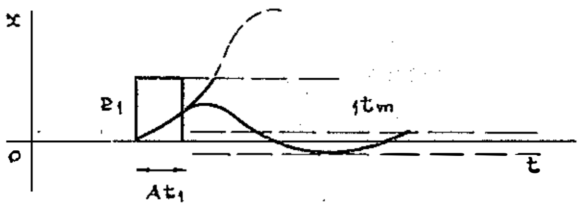


Fig. 11-a

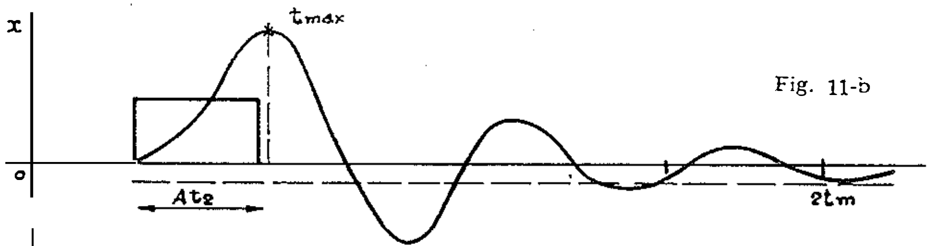


Fig. 11-b

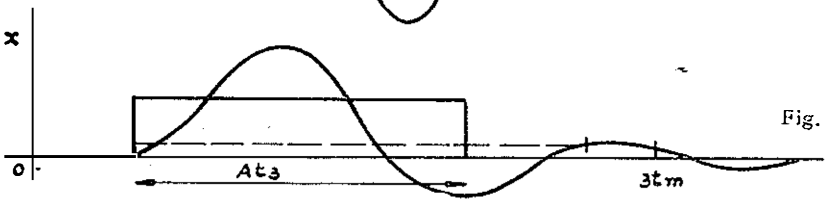


Fig. 11-c

e em ${}_1t_m$ tinha sido atingida a estabilidade e quanto mais pequeno for Δt_1, menor será a perturbação.

Na hipótese 11b) obtém-se o *pior efeito,* porque justamente quando se atingiu o máximo da resposta (t_{max}) é conhecida a correcção R_2 e a estabilidade só em ${}_2t_m$ é atingida.

Reparar finalmente na fig. 11 c, onde a correcção vem ao fim de Δt_3 embora $\Delta t_3 > \Delta t_2$ permita atingir a estabilidade em ${}_3t_m$, o que é melhor do que a hipótese 11 b).

Este facto mostra o perigo da informação do tipo «balão de ensaio», intrìnsecamente errada, mas tomada como certa pelo «indivíduo» sobretudo em períodos em que as características dinâmicas do «indivíduo» forem fortemente instáveis.

Além disso mostra que a *oportunidade* do desmentido é ou logo a *seguir* de forma a evitar que se processe a *resposta* do «indivíduo» à informação errada, caso da fig. 11a) ou então bastante *mais* tarde como em 11c), depois do indivíduo já ter *corrigido por si* a resposta e que a pior solução é *corrigir* a informação no *auge* da «resposta» como se indica na *fig. 11b)*.

Finalmente tem interesse mostrar como uma série de «balões de ensaio» hàbilmente lançados (isto é oportunamente) podem provocar uma instabilidade *permanente* e até de amplitude *divergente.*

Com efeito o lançamento de perturbações em t_1, t_2 e t_3 mantêm ou até acrescentam a instabilidade do «indivíduo» apesar de prontamente «desmentidas». (Veja-se fig. 12).

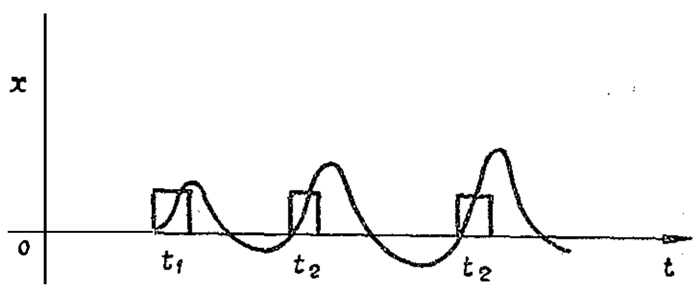


Fig. 12

Até aqui procuramos expor situações em que a resposta do «indivíduo» é periódica e portanto admite *situações aberrantes* tais como o valor de determinada informação poder ser ascendente ou descendente resultando como resposta do «indivíduo» respectivamente valores descendentes e ascendentes.

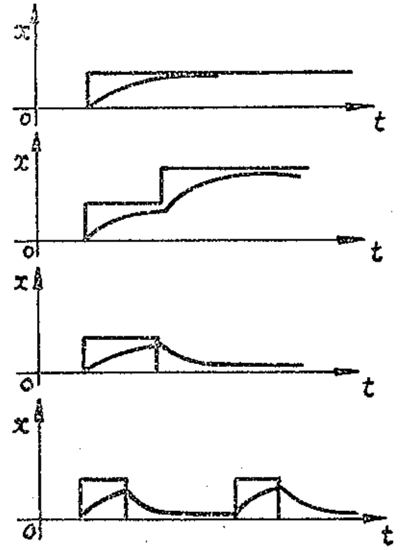
Tem interesse focar agora o caso do «indivíduo» se comportar duma forma *exponencial* isto é não periódica.

Fig. 13-a

Fig. 13-b

Fig. 13-c

Fig. 13-d



As figuras 13a, b, c, d, mostram que é impossível instabilizar um «indivíduo» deste tipo em qualquer situação ou tipo de forças.

Poderá a sua «resposta» ser *preguiçosa* mas será sempre estável.

Será um «caracter» particularmente propício para situações de emergência.

IV e) INFLUÊNCIA DO TIPO DA INFORMAÇÃO

Descritas as várias reacções «individuais» às «informações» exteriores tem interesse distinguir nessas informações os tipos indicados:

— Informações-forças
— Informações-elásticas: (Informação e sua tendência)

Informação-força (f)

Tudo quanto foi dito anteriormente aplica-se, sem qualquer alteração, a este tipo de informação e portanto considera-se a exposição feita como descrevendo e ilustrando suficientemente o problema.

Informação-elástica (y)

Este tipo de força vem *modificado* pelo parametro *a* (veja-se a expressão 10). Quer isto dizer que os valores de y vem afectados de um peso (probabilidade, expectância, etc.), que é dependente no caso mais geral (veja-se 8) de Me^{-1} e Ma isto é da característica do «indivíduo» (Me^{-1}) e da correlação real objectiva que y tem sobre o «indivíduo».

Portanto a mesma informação y tem para cada problema económico uma influência real descrita por (Ma).

Exemplificando; uma alteração das cotações na Bolsa influi realmente dum modo diferente nos vencimentos do funcionário do estado e nos rendimentos das acções para as quais se verificou a alteração da Bolsa referida.

Por outro lado, qualquer que seja o valor de Ma, uma dada informação tem sobre um dado «indivíduo» uma influência que depende de Me^{-1} que caracteriza o «indivíduo».

É o conjunto de influência real e objectiva Ma e da influência subjectiva Me^{-1} que forneceu a influência total no conjunto traduzida no factor *a* que modifica y.

Note-se contudo que *Ma* não é exclusivamente *objectiva* porque nela intervêm parametros do «indivíduo» e portanto encerra também uma certa dose de subjectividade.

Toda a análise feita anteriormente se aproveita entendendo que R significa o produto *a.y* e portanto y estará representado nas figuras apresentadas, factorizado por *a*.

Informação-elástica do tipo $b\dfrac{dy}{dt}$

Tal como para a informação elástica do tipo (ay), *b* significará $Me^{-1} . Mb$ e portanto conterá um termo que descreve a influência *objectiva* (Mb) e um termo que significa a influência *subjectiva* (Me^{-1}).

Neste aspecto não há mais nada que acrescentar.

Tem porém *interesse* examinar $\dfrac{dy}{dt}$

Com efeito, quando uma informação é recebida pelo «indivíduo» no instante em que é recebida $\dfrac{dy}{dt} = \infty$ para depois voltar a *zero.*

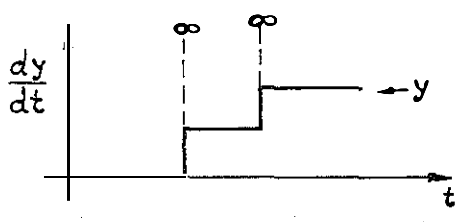


Fig. 14

Isto significa que para todas as funções *degraus* haverá uma descontinuidade para $\dfrac{dy}{dt}$

O sentido desta descontinuidade deve ser compreendido como uma «*surpresa*» e portanto as informações têm o inconveniente de constituir um elemento perturbador — porém a *energia* desta surpresa é relativamente pequena pois a sua duração é *nula.*

Portanto, a descrição das funções sob a forma de step-functions não convém para tratar analìticamente a função $\frac{dy}{dt}$ e dois métodos se oferecem:

— Ou regressamos à *função contínua* de que a função degraus é uma aproximação e então $\frac{dy}{dt}$ tem um significado claro e preciso na função contínua.

— Ou, se a *função degrau* é dada (e não é uma aproximação de uma função contínua) então pode recorrer-se a uma função contínua que a representará e substituirá a função degrau dada.

1.ª hipótese:

É dada a função contínua — analisa-se em série de *Fourier* e estuda-se para os termos mais importantes dessa série a *resposta* do «indivíduo».

Seja $A_i \cos \omega_i t$ um dos termos da série de Fourier

Fazendo:

$$x = a_i \cos(\omega_i t + \alpha_i)$$

Será

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = - a_i \omega_i \operatorname{sen}(\omega_i t + \alpha_i) \\ \dfrac{d^2 x}{dt^2} = - a_i \omega_i^2 \cos(\omega_i t + \alpha_i) . \end{cases}$$

e substituindo na expressão de 10) teremos:

$$- d \cdot a_i \cdot \omega_i^2 \cos(\omega\ t + \alpha_i) - e \cdot a_i \cdot \omega_i \operatorname{sen}(\omega_i t + \alpha_i) + q \cdot a_i \cdot \cos(\omega_i t + \alpha) = \\ = A \cos(\omega_i t) .$$

donde se pode determinar as constantes paramétricas a_i e α_i em função de A_i e ω_i e das contantes paramétricas d, e, q.

O integral geral será igual ao integral geral da equação homogénea $\left(d \frac{d^2 x}{dt^2} + e \frac{dx}{dt} + q = 0\right)$ somado ao integral particular anteriormente calculado.

Novamente a evolução da resposta (x) do «indivíduo» não segue a informação $\frac{dy}{dt}$, mas à medida que o integral geral se vai atenuando (como sucede nos «indivíduos» estáveis) mais se aproxima a resposta do integral particular ($x = a_i \cos \omega_i t + \alpha_i$) o que justifica todas as respostas *aberrantes* à informação recebida (Veja-se fig. 15).

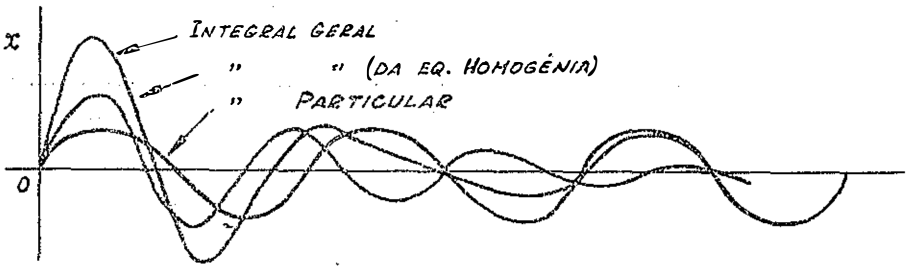


Fig. 15

Seria possível abordar sobre esta matéria todas as considerações feitas para as funções degraus, mas parece desnecessário por evidentes.

2.ª *hipótese:*

A função dada é por degraus: O método será regularizar a função degrau e vários métodos são possíveis, citaremos apenas um.

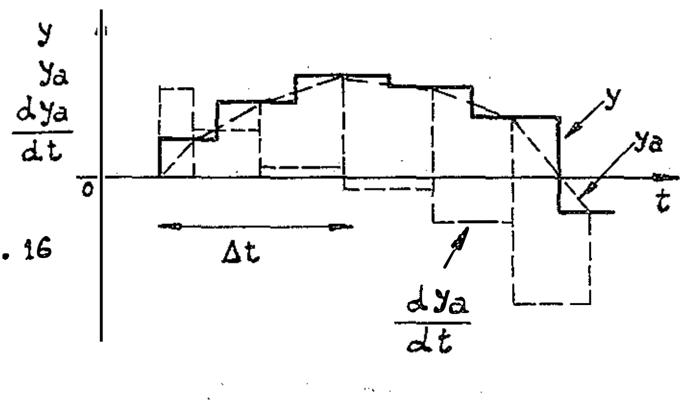


Fig. 16

Na fig. 16 mostra-se um método gráfico que consiste em ligar por segmentos de *recta* os pontos medianos dos intervalos dos degraus da função dada, obtendo-se a forma poligonal a tracejado.

É fácil a partir de y_a (poligonal) passar a $\frac{d\,y_a}{d\,t}$ que será tg α sendo α o ângulo que cada lado do polígono faz com a horizontal.

A função $\frac{d\,y_a}{d\,t}$ resultante será uma função degrau com a forma indicada na fig. 16.

O problema daqui em diante resume-se ao estudo duma nova função degrau $\frac{d\,y_a}{d\,t}$ que não oferece qualquer dificuldade formal.

Tem, contudo, interesse chamar a atenção para o seguinte pormenor: Na fig. 16, sucede que durante o período de tempo Δt as informações de y e $\frac{d\,y_a}{d\,t}$ são *contraditórias* no sentido seguinte: enquanto o índice y *cresce* constantemente já o índice $\frac{d\,y_a}{d\,t}$ *decresce* regularmente.

Portanto o «indivíduo» através de $\frac{d\,y_a}{d\,t}$ vai tendo a *indicação* de que o índice y brevemente deverá *estacionar* ou até entrar em decréscimo, isto é, a informação $\frac{d\,y_a}{d\,t}$ é uma informação *percursora* ou de *tendência*.

Como o «indivíduo» modifica as informações através duma óptica traduzida pelos matizes $Me^{-1}.Mb$ no que se refere a $\frac{d\,y_a}{d\,t}$ e $Me^{-1}.Ma$ em relação a y (ou seja $\frac{d\,y_a}{d\,t}$), compreende-se que a *resposta* «individual» seja diferente e portanto alguns «indivíduos» reagirão mais à tendência de y (ou seja a $\frac{d\,y_a}{d\,t}$) e outros seguirão de preferência o próprio y.

Este ponto é importante porque explica muitas atitudes aparentemente aberrantes de dois «indivíduos» de igual Me^{-1}, com efeito, basta que sejam diferentes as relações de Ma/Mb para cada um.

V

Este capítulo destina-se apenas a generalizar a um espaço a *n* dimensões o formulário deduzido para 1 dimensão.

A linguagem matricial de Bodewig será usada exclusivamente. Partiremos de equação diferencial (9)

$$Ad \cdot D^2 x + Ac \cdot Dx + A_0 x = -f - A_0 y - Ab \cdot Dy$$

Integral geral da equação homogénea:

$$Ad \cdot D^2 x + Ac\, Dx + A_0 x = 0$$

fazendo $x = e^{pt}$ sendo $p =$ uma variável complexa a definir
será

$$\begin{cases} Dx = p\, e^{pt} \\ D^2 x = p^2 e^{pt} \end{cases}$$

e

$$e^{pt}(Ad \cdot p^2 + Ac\, p + A_0) = 0$$

e como a equação matricial terá de ser satisfeita qualquer que seja t será ainda

$$Ad \cdot p^2 + Ac \cdot p + A_0 = 0$$

que, para ser satisfeita, terá de ser o seu Δ nulo, donde resultará uma equação da *2n* ordem, que fornece *2n* raízes reais ou imaginárias como se desejava.

Integral particular:

Seja $R = A \cdot e^{st}$ sendo s imaginário

Fazendo $x = M \cdot e^{st}$

sendo M uma matriz complexa a determinar.

será $\begin{cases} Dx = M \cdot s \cdot e^{st} \\ D^2x = M \cdot s^2 \cdot e^{st} \end{cases}$

e substituindo na equação diferencial será:

$$[A_d \cdot M \cdot s^2 + A_c \cdot M \cdot s + A_o M]\, e = A \cdot e^{st}$$

ou

$$[s^2 \cdot Ad + s \cdot A_c + A_o] \cdot M = A$$

ou

$$M = [s^2 \cdot Ad + s \cdot A_c + A_o]^{-1} \cdot A$$

que permite calcular M e assim obter todos os valores paramétricos desejados

VI) ENERGIA DA INFORMAÇÃO E DA RESPOSTA

Esta noção tem muito interesse porque a *energia* mede melhor o valor da informação ou da resposta, do que o próprio deslocamento dos parâmetros definidores.

A sua definição formal será dada pela expressão que passamos a deduzir.

Partimos de novo da equação do equilíbrio dinâmico referido à grandeza *informação-força* (que designaremos neste capítulo apenas por *força*)

Eq. 9) $A_d \cdot D^2x + A_c \cdot Dx + A_a \cdot x = -f - A_o \cdot y - A_b \cdot Dy$

Definir-se-á *potência* destas forças com o produto interno destas pelas *velocidades* com que se deslocam os parâmetros definidores do Sistema ou seja Dx.

Assim teremos a equação das *potências*.

19) $A_d \cdot D^2x \cdot Dx + A_c Dx \cdot Dx + A_a x \cdot Dx = -f \cdot Dx -$
$- A_o y \cdot Dx - A_b \cdot Dy \cdot Dx$

Integrando no tempo a equação 19) obteremos a equação das *energias*.

Designando por $\int$ o símbolo de integração e suprimindo dt em todas as integrais para simplificar a simbologia.

$$\int_{t_0}^{t_1} A_d \cdot D^2x \cdot Dx + \int_{t_0}^{t_1} A_c Dx \cdot Dx + \int_{t_0}^{t_1} A_o x \cdot Dx =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} -f \cdot Dx + \int_{t_0}^{t_1} - A_o y \cdot Dx + \int_{t_0}^{t_1} - A_b \cdot Dy \cdot Dx$$

e recordando que

$$\int_{t_0}^{t_1} D^2x \cdot Dx = \frac{1}{2}\left[(Dx)^2\right]_{t_0}^{t_1} \quad , \quad \int_{t_0}^{t_1} x \cdot Dx = \frac{1}{2}\left[(x)^2\right]_{t_0}^{t_1}$$

e arrumando a expressão doutra forma teremos:

20)
$$\frac{1}{2}\left[A_d \cdot (D\,x)^2 + A_a \cdot (x)^2\right]_{t_0}^{t_1} + A_c \int_{t_0}^{t_1} (Dx)^2 =$$

$$= - \int_{t_0}^{t_1} f \cdot Dx - \int_{t_0}^{t_1} A_o\, y \cdot Dx - \int_{t_0}^{t_1} A_b \cdot Dy \cdot Dx$$

O 2.º membro significa toda a *energia* posta em jogo pelas forças exteriores ao «indivíduo».

O 1.º membro representa a energia da réplica do «indivíduo».

Tem interesse chamar a atenção para o facto de ser possível integrar fácilmente o 1.º e o 3.º termo do 1.º membro da eq. 19), como se mostrou acima.

Sob o ponto de vista interpretativo, tem interesse chamar a atenção para o facto seguinte:

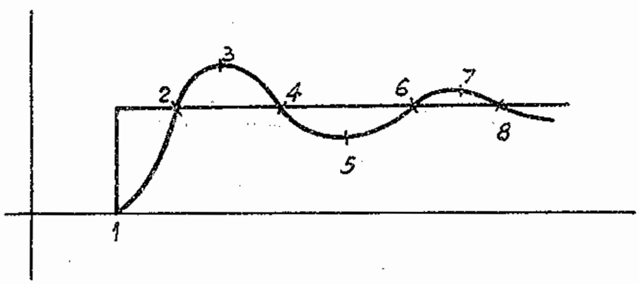


Fig. 17

Os trabalhos da resultante das forças exteriores (R) são:

positivos e *decrescentes:*	*negativos* e *decrescentes:*
1 a 2	2 a 3
3 a 4	4 a 5
5 a 6	6 a 7
7 a 8	etc.
etc.	

A *resposta* do «indivíduo» segue o mesmo caminho, contudo reparar que:

$$\frac{1}{2}\left[A_d(Dx)^2 + A_a(x)^2\right]_{t_0}^{t_1}$$

é *máximo* em *1* e decresce, no exemplo dado, constantemente com o tempo, enquanto que Ac. $\int_{t_0}^{t_1} (Dx)^2$ *cresce* constantemente com o tempo e tem *sinal* contrário ao do parêntesis recto.

Esta circunstância faz com que o sistema termine por entrar de novo em equilíbrio, estacionarizando.

Nota: Se o «indivíduo» fosse «*instável*» ou seria $Ac = o$ e o equilíbrio nunca mais era atingido ou Ac $\int_{t_0}^{t_1} (Dx)^2$ tinha o mesmo sinal que $\frac{1}{2}\left[\quad\right]_{t_0}^{t_1}$ e o sistema *divergia* indefinidamente.

VII) GENERALIZAÇÃO DA EQUAÇÃO 9)

A equação 9) é fàcilmente generalizável para «indivíduos» cuja *resposta* inclui não só termos D^2x, Dx, x mas ainda qualquer derivada p, como D^px, ou qualquer integral

$$_q\int x = \underbrace{\int\int\cdots\int}_{q} x \cdot \underbrace{dt \cdot dt \cdots dt}_{q}$$

Dum modo idêntico para as *informações-elásticas* que podem conter qualquer derivada *s* da forma $D_s y$ ou qualquer integral $_r\int y$

A expressão 9) pode então escrever-se dum modo geral:

$$\text{21)} \quad A_p D^p x + \cdots + A_0 x + \cdots + A_q \, {}_q\!\int x = -f - \Big[B_s D^s y + \cdots + B_0 y + \cdots + B_r \, {}_r\!\int y\Big]$$

A integração de expressão 21) far-se-á por uma simples mudança de variáveis de forma

$$\begin{cases} {}_q\int x = X \\ {}_r\int y = Y \end{cases}$$

e teremos finalmente:

$$A_p D^{p+q} X + \cdots + A_0 D^q X + \cdots + A_q X = -f - [B_s D^{s+r} Y + + \cdots + B_0 D^r Y + \cdots + B_r Y]$$

22) $$\sum_{i=0}^{p+q} A_{(i+q)} D^i X = -f - \sum_{j=0}^{s+r} B_{(j-r)} D^j Y.$$

Esta expressão em linguagem matricial cobre todo o conjunto de situações e representa uma forma já muito geral de ligação do meio externo com um «indivíduo» de características bastante complexas.

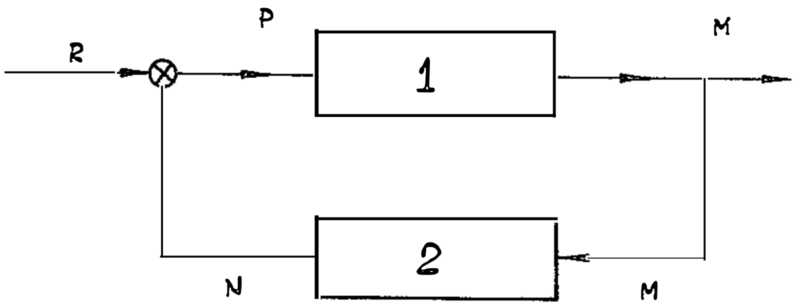
A sua dedução tem interesse para resolver os problemas que adiante se vão propor.

VIII) SISTEMAS COLECTIVOS, INTERLIGADOS

Em muitos problemas de comportamento *dinâmico* interessa resolver, pondo em evidência vários «indivíduos» colectivos, ligados entre si e recebendo a influência de informações externas.

Neste caso deseja-se não só conhecer a resposta de cada um deles em separado, mas igualmente a *resposta conjunta,* isto é, a resposta que resulta não só da informação *exterior* ao conjunto dos indivíduos em estudo, mas da influência que a resposta de uns «indivíduos» tem sobre os outros pertencentes a esse conjunto.

Comecemos por resolver o problema simples dum conjunto de 2 «indivíduos»



Seja *R* um vector que representa a informação exterior. Será um *vector* de forma: $\underset{(n,1)}{R}$

Seja *M* o vector que representa a *resposta* do conjunto.

Seja ainda $\underset{(n,n)}{T_1}$ a matriz que caracteriza o sistema *1* e $\underset{(n,n)}{T_2}$ a matriz que caracteriza o sistema *2.*

Admitindo que o sistema já atingiu o estado de regimen, será a integral particular 18) quem fornece a resposta.

Ora já vimos em 18) que:

$$\underset{(n,1)}{M} = [s^2 \underset{(n,n)}{A_d + s\, A_c + A_0}]^{-1} \cdot \underset{(n,1)}{A}$$

ou dum modo geral:

$$\underset{(n,1)}{M} = [s^n \underset{(n,n)}{A_n + \cdots + A_0}]^{-1} \cdot \underset{(n,1)}{A}$$

ou

$$\underset{(n,1)}{M} = \underset{(n,n)}{T} \cdot \underset{(n,1)}{A}$$

Portanto será:

23) $\begin{cases} N = T_2 \cdot M \\ M = T_1 \cdot P \\ P = R - N \end{cases}$ sendo N a resposta de *2* e *P* a soma matricial da resposta N com a informação R

Donde:

$$\begin{cases} R = P + N = P + T_2 \cdot M = P\,(1 + T_2\,T_1) \\ M = T_1 \cdot P \end{cases}$$

Donde ainda:

$$M = \left[T_1 \cdot (1 + T_2 T_1)^{-1} \right] \cdot R \tag{24}$$

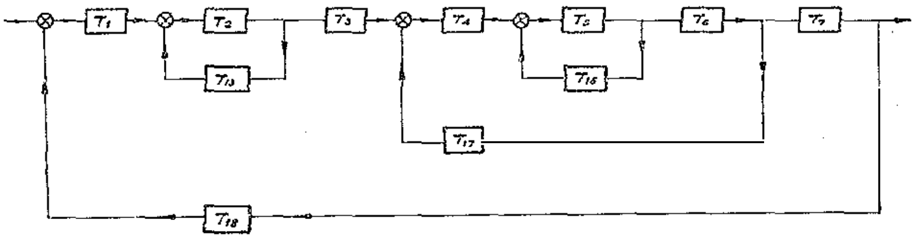
que fornece o sinal de resposta M à força exterior R.

Também se pode escrever sob a forma:

$$MR^{-1} = T_1 \cdot (1 + T_2 T_1)^{-1} \tag{25}$$

O sistema 23) ou as equações 24 e 25 respondem ao problema proposto. Chama-se a atenção de que se trata do caso mais simples dum modelo de *automação* com um elemento activo (1) e outro reactivo (2).

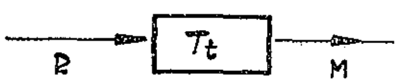
A generalização das soluções são fáceis e assim um estudioso de automação poderá escrever imediatamente a resposta dum sistema com a forma seguinte:



$$M^{-1} \cdot R = \left\{ \left[\left[\left[\left((T_5^{-1} + T_{16}) \cdot T_4^{-1} \right) \cdot T_6^{-1} + T_{17} \right] \cdot T_3^{-1} \right] \cdot T_7^{-1} \right] \cdot T_1^{-1} \right\} \cdot (T_2^{-1} + T_{13}) + T_{18}$$

o que mostra mais uma vez o interesse da aproximação das teorias de informação, automação e cibernética com a dos problemas económicos.

A expressão 26) pode ainda escrever-se $M^{-1} . R = T_t$, sendo T_t a matriz equivalente ao 2.º membro da expressão, e portanto o esquema indicado na figura 19 pode ser substituído por um «indivíduo» *equivalente*, cuja matriz característica seja T_t e assim se poderá representar pela figura 20.



Este método permite portanto substituir qualquer conjunto de «indivíduos» por outro conjunto equivalente, em particular por um «indivíduo» único equivalente (T_1).

Isto possibilita a criação de tantos conjuntos análogos quantos se quiserem, traduzindo esses conjuntos, em economia, hipóteses de *estruturas*, poderá assim passar-se ao estudo de *estruturas* constituídas pelo mesmo número de «indivíduos», mas ligados de formas diversas.

IX) ESTABILIDADE E SENSIBILIDADE DOS «INDIVÍDUOS E SUAS «ESTRUTURAS»

Sem desejar reproduzir aqui toda a matéria própria a um *curso* de automação, convirá contudo rever os conceitos de *estabilidade* e *sensibilidade.*

Designaremos por «estrutura» ao agregado de «indivíduos» constituindo um *conjunto.*

Estabilidade dum conjunto de «indivíduos», isto é, duma estrutura, é diferente da estabilidade de cada um dos indivíduos por si.

Este critério é importantíssimo porque permite pôr de *parte* «estruturas» que envolvam arrumos de «indivíduos» que sejam *instáveis.*

Há numerosos critérios de estabilidade que podem ser aplicados para determinar em que circunstância a «estrutura» proposta é «estável» e portanto conveniente.

É ainda possível, em casos de instabilidade, mostrar a razão dessa instabilidade e daí corrigir o *defeito.*

Repete-se que toda esta matéria é corrente e conhecida.

Sensibilidade: a resposta duma «estrutura» única não segue exactamente o constrangimento económico e daí um *erro* entre a resposta e a causa.

Esse *erro* é porém variável ao longo de todo o *espectro* das *informações perturbadoras* e mesmo que a resposta seja sempre *estável,* a sua sensibilidade pode variar.

Este será um critério supletivo ao da estabilidade.

RESUMO E CONCLUSÕES

Parece que entre a Cibernética, teoria de informação, automação e respectivos modelos e o *modelo económico* pode existir paralelismo *formal.*

Parece que o comportamento do Homem e suas agregações em relação ao problema económico não é muito diferente do seu *comportamento geral.*

Assim, parece que a aproximação destas duas actividades através dum mesmo modelo formal é aceitável e então é possível pelas regras gerais de similitude formal estudar os problemas económicos pela via da automação, teoria de informação e Cibernética.

Só os economistas poderão dizer se os modelos mantemáticos apresentados correspondem à realidade económica de que eles são especialistas.

Porém, tem interesse informar que tudo quanto atrás se escreveu não envolve qualquer informação de natureza económica e que a bibliografia consultada foi exclusivamente a correspondente às três matérias acima referidas.

ANTÓNIO GOUVÊA PORTELA
Professor do Instituto Superior Técnico